XVII.

SOPRA UNA CLASSE DI INTEGRALI DELL' EQUAZIONE $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$

« Nuovo Cimento », s. 4ª, vol. VI (1897),

pp. 204-209.

Sia σ una superficie o più generalmente un sistema di superficie (aperte o chiuse) del nostro spazio. Designiamo con P un punto generico dello spazio, con Q un punto di σ, con $f(Q)$ una funzione continua dei punti di σ. La formula:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{f(Q)}{r}\, d\sigma, \tag{1}$$

(in cui r rappresenta la distanza fra i punti P e Q) definisce una funzione U, regolare all'infinito, che soddisfa in tutto lo spazio alla equazione $\Delta U = 0$ ed è tale di più che le sue derivate normali $\partial U / \partial n$ e $\partial U / \partial n'$, nei punti di σ presentano la discontinuità:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = - f(Q).$$

Passando dalla equazione $\Delta_2 U = 0$, alla equazione più generale $A^2(\partial^2 U / \partial t^2) = \Delta_2 U$ (dove A è una costante) e data, in ogni istante t, una funzione continua $f(Q, t)$ dei punti di σ (derivabile due volte rispetto a t), si estende facilmente la formula (1), ponendo:

$$U(P, t) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{f(Q, t - Ar)}{r}\, d\sigma, \tag{2}$$

con che si ottiene [1] un integrale della equazione $A^2(\partial^2 U/\partial t^2) = \underset{2}{\Delta} U$, regolare all'infinito e affetto nei punti di σ dalla discontinuità:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = - f(Q, t) .$$

Se si considera il piano, invece dello spazio a tre dimensioni, e si intende che σ rappresenti una linea o un sistema di linee, la teoria del potenziale logaritmico ci dà una funzione:

$$(1') \qquad V(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma f(Q) \log \frac{1}{r} \, d\sigma ,$$

dotata di proprietà analoghe a quelle della (1).

Non si ha invece una formula, che corrisponda alla (2), per gli integrali della equazione:

$$(3) \qquad A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} ,$$

mentre sarebbe pur profittevole in molte ricerche la conoscenza di un integrale $V(x, y, t)$ della (3), che si annulli all'infinito e presenti nelle derivate normali una data discontinuità $f(Q, t)$ sopra il contorno σ.

Non so se la costruzione di un tale integrale sia stata finora effettuata; mi permetto quindi di indicarne una qui appresso.

Osservo in primo luogo che la funzione data $f(Q, t)$ (la quale è da ritenersi derivabile due volte rispetto a t) si può sempre supporre nulla, assieme ad $f' = \partial f/\partial t$, per $t = 0$ [2].

Ciò posto, io dico che si può prendere $V(P, t)$ eguale alla parte reale di:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_{Ar}^{t} f(Q, t-\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}} .$$

---

(1) Cfr. V. Volterra, *Sul principio di* Huygens, t. 31 di questo giornale, p. 251.

(2) Infatti, ove questa condizione non fosse verificata, basterebbe sostituire alla ricerca di V quella della funzione

$$W = V - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{ f(Q, 0) + t f'(Q, 0) \} \log \frac{1}{r} \, d\sigma,$$

che dovrebbe, come si vede subito, soddisfare alla (3), esser nulla all'infinito, regolare in tutto il piano e presentare nelle derivate normali la discontinuità $f(Q, t) - f(Q, 0) - t f'(Q, 0)$. Ora questa funzione si annulla precisamente, in uno alla sua derivata prima, per $t = 0$.

Si ha di questa parte reale una espressione analitica, valida per $t > 0$, risguardando $f(Q, t)$ nullo per valori negativi di t (il che non lede la continuità di f e di f') e ponendo:

$$V(P, t) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_{Ar}^{t} f(Q, t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2r^2}}. \tag{4}$$

Cominciamo col dimostrare che $V(P, t)$ è derivabile due volte rispetto ad x, y, t. Assumiamo a tal uopo come variabile di integrazione:

$$\mu = \log\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - A^2r^2}}{Ar};$$

verrà:

$$V(P, t) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)d\mu, \tag{5}$$

e sotto questa forma la derivabilità è manifesta. Avremo, tenendo conto che $f(Q, 0)$, $f'(Q, 0)$ sono eguali a zero e che quindi svaniscono i termini provenienti dalla derivazione del limite superiore:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\left(\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu$$

$$- \frac{A}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f'\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\,d\mu,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\left(\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu$$

$$- \frac{A}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f'\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\,\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\,d\mu,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)d\mu.$$

Dalle due prime, per essere:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1\,, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\,,$$

segue:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\left(\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu$$

$$- \frac{A}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f'\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\,d\mu\,,$$

e siccome, mediante una integrazione per parti, risulta:

$$\int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f'\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\,d\mu =$$

$$= A\int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\left(\frac{e^\mu - e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu\,,$$

così resterà:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) d\mu = A^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,.$$

Per rilevare la natura della discontinuità delle derivate normali di V nei punti di σ, riprendiamo la equazione (5) e deriviamola rispetto ad n e ad n', risostituendo, dopo la derivazione, la variabile μ con τ; ciò porge:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial \sigma}\,d\sigma \int_{Ar}^t f'(Q, t-\tau)\,\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2r^2}}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n'}\,d\sigma \int_{Ar}^t f'(Q, t-\tau)\,\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2r^2}}\,,$$

e, sommando, con considerazioni analoghe a quelle, che si usano nella teoria del potenziale logaritmico:

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -\left\{\int_{Ar}^{t} f'(Q, t-\tau)\frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}}\right\}_{P=Q}$$

$$= -\int_0^t f'(Q, t-\tau)\, d\tau = -f(Q, t)\,,$$

c. d. d.

Giova notare che V e $\partial V/\partial t$ si annullano in tutto lo spazio, per $t = 0$, e questa condizione, unitamente a quelle già poste, valgono, come si stabilisce con ragionamenti ben noti, a determinare univocamente la funzione V. La sua espressione analitica, per $t < 0$, si desume dalla (4), cambiando

$$\int_{Ar}^{t} f(Q, t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}} \quad \text{in} \quad \int_{Ar}^{-t} f(Q, t+\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}}\,,$$

e risguardando nulla la funzione $f(Q, t)$ per valori positivi di t.

Mi si conceda ancora una parola circa la genesi della espressione (4) di $V(P, t)$. Io vi pervenni, cercando la parte reale della continuazione analitica, per $z = it/A$, $i = (\sqrt{-1})$, di un certo potenziale dello spazio ordinario. Il potenziale, di cui mi sono valso è quello di un semplice strato newtoniano distribuito con densità:

$$\frac{1}{4\pi} F(Q, z) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{z^2 + t^2} f(Q, t)\, dt\,,$$

sopra un cilindro retto, indefinito, avente σ per direttrice e le generatrici parallele all'asse z.

Non istarò a dichiarare quali ragioni mi abbiano suggerito la scelta di questo potenziale, nè quali calcoli mi abbiano condotto alla (4). La verifica a posteriori, testè accennata, basta per stabilire speditamente il risultato, nè d'altra parte si conviene far posto in queste colonne a sviluppi di carattere esclusivamente matematico.