XI.

SUL MOTO DI UN CORPO RIGIDO INTORNO AD UN PUNTO FISSO

Nota I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V (2º sem. 1896)

pp. 3-9 (*).

L'interesse, che a buon diritto si suole accordare ai problemi classici della meccanica analitica, mi conforta ad esporre alcune poche cose relative al moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.

Premetto una parola di commento sul punto di vista da cui io mi sono posto.

Le equazioni differenziali del moto dipendono, come si sa, da due elementi: la natura del sistema mobile, analiticamente rappresentata da una forma differenziale quadratica, e la natura delle forze che lo sollecitano. La conoscenza del primo di questi elementi, se non basta a caratterizzare una determinata questione dinamica, permette tuttavia di confrontare fra loro più sistemi materiali, dotati di uno stesso grado di libertà e di concluderne la identità (analitica), quando le loro forze vive sieno rappresentate da forme trasformabili l'una nell'altra. In questo caso le equazioni differenziali del moto dei due sistemi si riconducono evidentemente le une alle altre, mediante una trasformazione di coordinate (lagrangiane) e una conseguente trasformazione delle forze.

In ordine a questo criterio, io ho preso a studiare la forza viva T di un corpo rigido, per stabilirne i caratteri essenziali.

Sarebbe stato oltremodo laborioso il ricorrere per questa indagine agli invarianti della forma differenziale. Ho preferito attenermi al concetto gruppale, appoggiandomi sugli insigni lavori del sig. Lie. Determinai pertanto la natura del gruppo che trasforma in se stessa la forza viva T,

(*) Presentata dal Socio V. Cerruti (5 luglio 1896).

ed ho trovato, come era agevolmente prevedibile, gruppi diversi, secondo il comportamento dei momenti principali di inerzia, relativi al punto fisso.

Nel caso in cui i tre momenti sieno tra loro eguali, la struttura del gruppo corrispondente porta senz'altro a concludere che la forma differenziale T dev'essere di curvatura costante positiva, e in fatto un'acconcia scelta di variabili permette di constatarlo direttamente, talchè si può identificare la dinamica di un punto materiale in uno spazio ellittico a quella di un corpo rigido, mobile intorno ad un punto fisso, per cui sieno eguali i momenti principali di inerzia.

Mi permetto ancora di rilevare, quantunque nel presente scritto non ne sia fatto cenno, che, allorquando tutti e tre o due almeno dei momenti di inerzia sono distinti, la espressione di T non è utilmente riducibile a tipo diverso, e può invece, come mostrerò in altra occasione, risguardarsi canonica per tutta una categoria di problemi con tre gradi di libertà. Spero allora di poter dar prova, anche dal lato strettamente dinamico, dell'interesse di questo genere di ricerche.

Pel corpo rigido in particolare, se non vien fatto di dedurre dalle considerazioni gruppali conseguenze meccaniche nuove, si mette in luce tuttavia un fatto analitico, che sembrami degno di attenzione; si mostra cioè l'esistenza di potenziali *immaginarii*, per cui (anche quando i momenti di inerzia sono tutti distinti) le equazioni del moto si possono integrare mediante quadrature.

L'Accademia vorrà consentire che io dedichi due Note a queste osservazioni sul moto dei corpi rigidi.

1. – Sia $T = \frac{1}{2} \sum_{rs}^{n}{}_{1} a_{rs} x'_r x'_s$ l'espressione in coordinate lagrangiane della forza viva di un sistema materiale S a legami indipendenti dal tempo; le a_{rs} dovendosi ritenere in tale ipotesi funzioni soltanto delle coordinate x_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Designeremo al solito con a (essenzialmente positivo) il determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, e con $a^{(rs)}$ il complemento algebrico di a_{rs} in a, diviso per a.

Suppongasi che l'equazione:

$$\sum_{r=1}^{n} A_r x'_r = \text{cost.} \tag{1}$$

(le A essendo funzioni delle x) costituisca un integrale primo, lineare, come si vede, rispetto alle velocità, per il moto del sistema S, quando non agiscono forze. Dico che T ammette la trasformazione infinitesima

$$Zf = \sum_{i=1}^{n} A^{(i)} p_i ,$$

dove

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad A^{(i)} = \sum_1^n {}_r\, a^{(ir)} A_r .$$

Per provarlo, mostrerò come tale enunciato non sia che l'espressione, secondo la terminologia ormai classica del sig. LIE, di un teorema, dimostrato in questi stessi Rendiconti [1] dal prof. CERRUTI. Egli ha infatti osservato che, ogni qual volta esiste un integrale lineare (1) per un sistema S sollecitato da forze indipendenti dalle velocità (nel qual caso la (1) è sempre integrale, anche quando, come si è supposto, non agiscono forze [2]) è possibile nella varietà Φ di elemento lineare $ds = \sqrt{2T\,dt^2}$ un moto *rigido* infinitesimo, per cui ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ subisce gli spostamenti $\delta x_1 = \varepsilon A^{(1)}$, $\delta x_2 = \varepsilon A^{(2)}, \ldots, \delta x_n = \varepsilon A^{(n)}$, designando ε una costante infinitesima.

Ora il prof. CERRUTI chiama, come è naturale, rigido uno spostamento, in cui i singoli elementi si comportano come fossero collegati rigidamente, e desume questa interpretazione dalla circostanza analitica che, ponendo, nell'espressione dell'elemento lineare $ds^2 = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$, $x_i + \varepsilon A^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ al posto di x_i (e quindi $dx_i + \varepsilon\, dA^{(i)}$ al posto di dx_i), il ds^2, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, rimane invariato. Ciò equivale a dire manifestamente che l'elemento lineare ds, o, se si vuole, la forza viva T, ammette la trasformazione infinitesima Zf, estesa (erweiterte), si intende, alle velocità dx_i/dt.

Giova notare che, se nell'integrale $\sum_1^n {}_r\, A_r x'_r = \text{cost.}$ si sostituiscono alle x' le variabili coniugate $p_i = \partial T/\partial x'_i$, la corrispondente trasformazione infinitesima Zf riesce determinata identicamente, poichè il primo membro dell'integrale coincide allora col simbolo della trasformazione. Infatti da $p_i = \partial T/\partial x'_i = \sum_1^n {}_i\, a_{ir} x'_r$, si trae $x'_r = \sum_1^n {}_i\, a^{(ir)} p_i$, e quindi:

$$\sum_1^n {}_r\, A_r x'_r = \sum_1^n {}_{ri}\, a^{(ir)} A_r p_i = \sum_1^n {}_i\, A^{(i)} p_i = Zf .$$

2. – Applichiamo queste generalità al caso di un corpo rigido, mobile intorno ad un punto fisso O.

Si indichino al solito con x, y, z gli assi principali di inerzia nel

[1] Aprile, 1895.

[2] Cfr. la mia Nota: *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*, « Atti dell'Acc. di Torino », 1896 [in questo vol.: IX, pp. 199–205].

punto O, con A, B, C i momenti principali, con α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 i coseni degli angoli che gli assi x, y, z formano con una terna qualunque d'assi fissi ξ, η, ζ, aventi l'origine nel punto fisso. Converrà aver presenti due sistemi di coordinate lagrangiane: i parametri razionali di RODRIGUES [3] e gli angoli di EULERO. I primi conducono a stabilire utili raffronti, i secondi meglio si prestano al calcolo effettivo. Per evitare di scrivere tutto in doppio, ci atterremo alla rappresentazione parametrica di RODRIGUES, riportando in coordinate euleriane [4] soltanto quelle formule di cui dovrà farsi in appresso esplicito uso. Ritenuto ciò, avremo

$$\alpha_1 = \frac{1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{\sigma^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2(-x_3 + x_1x_2)}{\sigma^2}, \quad \alpha_3 = \frac{2(x_2 + x_1x_3)}{\sigma^2},$$

$$\beta_1 = \frac{2(x_3 + x_1x_2)}{\sigma^2}, \quad \beta_2 = \frac{1 + x_2^2 - x_3^2 - x_1^2}{\sigma^2}, \quad \beta_3 = \frac{2(-x_1 + x_2x_3)}{\sigma^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{2(-x_2 + x_1x_3)}{\sigma^2}, \quad \gamma_2 = \frac{2(x_1 + x_2x_3)}{\sigma^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{\sigma^2},$$

dove si è posto per brevità $\sigma^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Le componenti della rotazione attorno agli assi principali di inerzia sono

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \alpha_2'\alpha_3 + \beta_2'\beta_3 + \gamma_2'\gamma_3 = \frac{2}{\sigma^2}(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3'), \\ q &= \alpha_3'\alpha_1 + \beta_3'\beta_1 + \gamma_3'\gamma_1 = \frac{2}{\sigma^2}(x_2' + x_1x_3' - x_3x_1'), \\ r &= \alpha_1'\alpha_2 + \beta_1'\beta_2 + \gamma_1'\gamma_2 = \frac{2}{\sigma^2}(x_3' + x_2x_1' - x_1x_2'), \end{aligned} \right.$$

e la forza viva del corpo assumerà la forma:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \tag{2}$$

$$= \frac{4}{\sigma^4}\{A(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3')^2 + B(x_2' + x_1x_3' - x_3x_1')^2 + C(x_3' + x_2x_1' - x_1x_2')^2\}.$$

---

(3) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. 1, p. 34.

(4) Le chiamo così per consuetudine, ma effettivamente userò gli angoli ϑ, f, φ del KIRCHHOFF (*Mechanik*, p. 43), che sono legati agli angoli ϑ, φ, ψ di EULERO dalle relazioni $f = \pi/2 - \varphi$, $\varphi = \psi - \pi/2$ e permettono di stabilire le espressioni dei nove coseni senza ricorrere a considerazioni geometriche.

Esprimendo le rotazioni p, q, r per mezzo delle variabili p_1, p_2, p_3 coniugate ad x_1', x_2', x_3', si trova:

$$(3)\quad \begin{cases} Ap = \frac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (x_3 + x_1x_2)p_2 + (-x_2 + x_1x_3)p_3\}, \\ Bq = \frac{1}{2}\{(-x_3 + x_1x_2)p_1 + (1+x_2^2)p_2 + (x_1 + x_2x_3)p_3\}, \\ Cr = \frac{1}{2}\{(x_2 + x_1x_3)p_1 + (-x_1 + x_2x_3)p_2 + (1+x_3^2)p_3\}; \end{cases}$$

le quali uguaglianze, passando alle coordinate euleriane ϑ, f, φ, ove si designino con p_ϑ, p_f, p_φ le $\partial T/\partial\vartheta'$, $\partial T/\partial f'$, $\partial T/\partial\varphi'$, possono essere scritte:

$$(3')\quad \begin{cases} Ap = \operatorname{sen} f p_\vartheta + \cos f \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f + \frac{\cos f}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi, \\ Bq = -\cos f p_\vartheta + \operatorname{sen} f \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f + \frac{\operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi, \\ Cr = -p_f. \end{cases}$$

Quando non agiscono forze, sussistono, come è ben noto, i tre integrali delle aree:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

$$\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

che, espressi mediante x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, divengono

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (-x_3 + x_1x_2)p_2 + (x_2 + x_1x_3)p_3\} = \text{cost.}, \\ \frac{1}{2}\{(x_3 + x_1x_2)p_1 + (1+x_2^2)p_2 + (-x_1 + x_2x_3)p_3\} = \text{cost.}, \\ \frac{1}{2}\{(-x_2 + x_1x_3)p_1 + (x_1 + x_2x_3)p_2 + (1+x_3^2)p_3\} = \text{cost.}, \end{cases}$$

e, in coordinate euleriane,

$$
(4') \qquad \left\{
\begin{aligned}
&-\operatorname{sen}\varphi\, p_\vartheta - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_f - \cos\varphi\, \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_\varphi = \text{cost.},\\
&\cos\varphi\, p_\vartheta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\vartheta}\, p_f - \operatorname{sen}\varphi\, \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_\varphi = \text{cost.},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p_\varphi = \text{cost.}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ne deduciamo che la forza viva T ammette le tre trasformazioni infinitesime

$$
\begin{aligned}
Z_1 f &= \frac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (-x_3 + x_1x_2)p_2 + (x_2 + x_1x_3)p_3\} = \\
&= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}x_1 U + \frac{1}{2}(x_2p_3 - x_3p_2)\,,\\
Z_2 f &= \frac{1}{2}\{(x_3 + x_1x_2)p_1 + (1 + x_2^2)p_2 + (-x_1 + x_2x_3)p_3\} = \\
&= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}x_2 U + \frac{1}{2}(x_3p_1 - x_1p_3)\,,\\
Z_3 f &= \frac{1}{2}\{(-x_2 + x_1x_3)p_1 + (x_1 + x_2x_3)p_2 + (1 + x_3^2)p_3\} = \\
&= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}x_3 U + \frac{1}{2}(x_1p_2 - x_2p_1)\,,
\end{aligned}
$$

$$(U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)\,.$$

Sarebbe facile verificare direttamente che le Z_1f, Z_2f, Z_3f soddisfano alle relazioni

$$
(5) \qquad (Z_1Z_2)f = -Z_3f\,, \qquad (Z_2Z_3)f = -Z_1f\,, \qquad (Z_3Z_1)f = -Z_2f\,;
$$

riesce tuttavia anche più semplice il riportarsi ad una proposizione di JACOBI [5], secondo cui gli integrali delle aree (espressi a mezzo delle

---

[5] *Werke*, B. V, p. 113. Giova avvertire che le (5) presentano un cambiamento di segno rispetto alle formule di JACOBI, poichè noi, seguendo il sig. LIE, abbiamo posto

$$(Z_1Z_2)f = Z_1Z_2f - Z_2Z_1f = \sum_1^3{}_i \left\{ \frac{\partial Z_1 f}{\partial p_i}\frac{\partial Z_2 f}{\partial x_i} - \frac{\partial Z_1 f}{\partial x_i}\frac{\partial Z_2 f}{\partial p_i} \right\},$$

mentre il simbolo di JACOBI $[Z_1f, Z_2f]$ equivale a $-(Z_1Z_2)f$. Cfr. anche: MATHIEU, *Dynamique analytique*, p. 243; MAYER A., *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Diffgl.* ecc., « Math. Ann. » B. 17, 1880. Aggiungo che la proposizione di JACOBI potrebbe ricavarsi in modo elegante come caso particolare di un teorema gruppale (LIE-ENGEL, *Theorie* ecc., I., p. 233).

coordinate x_i e delle variabili p_i) sono legati da equazioni del tipo (5), non solo, ciò che si constata immediatamente, per un sistema di punti liberi, ma eziandio per un sistema di punti vincolati in modo qualunque, purchè tale, si intende, da conservare gli integrali delle aree.

Proponiamoci di determinare la natura del gruppo, che trasforma in sè stessa la forza viva di un corpo rigido, distinguendo all'uopo tre casi:

a) i momenti principali di inerzia A, B, C sono fra loro diversi;

b) due momenti principali, per es. A e B, sono eguali, ma distinti dal terzo;

c) i momenti principali di inerzia sono tutti eguali fra loro.

In questa Nota trovano posto soltanto poche considerazioni generali relative all'ipotesi *a*); alcune loro conseguenze e la discussione degli altri casi sono rimessi ad altra Comunicazione.

3. – Caso *a*). — Si hanno, come è noto, i *soli* (6) integrali (4) linearmente indipendenti (cioè non legati da relazioni lineari *a coefficienti costanti*); quindi la forza viva T ammette le sole trasformazioni infinitesime indipendenti Z_1f, Z_2f, Z_3f, le quali debbono per ciò costituire un gruppo G_3 a tre parametri. Questo vien messo in evidenza dalle (5), che determinano in pari tempo la struttura (Zusammensetzung) di G_3. Da essa direttamente (7) potrebbe desumersi che il nostro gruppo è costituito come il gruppo proiettivo $x' = (ax + b)/(x + c)$ sopra la retta. Si può per altro riconoscerlo in modo più vantaggioso per l'uniformità dell'indagine, prendendo a considerare il gruppo G_6 di proiettività, che trasformano in sè stessa la sfera immaginaria $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ nello spazio ordinario. Tale gruppo è generato (8) dalle trasformazioni infinitesime:

$$\boxed{\begin{array}{lll} p_1 + x_1U\,, & p_2 + x_2U\,, & p_3 + x_3U\,, \\ x_2p_3 - x_3p_2\,, & x_3p_1 - x_1p_3\,, & x_1p_2 - x_2p_1 \end{array}}\,,$$

(6) O. Tedone, *Sopra i casi, in cui il problema del moto di un corpo rigido si riduce alle quadrature*, «Nuovo Cimento», 1895. Veramente dalla ricerca del sig. Tedone risulta che quando $A = B \lesseqgtr C$, esiste, oltre al sistema (4), il solo integrale lineare $r =$ cost. Siccome però quest'ultimo non compete al caso generale, il nostro asserto si trova giustificato.

(7) Lie-Engel, III, pp. 713-717.

(8) Lie-Engel, ibidem, p. 410.

o, ciò che è lo stesso, da:

$$Z_1f = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}x_1U + \frac{1}{2}(x_2p_3 - x_3p_2), \quad Z'_1f = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}x_1U - \frac{1}{2}(x_2p_3 - x_3p_2),$$

$$Z_1f = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}x_2U + \frac{1}{2}(x_3p_1 - x_1p_3), \quad Z'_2f = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}x_2U - \frac{1}{2}(x_3p_1 - x_1p_3),$$

$$Z_3f = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}x_3U + \frac{1}{2}(x_1p_2 - x_2p_1), \quad Z'_3f = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}x_3U - \frac{1}{2}(x_1p_2 - x_2p_1),$$

la distinzione delle trasformazioni infinitesime del gruppo in due categorie Z_if $(i = 1, 2, 3)$ e Z'_jf $(j = 1, 2, 3)$ corrispondendo alla circostanza che le tre trasformazioni di ciascuna categoria determinano due sottogruppi invarianti semplicemente transitivi, i quali trasformano in sè le singole generatrici, situate rispettivamente sull'una o sull'altra delle due serie rigate (immaginarie) Γ e Γ' appartenenti alla quadrica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$. Le trasformazioni Zf, che lasciano ferme le singole generatrici della serie Γ, operano su Γ' (e le $Z'f$ su Γ) come le proiettività binarie sopra la varietà semplicemente infinita, e ciò collima con quanto s'è poc'anzi avvertito: notiamo ancora che, non solo Z_if $(i = 1, 2, 3)$ e Z'_jf $(j = 1, 2, 3)$ sono sottogruppi invarianti, ma ben anco le singole trasformazioni Zf sono permutabili colle $Z'f$. Tradotto in linguaggio analitico, ciò significa che valgono le relazioni

$$(Z_iZ'_j)f = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{6}$$

le quali del resto si possono ovviamente verificare.

Ritornando al gruppo G_3 di T, donde abbiamo preso le mosse, siamo ora in grado di caratterizzarlo, dicendo che è simile a quel gruppo proiettivo dello spazio ordinario, il quale trasforma in sè (*) una serie rigata Γ appartenente alla sfera immaginaria $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$. Di qua si potrebbe ricavarne senza integrazione la espressione generale delle sue trasformazioni finite, poichè tali trasformazioni sono date, come si vede immediatamente, dalle omografie biassiali, che hanno per assi una coppia qualunque di generatrici coniugate di Γ'.

(*) In un esemplare del lavoro, già posseduto dall'A., si trova qui l'aggiunta autografa « le singole generatrici di ». [N. d. R.].