IX.

SUGLI INTEGRALI ALGEBRICI DELLE EQUAZIONI DINAMICHE

« Atti Acc. Torino », vol. XXI (1896), pp. 816-823.

1. – Alcuni anni or sono il signor KOENIGS ha dimostrato (¹) che, se un sistema materiale, soggetto a forze derivanti da un potenziale, ammette un integrale algebrico (rispetto alle velocità), esso ammette altresì almeno un integrale razionale.

La bella nota del signor KOENIGS mi ha suggerito alcune osservazioni assai semplici, che volli raccolte nel presente scritto, quantunque non abbiano carattere di novità, per potermene (dell'ultima in particolar modo) valere con maggior sicurezza in un prossimo lavoro sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.

Io mi propongo di mostrare in primo luogo:

a) che la proposizione del signor KOENIGS vale anche se le forze non provengono da un potenziale;

b) che, per un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo e non soggetto a forze, se esiste un integrale razionale indipendente dal tempo, esiste anche almeno un integrale omogeneo;

c) che, qualora un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo, ammetta, per un sistema di forze indipendenti dalle velocità, un integrale $A/B =$ cost., razionale rispetto alle velocità, il sistema materiale stesso, libero da forze, ammette come integrale $A'/B' =$ cost. (designando A' e B' il complesso dei termini di grado massimo nei polinomii A e B rispettivamente).

Fatta avvertenza che le osservazioni *b*) e *c*) discendono come caso particolare da un notevole teorema del sig. PAINLEVÉ (²), rilevo che

(¹) *Sur les intégrales algébriques des problèmes de la dynamique*, « Comptes Rendus », Agosto, 1886.

(²) *Sur les intégrales de la dynamique*, « Comptes Rendus », Maggio, 1892.

esse servono, insieme ad *a*), a riportare la classificazione dei problemi dinamici, dal punto di vista degli integrali algebrici, che essi posseggono, al solo caso, in cui non agiscono forze esterne e pel solo tipo degli integrali omogenei. Il campo di ricerca si trova così naturalmente ristretto; io prescinderò tuttavia anche dagli integrali fratti, limitandomi ad esporre, nell'ultimo paragrafo, sotto forma invariantiva, la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo e non soggetto a forze ammetta un integrale intero, omogeneo rispetto alle velocità. La forma di codesta condizione, che mi apparve assai importante per lo studio delle trasformazioni in meccanica, generalizza ovviamente quella assegnata dal prof. RICCI [3], affinchè esistano integrali primi omogenei delle linee geodetiche in una varietà a due dimensioni. Per il caso particolare degli integrali di primo grado, essa riproduce, salvo la diversità dei simboli, un risultato stabilito, collo stesso nostro procedimento, dal prof. CERRUTI [4] e da lui interpretato geometricamente in modo assai elegante.

2. – Sia T la forza viva di un sistema materiale S e si ponga in coordinate lagrangiane:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{rs}{}_1^n a_{rs} q_r' q_s' + \sum_r{}_1^n a_r q_r' + \tau ,$$

le a_{rs}, a_r e τ essendo in generale funzioni delle q e del tempo.

Le equazioni del moto, se si dica Q_h (che supporremo dipendere dalle coordinate e dal tempo in modo qualunque, e *razionalmente* dalle velocità) la componente della forza secondo la coordinata q_h, saranno:

$$\frac{d \dfrac{\partial T}{\partial q_h'}}{dt} = Q_h + \frac{\partial T}{\partial q_h} , \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

ovvero, con note riduzioni, ponendo al solito:

$$a_{rs\,h} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial a_{rh}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{hs}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_h} \right\}, \quad a^{(hk)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{hk}} ,$$

---

[3] *Sulla teoria delle linee geodetiche* ecc. « Atti del R. Ist. Veneto », 1894.

[4] *Sopra una proprietà degli integrali di un problema di meccanica, che sono lineari rispetto alle componenti della velocità,* « Rendiconti dei Lincei », 1895.

e:

$$a^k_{rs} = \sum_1^n {}_h\, a^{(hk)} a_{rs,h}\,, \qquad a^k_r = \sum_1^n {}_h\, a^{(hk)} \left\{ \frac{\partial a_{hr}}{\partial t} + \frac{\partial a_h}{\partial q_r} - \frac{\partial a_r}{\partial q_h} \right\},$$

$$Q^k = \sum_1^n {}_h\, a^{(hk)} Q_h\,, \qquad \tau^k = \sum_1^n {}_k\, a^{(hk)} \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h}{\partial t} \right\},$$

$$(1) \qquad q''_k = Q^k + \tau^k - \sum_1^n {}_{rs}\, a^k_{rs} q'_r q'_s - \sum_1^n {}_r\, a^k_r q'_r\,, \quad (k = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Se $F =$ cost. è un integrale primo delle (1), si avrà $dF/dt = 0$, cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial F}{\partial q'_k} q''_k \right\} = 0\,,$$

nella quale, sostituendo, al posto delle q''_k, le espressioni (1), siccome i valori iniziali delle q e delle q' sono affatto arbitrarii, il primo membro dovrà annullarsi identicamente. Ponendo pertanto:

$$(2) \qquad \Omega u = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial u}{\partial q'_k} \left(Q^k + \tau^k - \sum_1^n {}_{rs}\, a^k_{rs} q'_r q'_s - \sum_1^n {}_r\, a^k_r q'_r \right) \right\},$$

abbiamo che il primo membro F di ogni integrale delle (1), risguardato come funzione dei $2n + 1$ argomenti q_h, q'_k e t, soddisfa all'equazione a derivate parziali lineare ed omogenea $\Omega F = 0$.

Ritenuto ciò, si supponga F funzione algebrica delle q' e quindi definibile mediante un'equazione del tipo:

$$(3) \qquad s_0 F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_{m-1} F + s_m = 0\,,$$

a coefficienti razionali interi nelle q' stesse. La (3) si può sempre considerare irriducibile nel campo di razionalità delle q'. Applicando ad essa l'operazione Ω, siccome $\Omega F = 0$, verrà;

$$(4) \qquad \Omega s_0 \cdot F^m + \Omega s_1 \cdot F^{m-1} + \dots + \Omega s_{m-1} \cdot F + \Omega s_m = 0\,,$$

e, per l'irriducibilità della (3), siccome, avuto riguardo alla forma di Ω, per le ipotesi ammesse circa le Q_h, i coefficienti della (4) sono ancora razionali nelle q', seguirà necessariamente:

$$\frac{\Omega s_0}{s_0} = \frac{\Omega s_1}{s_1} = \dots = \frac{\Omega s_m}{s_m}\,,$$

e quindi, per esempio, $s_0 \cdot \Omega s_1 - s_1 \cdot \Omega s_0 = 0$, od anche:

$$\frac{s_0 \cdot \Omega s_1 - s_1 \cdot \Omega s_0}{s_0^2} = 0 ,$$

da cui apparisce che ciascun rapporto s_1/s_0, s_2/s_0, ..., s_m/s_0, ove non si riduca ad una pura costante, è integrale primo delle (1).

In generale questi integrali potranno non essere tutti distinti, nè si può escludere che alcuno sia di per sè una costante; uno almeno deve però contenere effettivamente le q' e sarà l'integrale razionale, di cui volevamo stabilire l'esistenza [5]. Se mai la (4) si riduce ad una identità, il sistema possiede almeno un integrale razionale *intero*.

3. – Quando i legami imposti al sistema materiale S sono indipendenti dal tempo e non agiscono forze, le equazioni (1) si riducono a:

$$(1') \qquad q_k'' = -\sum_{rs}{}_1^n a_{rs}^k q_r' q_s' , \qquad (k = 1, 2, ..., n);$$

la condizione perchè $F =$ cost. (con F indipendente dal tempo) sia un integrale, è data da:

$$(2') \qquad \Omega' F = \sum_k{}_1^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k} q_k' - \frac{\partial F}{\partial q_k'} \sum_{rs}{}_1^n a_{rs}^k q_r' q_s' \right\} = 0 .$$

Suppongasi che F sia razionale nelle q'; si potrà porre $F = A/B$, A e B essendo funzioni intere, di cui chiameremo A' e B' l'insieme dei termini di grado più elevato. Applicando ad F l'operatore Ω', avremo:

$$\Omega' F = \frac{B \cdot \Omega' A - A \cdot \Omega' B}{B^2} .$$

Si vede immediatamente che la Ω', applicata ad un polinomio omogeneo nelle q', dà per risultato ancora un polinomio omogeneo col grado aumentato di una unità. Perciò nel prodotto $B \cdot \Omega' A$, i termini di grado più elevato si avranno moltiplicando B' per $\Omega' A'$ e analogamente $A' \cdot \Omega' B'$ sarà il gruppo di termini, aventi lo stesso massimo grado in

[5] Come già il sig. KOENIGS, pel caso di forze provenienti da un potenziale, notiamo che, anche nel caso generale, l'esistenza di una integrale F, *algebrico* rispetto ad alcune soltanto delle q' trae necessariamente l'esistenza di almeno un integrale *razionale* rispetto alle stesse quantità. La dimostrazione sarebbe indentica a quella sopra accennata.

$A \cdot \Omega' B$, talchè l'identico annullarsi della differenza $B \cdot \Omega' A - A \cdot \Omega' B$ esigerà che sia:

$$B' \cdot \Omega' A' - A' \cdot \Omega' B' = 0 ,$$

cioè $A'/B' =$ cost. è un integrale omogeneo delle equazioni (1').

4. – Si supponga che un sistema S a legami indipendenti dal tempo ammetta, per date forze Q_h indipendenti dalle velocità, un integrale razionale (indipendente dal tempo) $A/B =$ cost. La condizione (2) diviene nel caso presente

$$(2'') \qquad \Omega'' F = \sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial F}{\partial q_k'} \left(Q^k - \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}^k q_r' q_s' \right) \right\} = \Omega' F + \sum_1^n {}_k \frac{\partial F}{\partial q_k'} Q^k = 0 ,$$

ed avremo $\Omega''(A/B) = 0$.

Se, come poc'anzi, si designano con A' e B' i termini di grado più elevato in A e in B, si riconosce senza difficoltà che, nella differenza $B \cdot \Omega'' A - A \cdot \Omega'' B$, l'insieme dei termini di grado massimo è dato da $B' \cdot \Omega' A' - A' \cdot \Omega' B'$; dunque:

$$B' \cdot \Omega' A' - A' \cdot \Omega' B' = 0 ,$$

il che dimostra come da ogni integrale *razionale* $A/B =$ cost., relativo a un sistema S e a forze Q_h comunque date, purchè indipendenti dalle velocità, si deduce un integrale *razionale* ed *omogeneo* per lo stesso sistema libero da forze.

Come caso particolare, supponendo nulle le Q_h, si ritrova il contenuto del precedente paragrafo.

5. – Proponiamoci da ultimo di assegnare esplicitamente le condizioni, affinchè un polinomio del tipo:

$$(5) \qquad A = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m} A_{r_1 r_2 \dots r_m} q_{r_1}' q_{r_2}' \dots q_{r_m}' ,$$

sia integrale primo per un sistema S a legami indipendenti dal tempo e non soggetto a forze. Essendo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} q_r' q_s'$$

la forza viva del sistema, pongasi:

$$ds^2 = 2T\, dt^2 = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dq_r\, dq_s$$

e si consideri la varietà φ a n dimensioni, di cui ds^2 rappresenta il quadrato dell'elemento lineare.

Ricordo che, dato un sistema di funzioni (delle variabili indipendenti q_i) d'ordine m, cioè del tipo $A_{r_1 r_2 \dots r_m}$ $(r_1, r_2, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n)$, simmetrico o no rispetto ai suoi m indici, secondo una denominazione introdotta nella scienza dal prof. RICCI, il sistema d'ordine $m+1$, definito da:

$$(6) \qquad A_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} = \frac{\partial A_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial q_{r_{m+1}}} - \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_r\, a^r_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 \dots r_{l-1} r\, r_{l+1} \dots r_m},$$

chiamasi *derivato covariante* del proposto rispetto alla forma fondamentale φ.

La proprietà essenziale delle derivazioni covarianti risiede nel loro carattere invariantivo, per cui, ogniqualvolta, passando dalle variabili q a certe nuove variabili (q), il sistema (A) trasformato delle $A_{r_1 r_2 \dots r_m}$, si esprima secondo la legge:

$$(7) \qquad (A_{r_1 r_2 \dots r_m}) = \sum_1^n{}_{s_1 s_2 \dots s_m} A_{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{\partial q_{s_1}}{\partial (q_{r_1})} \frac{\partial q_{s_2}}{\partial (q_{r_2})} \cdots \frac{\partial q_{s_m}}{\partial (q_{r_m})},$$

sia cioè *covariante* al primitivo, lo stesso accade dei rispettivi derivati. In particolare, siccome evidentemente i coefficienti di un integrale primo costituiscono un sistema covariante, sarà pure covariante il sistema derivato.

Ciò posto, se $A = \text{cost.}$ è integrale delle $(1')$, la $\Omega' A = 0$, scrivendo r_{m+1} al posto di k, porge nel caso presente:

$$\sum_1^n{}_{r_1 \dots r_m r_{m+1}} \frac{\partial A_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial q_{r_{m+1}}} q'_{r_1} q'_{r_2} \cdots q'_{r_{m+1}}$$

$$- \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m r_{m+1}} A_{r_1 \dots r_{l-1} r_{m+1} r_{l+1} \dots r_m} q'_{r_1} \cdots q'_{r_{l-1}} q'_{r_{l+1}} \cdots q'_{r_m} \sum_1^n{}_{rs} a^{r_{m+1}}_{rs} q'_r q'_s = 0,$$

od anche, ove si scambino nel secondo termine gli indici r ed r_{m+1}, si scriva r_l al posto di s e poi si riuniscano le due sommatorie:

$$\sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} q'_{r_1} q'_{r_2} \cdots q'_{r_m} q'_{r_{m+1}} \left\{ \frac{\partial A_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial q_{r_{m+1}}} - \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_r\, a^r_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 \dots r_{l-1} r\, r_{l+1} \dots r_m} \right\} = 0.$$

In virtù delle (6), si ha:

$$\sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} q'_{r_1} q'_{r_2} \cdots q'_{r_m} q'_{r_{m+1}} = 0,$$

la quale, avuto riguardo alla simmetria del sistema $A_{r_1 r_2 \dots r_m}$, che si conserva pei primi m indici delle $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$, esige che il sistema $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$ sia, come si dice, *emisimmetrico*, che cioè sieno nulle le somme degli elementi, che si ottengono da ogni generico coefficiente $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$, eseguendo sopra i suoi indici $m+1$ potenze consecutive della sostituzione circolare $(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})$.

Concludiamo pertanto:

Affinchè $\sum_{r_1 r_2 \dots r_m} A_{r_1 r_2 \dots r_m} q'_{r_1} q'_{r_2} \dots q'_{r_m} = \text{cost.}$ *sia integrale primo per un sistema S, a legami indipendenti dal tempo, su cui non agiscono forze, o, ciò che è lo stesso, per le equazioni delle linee geodetiche in una varietà φ di elemento lineare $ds = \sqrt{2T\,dt^2}$, è necessario e basta che il sistema $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$ sia emisimmetrico.*

Esprimendo così le condizioni per l'esistenza di un integrale omogeneo di grado m, si mette in evidenza colla massima semplicità il loro carattere invariantivo di fronte ad ogni possibile trasformazione di coordinate.