V.

I GRUPPI DI OPERAZIONI FUNZIONALI E L' INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Nota I

« Rend. Ist. Lomb. di Sc., lett. ed arti », S. II, vol. XXVIII (1895)

pp. 529-544.

In una nota [1], che io ebbi or non è molto l'onore di presentare a codesta illustre Accademia, accennai come dal concetto di trasformazione si sia naturalmente condotti a quello di operazione funzionale, immaginando che il corpo degli enti, su cui si opera, invece che una varietà di punti, sia una varietà di funzioni. Dissi anche come questa concezione geniale, dovuta al prof. Pincherle, venne svolgendosi per opera sua sotto aspetti molteplici e via via più generali, talchè forse è lecito sperare che ne sorgerà tra breve una completa dottrina.

Di fronte al delinearsi di così estesa e importante classe di trasformazioni sorgeva spontaneo il problema gruppale. Sophus Lie in un'opera [2] divenuta ormai classica, riducendo a sistema ciò, che spetta alle trasformazioni puntuali (e di contatto) ha tracciata una via dritta e sicura; ma, per questa nuova classe di trasformazioni, cioè per le operazioni funzionali, le teorie dell'illustre autore non si adattano senz'altro; alcune analogie si mantengono, altre vengono a mancare, molti fatti di vantaggiosa applicazione scompaiono, qualche relazione non priva di interesse si presenta invece per la prima volta. In ogni modo il campo di indagine non sembra infecondo e, malgrado l'esigua misura della mia iniziativa, mi permetto di esprimere il desiderio che altri in breve vi porti ben più valido impulso.

Nella nota sopra menzionata ho considerato un caso di gruppi con-

---

(1) *Sui gruppi di operazioni funzionali*, « Rend. del r. Istit. Lomb. », ser. II, vol. XVIII. [In questo vol.: III, p. 101–111].

(2) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Band 1, 2, 3. Leipzig, Teubner, 1888, 1890, 1890.

www.rcin.org.pl

tinui molto particolare, il cui scarso interesse vorrei apparisse giustificato dalla questione analitica (relativa alle equazioni differenziali ordinarie), che esso mi porse occasione di risolvere.

Nel presente lavoro io mi riferisco ad una classe assai più vasta e notevole di operazioni funzionali, a quelle cioè che vengono rappresentate da integrali definiti. Ciò, che appartiene al concetto generale di operazioni siffatte, fu già svolto ampiamente (³) dal prof. PINCHERLE, il quale accennò come esempio ad un insieme particolare di operazioni invertibili colla derivazione. Queste operazioni costituiscono un gruppo e stanno, come mostrò lo stesso autore, in stretta relazione coi polinomi del sig. APPELL (⁴), di guisa che il gruppo da esse costituito si può per brevità chiamare il gruppo di APPELL. Per quanto è a mia cognizione, il gruppo di APPELL è l'unico, che si sia incontrato nel campo delle operazioni funzionali ed è quasi esclusivamente per le operazioni di questo gruppo che si sono potuti studiare dei problemi concreti (inversione di integrali definiti, sviluppo di una funzione secondo un sistema di funzioni date, ecc.).

La lettura della citata memoria, in ordine ai concetti generali enunciati da principio, mi suggerì di intraprendere la ricerca generale dei gruppi continui di operazioni funzionali rappresentate da integrali defignìti; ed è appunto l'esposizione di questa ricerca che forma l'oggetto del presente scritto.

In esso si contiene:

1) La determinazione (§§ 2-5) di tutti i gruppi continui (infiniti, veggasi § 6) di operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti.

2) L'enunciato di alcune proprietà generali (§§ 7-8), che conducono facilmente ad estendere ai gruppi funzionali la nozione di invariante.

3) Qualche applicazione dei concetti gruppali all'inversione degli integrali definiti. Si mostra cioè come, posto

$$u(x) = \int_l a(x, y)v(y)\,dy\,,$$

sia possibile, almeno formalmente, esprimere $v(y)$ per mezzo di $u(x)$, ogni qualvolta la funzione $a(x, y)$ soddisfaccia ad equazioni a derivate parziali di tipo determinato.

Accadde più volte ai matematici di dover invertire degli integrali definiti e per ogni singolo caso fu loro mestieri immaginare procedimenti particolari, spesso assai ingegnosi, ma il più delle volte oltre modo com-

(³) *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies*, « Acta Math. », vol. 10, 1887.

(⁴) *Sur une classe de polynomes*, « Ann. sc. de l'École normale supérieure », 2ᵉ s., t. IX, 1880.

www.rcin.org.pl

plicati; nel solo caso del gruppo di APPELL fu assegnato (5) un criterio generale di inversione, il quale non conduce tuttavia ad esprimere il risultato in forma esplicita.

Mi sia lecito pertanto di richiamare l'attenzione del lettore sull'ultima parte del lavoro, dove si reca qualche contributo a siffatto problema, coordinandone la soluzione ad un principio generale e uniforme.

1. – Se ad ogni funzione analitica $v(y)$ della variabile complessa y (o almeno a quelle di una certa classe) si può far corrispondere univocamente un'altra funzione analitica $u(x)$, la legge di corrispondenza si dirà l'*operazione funzionale*, che, applicata ad una funzione $v(y)$ della data classe, la trasforma nella corrispondente $u(x)$.

Le operazioni funzionali, secondo la notazione introdotta dal prof. PINCHERLE, si rappresentano con lettere maiuscole, per esempio con A; la scrittura:

$$u(x) = Av(y)\,,$$

esprime che l'operazione A trasforma $v(y)$ in $u(x)$.

I campi di validità delle funzioni $v(y)$, $u(x)$ nei piani rispettivi delle due variabili y, x saranno in generale diversi.

Tra le operazioni funzionali sono particolarmente notevoli quelle, che provengono dall'integrazione definita,

Sia l una linea del piano y, $v(y)$ una funzione regolare lungo l e $a(x, y)$ una funzione delle due variabili x ed y regolare essa pure rispetto ad y lungo l per tutti i punti x di un certo campo C; l'integrale

$$\int_l a(x, y)v(y)\,dy\,.$$

rappresenta, come è manifesto, una funzione $u(x)$ della variabile x regolare nel campo C. Ponendo adunque:

$$u(x) = \int_l a(x, y)v(y)\,dy = Av(y)\,,$$

si ha nella $Av(y)$ una operazione funzionale nel senso dichiarato innanzi. La funzione $a(x, y)$ si dice *caratteristica*.

Accanto ad ogni operazione:

$$Av(y) = \int_l a(x, y)v(y)\,dy\,,$$

(5) PINCHERLE, loco citato.

www.rcin.org.pl

giova considerare quella:

$$A'v(y) = \int_l a(x, y)v(x)\,dx\,,$$

che si ottiene scambiando tra loro nella funzione caratteristica l'ufficio delle due variabili x ed y. Le operazioni A e A' si diranno *associate.*

Di queste operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti dovremo di continuo occuparci nei §§ seguenti.

2. – Assunta ad arbitrio una forma differenziale lineare del tipo:

$$(1) \qquad \Delta v \equiv p_0(y)v^{(n)}(y) + p_1(y)v^{(n-1)}(y) + \dots + p_n(y)v(y)\,,$$

dove i coefficienti $p_0(y)$, $p_1(y), \dots$ sono funzioni analitiche di y uniformi e regolari in un certo campo T_y, noi ci proponiamo di assegnare una categoria di operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti, che sieno permutabili colla Δ.

Noi vogliamo cioè caratterizzare quelle operazioni

$$Av(x) = \int_l a(x, y)v(y)\,dy\,,$$

tali che, per ogni funzione $v(y)$ regolare lungo la linea l di integrazione, sia:

$$(2) \qquad A\Delta v(y) = \Delta A v(y)\,.$$

Colla equazione (2) si viene implicitamente ad ammettere che sia applicabile l'operazione Δ alle funzioni $Av(y)$ e quindi, portando Δ sotto il segno, alle funzioni incognite $a(x, y)$; ne segue:

a) corrispondentemente a tutti i punti y situati lungo la linea di integrazione l, ogni $a(x, y)$ deve mantenersi regolare per qualche punto (e quindi area) compresa in T_x.

Quanto alla linea l di integrazione, pur lasciandola affatto indeterminata, noi supporremo:

b) che sia tutta interna a T_y;

c) che sia chiusa, ovvero tale che nei suoi estremi si annullino $a(x, y)$ e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ incluso.

Sotto queste ipotesi si può stabiiire molto facilmente a quali relazioni deve soddisfare una funzione caratteristica $a(x, y)$ perchè sussista la (2).

www.rcin.org.pl

Infatti, la (2) potendo essere scritta:

$$A \sum_0^n {}_r\, p_r(y) \frac{d^{n-r}v}{dy^{n-r}} = \sum_0^n {}_r\, p_r(x) \frac{d^{n-r}Av(y)}{dx^{n-r}},$$

ove si ponga per A la sua espressione effettiva e si derivi nel secondo membro sotto il segno, verrà:

$$\sum_0^n {}_r \int_l a(x, y) p_r(y) \frac{d^{n-r}v(y)}{dy^{n-r}} dy = \sum_0^n {}_r \int_l p_r(x) \frac{\partial^{n-r}a(x, y)}{\partial x^{n-r}} v(y)\, dy .$$

Integrando successivamente per parti e osservando che, in virtù dell'ipotesi c), i termini ai limiti svaniscono in ogni caso, si deduce:

$$\int_l \sum_0^n {}_r \left\{ (-1)^{n-r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial y^{n-r}} \big(a(x, y) p_r(y)\big) - p_r(x) \frac{\partial^{n-r}a(x, y)}{\partial y^{n-r}} \right\} v(y)\, dy = 0 ,$$

la quale, dovendo valere qualunque sia la funzione $v(y)$, ci dà:

$$\sum_0^n {}_r \left\{ p_r(x) \frac{\partial^{n-r}a(x, y)}{\partial x^{n-r}} - (-1)^{n-r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial y^{n-r}} \left[a(x, y) p_r(y)\right] \right\} = 0 , \tag{3}$$

che è quindi insieme ad a) condizione necessaria per l'invertibilità di A con Δ.

Reciprocamente, se la (3) è soddisfatta, se $v(y)$ si mantiene regolare lungo la linea l e se, per tutti i valori di y situati in l, la funzione $a(x, y)$ è regolare almeno in qualche punto x di T_x, risalendo si ritrova la (2); quindi possiamo enunciare il teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè, per ogni funzione $v(y)$ « regolare lungo una linea l del tipo b), c), valga la (2), si è che la fun- « zione caratteristica $a(x, y)$ soddisfaccia all'equazione lineare a derivate « parziali (3) e appartenga alla categoria a) ».

3. – Per le equazioni del tipo (3) si possono determinare quanti si vogliono integrali particolari nel modo seguente.

Detta t una costante, si considerino le due equazioni differenziali ordinarie:

$$(\Delta + t)u(x) \equiv \sum_0^n {}_r\, p_r(x) \frac{d^{n-r}u(x)}{dx^{n-r}} + tu(x) = 0 ,$$

$$(\Delta' + t)v(y) \equiv \sum_0^n {}_r (-1)^{n-r} \frac{d^{n-r}[p_r(y)v(y)]}{dy^{n-r}} + tv(y) = 0 ,$$

www.rcin.org.pl

di cui la seconda, astrazion fatta dalla diversità dei simboli, è la aggiunta [6] della prima e reciprocamente.

Se X_t, Y'_t rappresentano due qualunque integrali di queste equazioni, il prodotto $CX_tY'_t$ (con C costante arbitraria) è un integrale particolare $a(x, y)$ della (3). Essa può infatti scriversi, aggiungendo e togliendo $ta(x, y)$:

$$(\Delta + t)a(x, y) - (\Delta' + t)a(x, y) = 0 ,$$

ed è manifestamente soddisfatta per $a(x, y) = CX_tY'_t$. Facendo variare t in modo arbitrario si ottengono altrettanti integrali particolari.

Accenno semplicemente, perchè la dimostrazione esigerebbe qualche considerazione funzionale delicata, su cui non reputo opportuno insistere, in qual modo si perviene all'integrale generale delle equazioni (3) [7].

Sia $X_t^{(1)}$, $X_t^{(2)} \ldots$, $X_t^{(n)}$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione: $(\Delta + t)u(x) = 0$, $Y_t'^{(1)}$, $Y_t'^{(2)}, \ldots$, $Y_t'^{(n)}$ un sistema fondamentale dell'equazione $(\Delta' + t)v(y) = 0$, e si rappresentino con $\psi_1(t)$, $\psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ n funzioni arbitrarie della variabile t, con l_1, $l_2, \ldots, l_n$, n linee arbitrarie del piano complesso t. Il cercato integrale generale $a(x, y)$ si può rappresentare sotto la forma:

$$a(x, y) = \int_{l_1} X_t^{(1)} Y_t'^{(1)} \psi_1(t)\, dt + \int_{l_2} X_t^{(2)} Y_t^{(2)} \psi_2(t)\, dt + \ldots + \int_{l_n} X_t^{(n)} Y_t'^{(n)} \psi_n(t)\, dt .$$

Per le equazioni (3) del primo ordine, che dovremo considerare più particolarmente (§§ 9-10), si può col solito metodo assegnare in forma esplicita l'integrale generale e si trova:

$$a = \frac{1}{p_0(y)}\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy}\, \Phi\left(\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}\right), \tag{3'}$$

x_0, y_0 essendo costanti e Φ simbolo di funzione arbitraria.

Come caso particolare, se si fa $x_0 = y_0$,

$$\Phi\left(\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}\right) = \frac{1}{2\pi i \left(1 - e^{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}}\right)},$$

---

(6) LAGRANGE, *Oeuvres*, Tome premier, pag. 472.

(7) Il sig. BOREL («Comptes Rendus», 25 marzo 1895) ha enunciato senza dimostrazione un teorema generale relativo alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine qualunque. In

www.rcin.org.pl

si ha dalla (3') una funzione:

$$j(x, y) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy} \frac{1}{2\pi i \left(1 - e^{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}}\right)},$$

che per $x = y$ è infinita di prim'ordine col residuo $1/2\pi i$. Se dunque si pone

$$u(x) = \int_l j(x, y) v(y)\, dy\,,$$

per una linea chiusa l convenientemente scelta e per i punti interni ad essa, in virtù del teorema di CAUCHY: $u(x) = v(x)$; in altri termini $j(x, y)$ dà luogo all'operazione identica.

4. – Sia $a_2(z, y)$ una funzione, che, astrazione fatta dallo scambio dei simboli, verifichi l'equazione (3).

Ad essa corrisponde l'operazione funzionale:

$$A_2 v(y) = \int_l a_2(z, y) v(y)\, dy\,,$$

generatrice di funzioni $A_2 v(y) = w(z)$ della variabile complessa z. Queste funzioni $w(z)$ avranno un certo campo di validità e, in causa della a), una porzione almeno T'_z di questo campo apparterrà anche a T_z. Ne viene che, assumendo in T'_z una linea λ del tipo c) e un integrale $a_1(x, z)$ della (3), che, rispetto ad l_1, soddisfi alla a), si potrà porre:

$$u(x) = \int_\lambda a_1(x, z) w(z)\, dz = A_1(w(z) = A_1 A_2 v(y) =$$

$$= \int_l \left\{ \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y)\, dz \right\} v(y)\, dy = Av(y)\,,$$

cioè a dire l'operazione $Av(y) = A_1 A_2 v(y)$ ha un significato effettivo;

---

virtù di questo teorema, la determinazione dell'integrale generale si riduce a quella di un integrale completo con $n + 2$ costanti essenziali (n essendo il numero delle variabili indipendenti). Il metodo del sig. BOREL si potrebbe dunque applicare senz'altro alle nostre equazioni gruppali.

www.rcin.org.pl

conformemente alla definizione generale, essa si chiama prodotto delle due operazioni A_1, A_2 prese nell'ordine scritto.

Per A_1, A_2 valgono le relazioni:

$$A_2 \Delta v(y) = \Delta A_2 v(y)\,, \qquad A_1 \Delta w(z) = \Delta A_1 w(z)\ ;$$

scrivendo nella seconda $A_2 v(y)$ al posto di $w(z)$ e combinandola colla precedente, si trae:

$$A_1 A_2 \Delta v(y) = \Delta A_1 A_2 v(y)\,, \tag{4}$$

la quale ci dice che *le operazioni funzionali* A *permutabili con* Δ *formano un gruppo.*

Avuto riguardo al teorema del § 2, ricaviamo dalla (4) stessa che la funzione:

$$a(x, z) = \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y) dz$$

deve soddisfare all'equazione a derivate parziali (3), onde la natura gruppale delle operazioni A può essere riconosciuta a priori nelle funzioni caratteristiche; infatti l'equazione a derivate parziali (3), che le definisce è tale che il prodotto (nel senso funzionale)

$$a(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y) dz$$

di due qualsiasi dei suoi integrali $a_1(x, z)$, $a_2(z, y)$ è ancora un integrale della stessa equazione.

In generale è manifesto che una data classe di operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti si dovrà dir gruppo allora e solo allora che la classe stessa comprende i prodotti di due qualunque tra le operazioni, che ad essa appartengono.

Se quindi noi prendiamo a considerare quelle classi di operazioni, le cui funzioni caratteristiche vengono definite da sistemi di equazioni differenziali, dovremo avere che il prodotto (nel senso funzionale) di due qualsiasi integrali del sistema è ancora un nuovo integrale.

In base a questa definizione, possiamo proporci la ricerca di tutti i gruppi di operazioni funzionali, *che vengono definiti da una equazione d'ordine finito n.*

Noi vedremo nel seguente § che, prescindendo da una categoria molto particolare, studiata già dal prof. PINCHERLE, non vi hanno altre equa-

www.rcin.org.pl

zioni gruppali all'infuori delle (3); cioè a dire i soli gruppi di operazioni funzionali sono quelli permutabili con una forma lineare Δ.

5. – Sia:

$$(\Omega) \qquad \Omega(a; x, y) = 0$$

una equazione a derivate parziali d'ordine n rispetto alla funzione a e si supponga che, per due qualunque integrali $a_1(x, z)$, $a_2(z, y)$ delle equazioni: $\Omega(a_1; x, z) = 0$, $\Omega(a_2; z, y) = 0$ e per tutte le linee λ di una certa categoria, abbia effettivo significato l'integrale:

$$\int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y)\, dz ,$$

e rappresenti, almeno per qualche coppia x, y un integrale $a(x, y)$ dell'equazione (Ω). Dico che $\Omega(a; x, y) = 0$ è certamente della forma (3).

Nella relazione:

$$a(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y)\, dz ,$$

si supponga di attribuire ad $a_2(z, y)$ un incremento infinitesimo $\alpha_2(z, y)$ compatibile colla condizione $\Omega(a_1; z, y) = 0$, cioè, se Ω si suppone dell'ordine n, tale da soddisfare all'equazione lineare:

$$(5) \qquad \sum_0^n{}_r \sum_0^r{}_s \mu_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, y)}{\partial z^{r-s} \partial y^s} = 0 ,$$

con

$$\mu_{rs}(z, y) = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial^r a_2}{\partial z^{r-s} \partial y^s}} \right\}_{a_2 = a_2(z, y)} ;$$

$a(x, y)$ subirà in corrispondenza la variazione:

$$\alpha(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z) \alpha_2(z, y)\, dz ,$$

che sarà, per le ipotesi ammesse, conciliabile con $\Omega(a; x, y) = 0$, cioè integrale dell'equazione lineare:

$$(6) \qquad \sum_0^u{}_r \sum_0^r{}_s \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^r \alpha(x, y)}{\partial x^{r-s} \partial y^s} = 0,$$

www.rcin.org.pl

con

$$\nu_{rs}(x, y) = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial^r a}{\partial x^{r-s} \partial y^s}} \right\}_{a = a(x, y)} ;$$

ponendovi per $\alpha(x, y)$ il suo valore, si ha:

$$\int_\lambda \left\{ \sum_0^n{}_r \sum_0^r{}_s \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \right\} dz = 0 .$$

Invertendo le due sommatorie e scrivendo a parte il termine, che contiene $\partial^n \alpha(z, y)/\partial y^n$, si trae:

$$(7) \qquad \int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1} \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} + \frac{\partial^n \alpha_2(z, y)}{\partial y^n} \nu_{nn}(x, y) a_1(x, z) \right\} dz = 0 .$$

Se si suppone $\nu_{nn}(x, y) \neq 0$, si potrà dividere la (7) per $\nu_{nn}(x, y)$ e scrivendo per brevità:

$$\nu'_{rs}(x, y) = \frac{\nu_{rs}(x, y)}{\nu_{nn}(x, y)} ,$$

avremo:

$$(7') \qquad \int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} + \frac{\partial^n \alpha_2(x, y)}{\partial y^n} a_1(x, z) \right\} dz = 0 .$$

Convien ora tener conto dell'equazione (5), distinguendo però, anche rispetto ad essa, i due casi $\mu_{nn}(z, y) = 0$ e $\mu_{nn}(z, y) \neq 0$. Riferendoci per ora al secondo, che, come si vedrà, è l'unico, il quale conduca a un risultato positivo, potremo manifestamente assumere la (5) sotto la forma:

$$(5') \qquad \left| \begin{aligned} & \frac{\partial^n \alpha_2(z, y)}{\partial y^n} = - \sum_0^{n-1}{}_s \sum_s^n{}_r \mu'_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, n)}{\partial z^{r-s} \partial y^s} \\ & \left(\mu'_{rs}(z, y) = \frac{\mu_{rs}(z, y)}{\mu_{nn}(z, y)} \right), \end{aligned} \right.$$

e sostituire nella (7') questo valore di $\partial^n \alpha_2(z, y)/\partial y^n$.

www.rcin.org.pl

Colla successiva integrazione per parti, tenendo conto che al solito i termini ai limiti son nulli, ricaveremo:

$$\int_{\lambda} dz \sum_{0}^{n-1}{}_{s} \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_{s}^{n}{}_{r} \left\{ \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right.$$
$$\left. - (-1)^{r-s} \frac{\partial^{r-s}[\mu'_{rs}(z, y) a_1(x, z)]}{\partial z^{r-s}} \right\} = 0,$$

la quale relazione dovrà essere soddisfatta, *qualunque sia l'integrale* $\alpha_2(z, y)$ *della* (5').

Ora la (5') stessa è un'equazione a derivate parziali d'ordine n, quindi, per un valore generico y, le n quantità

$$\frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s}, \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1)$$

si possono risguardare come funzioni *affatto arbitrarie* della z, talchè l'eguaglianza precedente, per essere soddisfatta, esige l'identico annullarsi dei singoli coefficienti e si scinde quindi nelle:

$$(8) \qquad \sum_{s}^{n}{}_{r} \left\{ \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x. z)}{\partial x^{r-s}} - (-1)^{r-s} \frac{\partial^{r-s}[\mu'_{rs}(z, y) a_1(x, z)]}{\partial z^{r-s}} \right\} = 0,$$

$$(s = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Le (8) devono valere per ogni funzione $a_1(x, z)$, che sia integrale della

$$\Omega(a_1; x, z) = 0,$$

quindi: o sono pure identità, ovvero coincidono colla (Ω) stessa.

Se le (8) sono tutte relazioni identiche, dovranno annullarsi le singole ν'_{rs}, μ'_{rs}, cioè:

$$\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial^r a_2}{\partial z^{r-s} \partial y^s}} \right\}_{a_2 = a_2(z, y)} = 0, \qquad (r = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

dalle quali (siccome $a_2(z, y)$ si immagina un integrale qualunque, e la (Ω) stessa, per essere $\mu_{nn}(z, y) \gtrless 0$, è risolubile rispetto a $\partial^n a_2 / \partial y^n$) si deduce

www.rcin.org.pl

senza difficoltà che (Ω) deve in tal caso necessariamente ridursi a:

$$\frac{\partial^n a_1(z, y)}{\partial y^n} = 0 .$$

Queste equazioni rientrano in un tipo, che ritroveremo, esaminando l'ipotesi finora esclusa $\nu_{nn}(x, y) = 0$.

Supponendo invece che non tutte le $\mu'_{rs}(z, y)$, $\nu'_{rs}(x, y)$ siano identicamente nulle, vi sarà, a partire da 0, un primo valore σ di s, per cui qualcuna delle $\mu'_{r\sigma}$, $\nu'_{r\sigma}$ $(r = 0, 1, \dots, n)$ riescirà $\neq 0$; la equazione (8) corrispondente a questo valore σ dovrà coincidere colla:

$$\Omega(a_1; x, z) = 0 ,$$

e, siccome si è supposto che $\Omega(a_1; x, z)$ sia dell'ordine n, così bisogna ammettere $\sigma = 0$, da cui discende che ad $\Omega(a_1; x, z) = 0$ si deve poter attribuire la forma:

$$(8') \qquad \sum_0^n {}_r \left\{ \nu'_{r0}(x, y) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} - (-1)^{r-s} \frac{\partial^r [\mu'_{r0}(z, y) a_1(x, z)]}{\partial z^r} \right\} = 0 ,$$

cioè l'equazione $\Omega(a_1; x, z) = 0$ e quindi le corrispondenti:

$$\Omega(a; x, y) = 0 , \qquad \Omega(a_2; z, y) = 0$$

sono lineari. Ne viene che le funzioni $\nu'_{rs}(x, y)$, salvo lo scambio del simbolo x in z, debbono coincidere colle $\mu'_{rs}(z, y)$; di più la (8'), in causa della sua coincidenza con $\Omega(a_1; x, z) = 0$, non può contenere y che apparentemente. Combinando queste due osservazioni, si riconosce che:

$$\nu'_{r0}(x, y) = \psi(y) p_{n-r}(x) , \qquad \mu'_{r0}(z, y) = \psi(y) p_{n-r}(z) \qquad (r = 0, 1, \dots, n),$$

onde la (8') cioè (Ω) assume l'aspetto definitivo:

$$\sum_0^n {}_r \left\{ p_{n-r}(x) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} - (-1)^r \frac{\partial^r [p_{n-r}(z) a_1(x, z)]}{\beta z^r} \right\} = 0 ,$$

di cui è manifesta la coincidenza colle equazioni (3).

Questo risultato ci dispensa dall'indagare se, per tali (Ω), le ulteriori condizioni (8) riescono soddisfatte, poichè noi sappiamo già che le equazioni (3) sono gruppali; del resto si può, volendo, verificarlo direttamente.

www.rcin.org.pl

Per esaurire la ricerca delle possibili equazioni gruppali, ci restano da considerare i due casi finora esclusi

$$\nu_{nn}(x, y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu_{nn}(z, y) = 0\,,$$

oppure addirittura $\nu_{nn}(x, y) = 0$.

Il primo è presto discusso. Infatti corrispondentemente ad esso sussisterà ancora la:

$$(7')\qquad \int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \left(\nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right) + \frac{\partial^n \alpha_2(z, y)}{\partial y^n}\, a_1(x, z) \right\} dz = 0\,,$$

per tutte le funzioni $\alpha_2(z, y)$, che verificano l'equazione (5), cioè nel caso nostro, per essere $\mu_{nn}(x, y) = 0$, la:

$$(5'')\qquad \sum_0^{n-1}{}_s \sum_s^n{}_r\, \mu_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, y)}{\partial z^{r-s} \partial y^s} = 0\,.$$

Se quindi alla funzione sotto il segno nella (7') si aggiunge la (5'') moltiplicata per una quantità arbitraria k, dovrà essere:

$$\int \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r\, \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right.$$
$$\left. + k \sum_0^{n-1}{}_s \sum_s^n{}_r\, \mu_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, y)}{\partial z^{r-s} \partial y^s} + \frac{\partial^n \alpha_2(x, y)}{\partial y^n}\, a_1(x, z) \right\} dz \equiv 0\,.$$

Questo equivale a dire, che eseguite le solite integrazioni per parti, i singoli coefficienti delle $\partial^s \alpha_2(z, y)/\partial y^s$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ saranno nulli identicamente; ora il coefficiente di $\partial^n \alpha_2(z, y)/\partial y^n$ si riduce al solo termine $a_1(x, z)$, onde dovrebb'essere $a_1(x, z) = 0$, il che è assurdo.

L'ultima delle possibili ipotesi $\nu_{nn}(x, y) = 0$ conduce ad avere per la (7) la forma:

$$\int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r\, \nu_{rs}(x, y)\, \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right\} dz = 0\,,$$

www.rcin.org.pl

da cui, come dianzi:

$$\sum_{s}^{n} {}_r \, \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} \alpha_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1) . \tag{9}$$

Le (9) o saranno identità, oppure coincideranno colla $\Omega(a_1; x, z) = 0$.

Col medesimo ragionamento usato precedentemente si riconosce che $\Omega(a_1; x, z)$ non può differire da:

$$\sum_{0}^{n} {}_r \, \nu_{r0}(x, y) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} = 0 ,$$

la quale, non dovendo contenere y, sarà della forma:

$$\sum_{0}^{n} {}_r \, p_{n-r}(x) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} = 0 . \tag{9'}$$

È manifesto senz'altro che le successive equazioni (9) riescono verificate e quindi che le operazioni funzionali, di cui le funzioni caratteristiche soddisfanno a equazioni del tipo (9′), formano un gruppo.

Del resto la relazione fondamentale:

$$a(x, y) = \int_{\lambda} a_1(x, z) a_2(z, y) \, dz ,$$

mostra immediatamente che, insieme con $a_1(x, z)$, anche $a(x, y)$ è integrale della (9′).

Le operazioni funzionali, le cui funzioni caratteristiche soddisfanno ad equazioni differenziali (9′) contenenti una sola variabile sono state già considerate dal prof. PINCHERLE, che fece vedere [8] in qual modo si riesca ad invertirle. Prescindendo da questo caso particolare, possiamo concludere:

Tutte le equazioni gruppali d'ordine finito appartengono al tipo (3).

6. – È bene osservare che colla ricerca precedente risultano determinati tutti i gruppi di operazioni rappresentabili con integrali definiti e tali che le funzioni caratteristiche $a(x, y)$ si presentino come integrali *di una sola equazione a derivate parziali.*

Se invece di una equazione sola si volesse considerare un sistema

---

[8] *Sur la génération des systèmes récurrents*, ecc. « Acta Mathem. », t. 16, 1892.

www.rcin.org.pl

(completo), converrebbe tenere una via diversa da quella seguita nel caso di una sola equazione Ω: converrebbe cioè cercare non la forma delle equazioni del sistema, ma addirittura quella delle funzioni integrali.

E per verità, se sia dato un sistema completo di equazioni a derivate parziali con una sola funzione incognita (*), l'integrale generale $a(x, y)$ può dipendere soltanto da un numero finito r di costanti arbitrarie e ha necessariamente la forma:

$$a(x, y) = f(x, y; C_1 C_2 \dots C_r),$$

dove f è funzione perfettamente determinata delle $r + 2$ quantità x, y, $C_1, C_2, \dots, C_r$.

La ricerca dei gruppi continui di operazioni funzionali equivale dunque in questo caso alla determinazione di quelle funzioni f, per cui, essendo $a_1, a_2, \dots, a_r$, $b_1, b_2, \dots, b_r$ due sistemi qualunque di costanti, si ha, per ogni linea l del piano (che soddisfa rispetto ad f alle condizioni b), c)):

$$(10) \qquad f(x, y; c_1 c_2 \dots c_r) = \int_l f(x, z; a_1 a_2 \dots a_r) f(z, y; b_1 b_2 \dots b_r)\, dz,$$

rappresentando le $c_i = \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ un nuovo sistemi di valori delle costanti C.

Un problema di questa natura mi sembra presentare notevoli difficoltà; certo non si può trattare col metodo adoperato finora, il cui successo è essenzialmente dovuto alla presenza di funzioni arbitrarie nell'integrale generale dell'unica equazione gruppale.

Con denominazioni analoghe a quelle introdotte dal Lie per i gruppi puntuali, i gruppi del tipo (10) si chiameranno *finiti*, mentre si potranno dire *infiniti* quelli, che risultano determinati dalle equazioni (3).

A differenza di quanto accade per le trasformazioni puntuali, nel caso delle operazioni funzionali si presentano primi e più spontanei i gruppi infiniti.

(*) Nell'originale della presente nota si trova qui inserita la seguente parentesi: « (ammesso che due almeno tra le equazioni del sistema completo di equazioni del sistema sieno distinte) ». Questa parentesi in una copia del lavoro postillata dall'Autore è cancellata. [N. d. R.].

www.rcin.org.pl