III.

SUI GRUPPI DI OPERAZIONI FUNZIONALI

« Rend. Ist. Lombardo di Sc., lett. ed arti », S. II, vol. XXVIII (1895)

pp. 458-468

Accanto al concetto di trasformazione puntuale si venne svolgendo recentemente quello di operazione funzionale, che ne è una generalizzazione spontanea. Come infatti le trasformazioni puntuali legano fra loro due sistemi di variabili, così le operazioni funzionali legano due sistemi di funzioni, esse danno cioè un criterio di corrispondenza fra un sistema primitivo di funzioni $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di una o più variabili e un sistema trasformato $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Noi considereremo esclusivamente il caso più semplice di funzioni analitiche con una sola variabile e adotteremo la scrittura:

$$u(x) = Av(y)$$

per esprimere che l'operazione A cangia la funzione primitiva $v(y)$ nella trasformata $u(x)$.

Esempi di operazioni funzionali si trovano fin nelle prime origini del calcolo. Basti ricordare la derivazione $Av(y) = v'(x)$ ($Dv(x)$ secondo la notazione di CAUCHY), la moltiplicazione

$$Av(y) = \chi(x)\cdot v(x)\,,$$

la sostituzione

$$Av(y) = v\{\chi(x)\}\,,$$

l'operazione

$$\theta v(y) = v(x+1)\,,\quad (^1),\ \text{ecc.}$$

(1) Quantunque per questi primi esempi non sarebbe necessario, preferiamo usare fin da principio simboli differenti per le variabili primitiva e trasformata. In primo luogo questa notazione è la più comoda per una classe importantissima di operazioni funzionali (quelle rappresentate da integrali definiti), poi la diversità dei due simboli x, y fa risaltar meglio la circostanza che il campo di validità delle due funzioni può essere differente.

In tempi più a noi vicini si considerarono, specie dai matematici inglesi (Boole, Forsyth), operazioni funzionali del tipo:

$$\varphi(D)v(y) = a_0(x)v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)v(x) \;;$$

tuttavia nè gli antichi analisti, nè il Boole considerarono mai l'operazione funzionale in sè, rappresentandosela piuttosto come una trasformazione puntuale, che al valore $v(x)$ di v in un punto generico x coordina il valore di $Av(x)$ nello stesso punto.

Fu, per quanto io so, il prof. Pincherle, che per il primo si propose, sotto acconce restrizioni, lo studio sistematico delle operazioni funzionali, occupandosi da principio in più lavori (²) di quelle rappresentate da integrali definiti del tipo

$$u(x) = \int a(x, y)v(y)\,dy\,,$$

e volgendo quindi le sue ricerche alla teoria generale. Un saggio di questo indirizzo si può trovare nell'*Algebra delle forme lineari alle differenze*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. V, vol. V, dove è trattata bensì una particolare operazione funzionale, ma il metodo seguito è senz'altro suscettibile di una completa generalizzazione.

Il chiar.mo autore volle comunicarmi il suo programma di lavoro, il quale, se io bene mi appongo, è destinato a dare per le operazioni funzionali ciò, che dà la teoria generale delle funzioni per le trasformazioni puntuali.

E per verità, come la teoria delle funzioni si appoggia ai concetti fondamentali di serie di potenze, di continuazione analitica, di campo di validità di una funzione, così i concetti corrispondenti, convenientemente adattati al caso delle operazioni funzionali, dovranno costituire i cardini di quest'altra dottrina. Essa permetterà di stabilire in generale per le operazioni funzionali un algoritmo di calcolo e di fissare i limiti della sua applicabilità.

Prescindendo per ora da siffatte condizioni effettive, io mi propongo di studiare alcune operazioni funzionali dal punto di vista gruppale e precisamente di assegnare *tutti i gruppi continui* di operazioni, che appartengono a certe categorie. Per questa determinazione mi valgo di qualche risultato della teoria delle trasformazioni puntali dovuto al signor Lie.

(²) *Studi sopra le operazioni funzionali*, « Mem. dell'Acc. delle scienze di Bologna », ser. IV, vol. VII (1885).

Sulla trasformazione di Laplace, Ib., ser. IV, vol. XI.

Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies, « Acta Mathematica », T. 10 (1887).

Sur la génération des systémes récurrents, ecc. Ib., T. 16 (1892), ecc.

La ricerca è di indole strettamente gruppale, ma essa porge motivo per stabilire una proposizione relativa alle equazioni differenziali. Si dimostra cioè che una equazione differenziale ordinaria

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right) = 0$$

è, con una trasformazione di variabile $\varphi = \lambda(\psi)$, riducibile alla forma lineare, se, essendo φ_1 e φ_2 due qualisivogliano dei suoi integrali

$$\varphi = \pi(\varphi_1, \varphi_2, A)$$

è ancora un integrale della stessa equazione.

Sotto un certo rispetto questa classe di equazioni differenziali corrisponde alle equazioni di GALOIS nel campo algebrico. Come infatti la esistenza di una relazione razionale fra tre radici permette di ricondurre la risoluzione di una equazione irreduttibile di grado primo a quella di equazioni abeliane, così l'esistenza di una relazione analitica fra tre integrali permette di ricondurre una equazione differenziale alla forma lineare.

Ritornando alla determinazione dei gruppi di operazioni funzionali, osserveremo che essa si trova qui limitata ad un caso molto particolare, ma si può estendere a classi di operazioni ben più importanti, quelle, per esempio, rappresentate da integrali definiti. Se, come spero, potrò farne oggetto di una seconda nota, si vedrà che in quel caso le considerazioni gruppali si riannodano a questioni d'analisi molto interessanti, tra cui basta ricordare la inversione degli integrali definiti.

* * *

Ammetto di poter considerare una classe Γ di operazioni funzionali e una classe γ di funzioni analitiche, per cui:

I. Se A è contenuto in Γ e $v(x)$ in γ, $u(x) = Av(y)$ appartiene a γ.

Segue da questa ipotesi che, date due operazioni A_1, A_2 di Γ e una funzione qualunque $v(y)$ di γ, si può porre

$$w(z) = A_1 v(y), \qquad u(x) = A_2 w(z),$$

dove $w(z)$ e $u(x)$ appartengono a γ. In altri termini, applicando successivamente prima l'operazione A_1, poi al risultato l'operazione A_2, si ha una nuova operazione funzionale di Γ. Questa si chiamerà *prodotto* delle due proposte A_1, A_2 prese nell'ordine scritto e si potrà designare con

$$A \equiv A_2 A_1 .$$

Le due operazioni

$$A \equiv A_2 A_1\,, \qquad A' \equiv A_1 A_2$$

saranno in generale distinte.

II. Se A è contenuto in Γ, esiste una classe γ'_A di funzioni analitiche $\varphi(A)$ del simbolo A, che rappresentano operazioni funzionali di Γ a senso unico e determinato (si intende per tutte le funzioni γ).

Non deve far meraviglia che si parli senza troppo riguardo di funzioni analitiche di una operazione funzionale, poichè si vedrà che esse vengono qui introdotte soltanto come un'utile convenzione per rappresentare una classe di operazioni funzionali. Per noi basta avere un criterio, con cui si corrispondono una certa categoria di operazioni funzionali e una certa classe di funzioni del simbolo A ([3]).

III. Il prodotto di due operazioni del tipo II, $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$ si può rappresentare con una funzione analitica $\varphi(A)$ dell'operazione generatrice A.

In base a queste ipotesi, di cui nei casi singoli dovrà essere constatata la validità, si può dare il concetto di gruppo di operazioni funzionali.

« Si dirà che un sistema assegnato di operazioni funzionali appartenenti a Γ costituisce un *gruppo* G, quando il prodotto di due qualunque tra le operazioni del sistema è sempre una operazione dello stesso sistema ».

Così per esempio, in virtù della prima ipotesi, costituiscono un gruppo le operazioni di Γ, e, in virtù della terza, anche quelle di γ'_A; anzi si potrà dire che γ'_A è un sottogruppo di Γ.

Un gruppo di operazioni funzionali sarà *limitato*, se contiene soltanto un numero finito di elementi, *illimitato* nel caso contrario.

Per non addentrarci in considerazioni minuziose, eviteremo di definire la continuità; avvertiamo soltanto che quelli speciali gruppi, di cui dovremo occuparci, si dovrebbero chiamare continui (quindi certamente illimitati).

([3]) Per avere un esempio di siffatta corrispondenza, si può pensare alle serie dell'operazione θ (Pincherle, *L'algebra* ecc.). Esse sono funzioni analitiche del simbolo θ e rappresentano operazioni funzionali di significato bene determinato per tutte le funzioni $v(y)$ comprese nel loro campo funzionale di convergenza. In modo analogo si può attribuire significato alle funzioni $\varphi(A)$ di ogni altra operazione A. Tale metodo è indubbiamente il più importante, il più fecondo ed anche il più spontaneo, perchè si riattacca al concetto di potenza, che si incontra nella teoria delle sostituzioni. Ciò non toglie però che non si possano immaginare anche criteri puramente astratti, stabilendo, per esempio, che, per tutte le funzioni $\varphi[v(y)]$, che sono comprese in γ, il simbolo $\varphi(A)v(y)$ rappresenti l'operazione $A\varphi\{v(y)\}$, oppure si ponga, per $\varphi v\{(y)\}$ contenuto in γ, $\varphi(A)v(y) = Av\{\varphi(y)\}$, ecc.

Le considerazioni gruppali, di cui ci occupiamo noi, sono affatto indipendenti dal significato dei simboli del tipo $\varphi(A)$, per cui, almeno formalmente, esse acquistano un carattere di notevole generalità.

Noi fisseremo una particolare operazione A e considereremo soltanto la categoria di operazioni $\varphi(A)$ comprese in γ'_A.

La natura di queste operazioni (come si è detto nella nota precedente) non ha alcuna importanza dal punto di vista strettamente [4] gruppale; è necessaria unicamente la legge di *moltiplicazione*, il criterio cioè con cui, date due operazioni $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$ di γ'_A, si determina la funzione $\varphi(A)$, che ne rappresenta il prodotto.

Finchè questo criterio rimane del tutto arbitrario, i gruppi sono necessariamente indeterminati, ma, assegnato che sia in un modo qualunque, esso dà luogo ad una corrispondente teoria.

Fra le varie [5] leggi di formazione del prodotto è indubbiamente notevole quella, che ci esprime il prodotto $\varphi(A)$ in funzione analitica dei fattori $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$, per cui cioè:

$$\varphi(A) = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} . \tag{1}$$

Noi ci limiteremo a questo caso, occupandoci di determinare quei gruppi G di operazioni funzionali (A), che vengono definiti da equazioni differenziali. Si tratterà cioè, data la legge caratteristica (1), di vedere se e per quali equazioni differenziali:

$$W\left\{\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots, A\right\} = 0 , \tag{2}$$

di un certo ordine qualunque n accade che $\varphi(A)$ sia, insieme con $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$, soluzione di W.

Ammetteremo di più:

a) che il gruppo G (quindi a fortiori γ'_A) contenga l'operazione identica $\varepsilon(A)$, la quale trasformi ogni funzione $v(y)$ nell'identica $v(x)$ e renda quindi, qualunque sia $\varphi(A)$:

$$\varphi(A)\{\varepsilon(A)v(y)\} = \varphi(A)v(x) , \qquad \varepsilon(A)\{\varphi(A)v(y)\} = \varphi(A)v(y) ,$$

cioè:

$$\varphi(A) = \prod \{\varphi(A), \varepsilon(A), A\} , \tag{1'}$$

$$\varphi(A) = \prod \{\varepsilon(A), \varphi(A), A\} . \tag{1''}$$

---

[4] Altra cosa è quando si voglia mettere in relazione il gruppo di trasformazioni cogli enti su cui esso opera; in particolare, per esempio, quando si tratti di determinare gli invarianti.

[5] Un esempio interessante è offerto dal prodotto di due serie ordinate per le potenze di θ (Pincherle, *L'algebra* ecc., loco cit.) coi coefficienti funzioni di x ; la legge di moltiplicazione non è allora suscettibile di una espressione analitica del tipo $\pi\{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\}$; se invece i coefficienti non dipendono da x si ha $\varphi(A) = \varphi_1(A)\varphi_2(A)$, cioè il prodotto simbolico $\varphi(A) \equiv \varphi_2(A)\varphi_1(A)$ coincide col prodotto effettivo.

b) che, come, date due operazioni $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$ del gruppo, si può sempre colla (1) determinarne una terza $\varphi(A)$, che ne rappresenta il prodotto, così, date, poniamo, $\varphi(A)$ e $\varphi_1(A)$, esista almeno una operazione $\varphi_2(A)$ del gruppo tale che

$$\varphi(A) = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} .$$

La nostra ricerca si dividerà in due parti: dapprima si studierà per quali forme della funzione

$$\prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} ,$$

cioè per quali leggi di moltiplicazione esistono gruppi continui (nel senso e colle restrizioni stabilite); poi per ciascuna $\prod$, che comporta l'esistenza di gruppi, si fisseranno i tipi corrispondenti.

Suppongasi adunque in primo luogo che, per una determinata legge caratteristca di moltiplicazione (1), esista un gruppo di operazioni funzionali definito dalla (2).

Si immagini di sostituire al posto di $\varphi_2(A)$ nella (1) la sua espressione effettiva

$$f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

come integral generale di $W=0$, e al posto di $\varphi_1(A)$ un particolare integrale φ'; avremo, per definizione del gruppo, che:

$$\varphi'' = \prod \{\varphi', f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), A\} , \tag{3}$$

dovrà soddisfare alla stessa W; quindi, ponendo:

$$\varphi''' = \prod \{\varphi'', f(A, b_1, b_2, \ldots, b_n), A\} , \tag{4}$$

sarà φ''' a sua volta integrale di W, e, in virtù dell'ipotesi *b*), per una acconcia scelta di $\varphi_2(A)$, esprimibile sotto la forma:

$$\varphi''' = \prod \{\varphi', \varphi_2(A)', A\} ,$$

il che è quanto dire che esiste una conveniente determinazione $c_1, c_2, \ldots, c_n$ delle costanti arbitrarie, che entrano in f, per cui:

$$\varphi''' = \prod \{\varphi', f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n), A\} . \tag{5}$$

Dalle (3), (4) (5) segue che la (1), risguardata come trasformazione puntuale fra le variabili φ_1 e φ deve possedere le caratteristiche gruppali;

la stessa proprietà vale manifestamente per la coppia φ_2, φ e di più i due gruppi

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, ..., a_n), A\},$$
$$\varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, ..., a_n), \varphi_2, A\},$$

sono identici (prescindendo, si capisce, dalla materiale diversità dei simboli φ_1, φ_2), perchè, sempre in causa della b), ogni trasformazione del primo è contenuta nel secondo e reciprocamente.

Ora, rispetto ai gruppi con una sola variabile, è noto [6] che sono tutti simili al proiettivo; quindi come prima conseguenza si deduce che degli n parametri, che entrano nella costituzione di Π, al più tre sono essenziali; inoltre, e questo ha per noi la massima importanza, si può con un semplice cambiamento di variabile (indipendente dai valori dei parametri) attribuire a ciascuno di questi gruppi la forma canonica: $z = (\alpha z_1 + \beta)/(\gamma z_1 + \delta)$; anzi nel caso nostro, per la identità dei gruppi

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, ..., a_n), A\},$$
$$\varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, ..., a_n), \varphi_2, A\},$$

la stessa sostituzione di variabili $\varphi = \mu(z)$, $\varphi_1 = \mu(z_1)$, con cui da

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, ..., a_n), A\},$$

si passa a $z = (\alpha_1 z_1 + \beta_1)/(\gamma_1 z_1 + \delta_1)$, mutando solo φ_1 in φ_2, z_1 in z_2, riduce:

$$\varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, ..., a_n), \varphi_2, A\} \quad \text{a} \quad z = \frac{\alpha_2 z_2 + \beta_2}{\gamma_2 z_2 + \delta_2}.$$

Ne viene che l'equazione caratteristica (1) deve essere tale che, facendovi

$$\varphi = \mu(z), \quad \varphi_1 = \mu(z_1), \quad \varphi_2 = \mu(z_2),$$

z riesca funzione bilineare tanto di z_1, quanto di z_2, sia cioè:

$$z = \frac{a_0(A)z_1z_2 + a_1(A)z_1 + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)z_1z_2 + b_1(A)z_1 + b_2(A)z_2 + b(A)}. \tag{6}$$

Ciò posto, gioverà richiamare l'ipotesi a), osservando che, per essersi ammessa l'esistenza della trasformazione identica $\varepsilon(A)$, ove si ponga

---

(6) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, Leipzig, Teubner, 1893, Cap. 1.

$\varepsilon(A) = \mu[\eta(A)]$, le (1'), (1'') divengono:

$$(6') \qquad z_1 = \frac{a_0(A)z_1\eta(A) + a_1(A)z_1 + a_2(A)\eta(A) + a(A)}{b_0(A)z_1\eta(A) + b_1(A)z_1 + b_2(A)\eta(A) + b(A)},$$

$$(6'') \qquad z_2 = \frac{a_0(A)\eta(A)z_2 + a_1(A)\eta(A) + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)\eta(A)z_2 + b_1(A)\eta(A) + b_2(A)z_2 + b(A)}.$$

Ci riferiremo ad una soltanto di queste identità, la (6') per esempio. Essa esprime, possiam dire, che l'equazione in z_1:

$$z_1 = \frac{a_0(A)z_1z_2 + a_1(A)z_1 + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)z_1z_2 + b_1(A)z_1 + b_2(A)z_2 + b(A)},$$

è identicamente soddisfatta per $z_2 = \eta(A)$ e quindi ridotta a forma intera, risulta dal prodotto di due fattori, uno dipendente soltanto da z_1, l'altro della forma $z_2 - \eta(A)$. Segue da ciò che, qualunque sia z_2, la (6), risguardata come una corrispondenza omografica fra z e z_1, ammette gli stessi elementi uniti; dunque è possibile con una trasformazione (bilineare) di variabile $z = \nu(t)$, $z_1 = \nu(t_1)$, indipendente affatto da z_2, porre la (6) sotto la forma:

$$(7) \qquad t = \varrho_1 t_1 .$$

D'altra parte, dall'identità dei due gruppi

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), A\}, \qquad \varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), \varphi_2, A\},$$

ponendo $f = \mu(F)$, ossia designando con F l'integral generale di

$$W\left\{\mu(F), \frac{d\mu(F)}{dA}, \ldots; A\right\} = 0,$$

si desume quella dei gruppi trasformati:

$$z = \frac{a_0(A)Fz_1 + a_1(A)z_1 + a_2(A)F + a(A)}{b_0(A)Fz_1 + b_1(A)z_1 + b_2(A)F + b(A)},$$

$$z = \frac{a_0(A)Fz_2 + a_1(A)F + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)Fz_2 + b_1(A)F + b_2(A)z_2 + b(A)};$$

quindi la sostituzione di variabile $z = \nu(t)$, che attribuisce al primo di essi la forma (7), essendo indipendente dalle particolari determinazioni, che può ricevere F, attribuisce la stessa forma anche al secondo, e per conseguenza le posizioni

$$z = \nu(t)\,, \qquad z_1 = \nu(t_1)\,, \qquad z_2 = \nu(t_2)$$

conducono la (6) simultaneamente alle due forme:

$$t = \varrho_1(t_2)t_1\,, \tag{7'}$$

$$t = \varrho_2(t_1)t_2\,. \tag{8}$$

Dal loro confronto segue:

$$t = \varrho t_1 t_2\,, \tag{9}$$

dove ϱ è funzione soltanto di A.

Infine col porre

$$t = \frac{1}{\varrho}\, e^{\psi}, \qquad t_1 = \frac{1}{\varrho}\, e^{\psi_1}, \qquad t_2 = \frac{1}{\varrho}\, e^{\psi_2}\,,$$

si scriverà la (9) sotto la forma:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2\,, \tag{10}$$

che, riassumendo, potremo risguardare proveniente dalla (1) colle sostituzioni:

$$\left|\begin{aligned} \varphi &= \mu\left\{\nu\left(\frac{1}{\varrho}\, e^{\psi}\right)\right\} = \lambda(\psi)\,, \\ \varphi_1 &= \mu\left\{\nu\left(\frac{1}{\varrho}\, e^{\psi_1}\right)\right\} = \lambda(\psi_1)\,, \\ \varphi_2 &= \mu\left\{\nu\left(\frac{1}{\varrho}\, e^{\psi_2}\right)\right\} = \lambda(\psi_2)\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Pertanto la sola ipotesi dell'esistenza di un gruppo continuo [sotto le condizioni a), b)], permette di concludere che la legge caratteristica $\varphi = \prod\{\varphi_1, \varphi_2, A\}$ di formazione del prodotto deve avere una struttura speciale, poichè deve essere possibile con sostituzioni del tipo (11) attribuirle la forma (10); da ciò il teorema:

« Condizicne necessaria perchè esistano gruppi continui è che la legge caratteristica di moltiplicazione abbia la forma:

$$\varphi = \lambda\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\}, \tag{10'}$$

dove λ è simbolo di funzione arbitraria, $\bar{\lambda}$ quello della sua inversa ».

La (10'), essendo simmetrica rispetto a φ_1, φ_2, ci fa tra altro vedere che, nel caso dei gruppi la moltiplicazione deve essere commutativa; si riconosce subito che deve anche essere distributiva.

Data una legge di formazione del prodotto

$$\varphi = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\},$$

si può decidere se essa spetta al tipo (10'). Infatti, quando sia

$$\prod (\varphi_1, \varphi_2, A) = \lambda\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\},$$

sussistono le identità:

$$\prod (\varphi_1, \varphi_2, A) = \prod (\varphi_2, \varphi_1, A), \tag{11'}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\}}\, \bar{\lambda}'(\varphi_1), \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\}}\, \bar{\lambda}'(\varphi_2),$$

$$\frac{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}} = \frac{\bar{\lambda}'(\varphi_1)}{\bar{\lambda}'(\varphi_2)},$$

da cui prendendo i logaritmi e derivando:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \log \frac{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}} = 0. \tag{12}$$

Si vede subito che le (11'), (12) rappresentano la richiesta condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione assegnata $\prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$ abbia la forma (10').

Veniamo ormai alla seconda parte della nostra ricerca. Ammesso cioè che la

$$\varphi = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\}$$

abbia la forma (10′), fissare i tipi di equazioni gruppali:

$$W\left\{\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \dots; A\right\} = 0 . \tag{2}$$

La questione si esaurisce immediatamente.

Si ponga infatti nella (2), $\varphi = \lambda(\psi)$ e si dica $W' = 0$ l'equazione trasformata in ψ; siccome, per la (10), la somma di due integrali qualisivogliono ψ_1 e ψ_2 deve ancora soddisfare all'equazione stessa, la W' non può essere che lineare in ψ; d'altra parte inversamente ogni equazione lineare:

$$W' = p_0(A)\frac{d^n\psi}{dA^n} + \dots + p_n(A)\psi = 0 ,$$

gode della proprietà caratteristica accennata. Possiamo dunque concludere:

«Per ciascuna legge di moltiplicazione espressa da

$$\varphi = \lambda\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\} ,$$

esistono infiniti gruppi continui; le equazioni, che li definiscono sono tutte del tipo:

$$p_0(A)\frac{d^n\bar{\lambda}(\varphi_1)}{dA^n} + \dots + p_n(A)\bar{\lambda}(\varphi) = 0 » .$$

Caso per caso poi si dovrà verificare se le soluzioni, che spettano ad una speciale di queste equazioni appartengono alla classe γ'_A e quindi rappresentano effettivamente operazioni funzionali del nostro sistema.

Prescindendo dall'interpretazione gruppale, noi abbiamo trovato:

1) Non sempre esistono equazioni differenziali i cui integrali sieno legati da una relazione assegnata $\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga si è che la funzione $\prod(\varphi_1, \varphi_2, A)$ abbia la forma particolare (10′).

2) Se fra tre integrali di una equazione

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \dots; A\right) = 0 ,$$

passa una relazione analitica (10′), ponendo $\varphi = \lambda(\psi)$, l'equazione trasformata in ψ è lineare.