XIII.

SUL MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI SOGGETTI A RESISTENZE PROPORZIONALI ALLE RISPETTIVE VELOCITÀ

« Atti Ist. Ven. », serie VII, t. LIV (1895-96), pp. 1004-1008.

Il compianto prof. E. PADOVA risolse (¹) in modo assai semplice il problema del moto intorno ad un punto fisso di un sistema rigido, ciascun punto del quale sia soggetto ad una resistenza proporzionale alla rispettiva velocità. Egli mostrò con procedimento diretto che il problema ammette due integrali primi e si trova quindi ridotto alle quadrature, le quali si possono poi effettuare con metodo analogo a quello tenuto da JACOBI pel caso di un corpo libero da forze (sì attive che resistenti).

La analogia tra il moto libero e quello soggetto a resistenze proporzionali alle velocità, secondo la deduzione del prof. PADOVA, sembra peculiare pel sistema rigido; si può per altro farla discendere da un teorema di carattere generale, che mi propongo appunto di stabilire nella presente Nota.

Ecco l'enunciato del teorema:

Le equazioni differenziali (E), *che reggono il movimento di un sistema materiale S, quando i singoli suoi punti incontrano resistenze* (di mezzo, d'attrito o d'altra natura qualsiasi) *proporzionali* (*) *alle rispettive velocità, si possono ricavare dalle equazioni* (E_1), *relative al moto libero dello stesso S, mediante il cambiamento di variabile indipendente*: $dt_1 = e^{-\lambda t}\,dt$. (Nella formula $dt_1 = e^{-\lambda t}\,dt$, t_1 rappresenta il tempo pel moto libero, t il tempo pel moto soggetto a resistenze e λ il rapporto costante tra la resistenza e la velocità).

Si deduce in particolare che ad ogni integrale primo $f(q_1, q_2, \dots, q_n; dq_1/dt_1, dq_2/dt_1, \dots, dq_n/dt_1) = \text{cost.}$ del sistema di equazioni (E_1), corri-

(¹) *Sul moto di rotazione di un corpo rigido*, « Atti dell'Acc. di Torino », 1885.

(*) V. per una maggiore precisazione la p. seg. [N. d. R.].

sponde per (E) un integrale primo del tipo $f(q_1, q_2, ..., q_n; e^{\lambda t} q_1', e^{\lambda t} q_2', ... e^{\lambda t} q_n') = \text{cost.}$, essendosi per brevità indicate con apici le derivazioni rispetto alla variabile t. Se la funzione f è omogenea di grado m rispetto alle velocità, l'integrale primo di (E) assume la forma $f = Ce^{-m\lambda t}$, con C costante arbitraria; ciò si verifica per esempio nel caso considerato dal prof. PADOVA.

Giova rilevare che l'integrazione del sistema (E) equivale completamente (nel senso che differisce soltanto per operazioni in termini finiti) all'integrazione del sistema (E_1). Infatti, integrato quest'ultimo, basterà, in causa della relazione $dt_1 = e^{-\lambda t} dt$, porre nelle equazioni integrali, $(-1/\lambda) e^{-\lambda t} + \text{cost.}$ al posto di t_1.

Sia S un sistema di punti materiali $(m_j x_j, m_j y_j, m_j z_j)$ a legami indipendenti dal tempo e dotato di n gradi di libertà. Designandone con T la forza viva, con $q_1, q_2, ..., q_n$ le coordinate lagrangiane, si ha:

$$2T = \sum_{rs}^{n}{}_{1} a_{rs} q_r' q_s',$$

posto al solito

$$a_{rs} = \sum_j m_j \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial q_r} \frac{\partial x_j}{\partial q_s} + \frac{\partial y_j}{\partial q_r} \frac{\partial y_j}{\partial q_s} + \frac{\partial z_j}{\partial q_r} \frac{\partial z_j}{\partial q_s} \right\}. \tag{1}$$

Le equazioni del moto sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_h'} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h \qquad (h = 1, 2, ..., n),$$

dove la componente Q_h della forza secondo la coordinata q_h si esprime, per mezzo delle componenti X_j, Y_j, Z_j delle forze unitarie, applicate ai singoli punti del sistema, nel modo seguente:

$$Q_h = \sum_j m_j \left\{ X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_h} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_h} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_h} \right\} \qquad (h = 1, 2, ..., n). \tag{2}$$

Cerchiamo la espressione delle Q_h nel caso speciale in cui le forze X_j, Y_j, Z_j sieno resistenze proporzionali alle velocità. Avremo:

$$X_j = -\lambda x_j' = -\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} q_k',$$

e in modo analogo:

$$Y_j = -\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} q_k', \qquad Z_j = -\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} q_k'.$$

Portando nelle (2) questi valori di X_j, Y_j, Z_j, si ricava:

$$Q_h = -\lambda \sum_1^n{}_k q'_k \sum{}_j m_j \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial q_h}\frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial y_j}{\partial q_h}\frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \frac{\partial z_j}{\partial q_h}\frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right\},$$

ossia, in causa delle (1),

$$Q_h = -\lambda \sum_1^n{}_k a_{hk} q'_k ;$$

dopo di che le equazioni del moto divengono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} - \lambda \sum_1^n{}_k a_{hk} q'_k .$$

Gioverà avere queste equazioni risolute rispetto alle derivate seconde delle q. Si faranno per ciò le posizioni:

$$a = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} , \qquad a^{(hi)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{hi}},$$

$$a^i_{rs} = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_h a^{(hi)} \left\{ \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{hs}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_h} \right\},$$

e si moltiplicheranno le equazioni sopra scritte per $a^{(hi)}$, sommando rispetto all'indice h. Con calcoli ovvii, si trova:

$$\text{(E)} \qquad q''_i = -\sum_1^n{}_{rs} a^i_{rs} q'_r q'_s - \lambda q'_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ciò posto, consideriamo le equazioni:

$$(\text{E}_1) \qquad \frac{d^2 q_2}{dt_1^2} = -\sum_1^n{}_{rs} a^i_{rs} \frac{dq_r}{dt_1}\frac{dq_s}{dt_1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

che definiscono il moto libero dello stesso sistema S, qualora si designi il tempo con t_1.

Facendo nelle (E_1) $dt_1 = e^{-\lambda t}\, dt$, viene:

$$\frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = \frac{d\dfrac{dq_i}{dt_1}}{dt_1} = e^{\lambda t}\frac{d(e^{\lambda t} q'_i)}{dt} = e^{2\lambda t} q''_i + \lambda e^{2\lambda t} q'_i = -e^{2\lambda t} \sum_1^n{}_{rs} a^i_{rs} q'_r q'_s ,$$

ossia:

$$q_i'' = -\sum_{rs}^{n} \overset{1}{\vphantom{x}} a^i_{rs} q_r' q_s' - \lambda q_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le quali equazioni coincidono colle (E), come dovevasi dimostrare. Si vede subito che la equivalenza fra i due sistemi (E_1) ed (E) persiste anche quando, agendo su (E_1) forze attive Q_h di natura qualsiasi, il sistema (E) sia invece sollecitato da forze di componenti $e^{-2\lambda t} Q_h$.

Possiamo aggiungere l'osservazione seguente:

L'integrale

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} \frac{dq_r}{dt_1} \frac{dq_s}{dt_1} = C,$$

che esprime, nel caso del moto libero, il principio della conservazione dell'energia, si cangia, quando il sistema incontra le accennate resistenze, in $\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} q_r' q_s' = Ce^{-2\lambda t}$, e, per essere $\lambda > 0$, mostra che l'energia cinetica del sistema diminuisce costantemente e tende a zero per $t = \infty$. Ciò corrisponde al fatto sperimentale che le resistenze dinamiche tendono a trasformare l'energia cinetica, attribuendole aspetti fisici differenti (energia termica, elettrica, magnetica, luminosa, chimica, ecc., a seconda dei casi).