II.

SUGLI INVARIANTI ASSOLUTI

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett., ed arti », s. VII, t. V (1893-94)

pp. 1447-1523

1. – Sia un sistema di funzioni $f_1, f_2, ..., f_N$ dipendenti da n variabili $x_1, x_2, ..., x_n$, e si sappia che le leggi caratteristiche, le quali reggono le trasformazioni del sistema, sono l'*invarianza*, la *covarianza*, la *contravarianza* (veggasi la nota (4) a pag. 42). Si tratta in primo luogo di:

« Determinare tutte le espressioni I, formate colle variabili, colle fun- « zioni del sistema e colle loro derivate, le quali non cambiano di valore, « quando sulle variabili si eseguisca una sostituzione arbitraria e corri- « spondentemente le funzioni si trasformino secondo le leggi anzidette ».

2. – GAUSS fu il primo, che, riferendosi ad un particolare sistema, ne determinò un invariante differenziale e ne fece rilevare tutta l'importanza. L'invariante di GAUSS è, come si sa, del secondo ordine, si riferisce ad un sistema covariante doppio e simmetrico a due variabili e rappresenta la curvatura totale di una superficie, il quadrato del cui elemento lineare ha per coefficienti le funzioni del sistema.

Il compianto prof. FELICE CASORATI, affrontando la questione da un punto di vista più generale (2), fece vedere come il problema della determinazione di tutti gli invarianti differenziali, che si possono ottenere da una forma quadratica binaria, si lasci risolvere per via di eliminazioni puramente algebriche. Egli mostrò poi quali modificazioni sul numero delle risultanti (invarianti) erano apportate dalla natura speciale delle equazioni, fra cui l'eliminazione doveva eseguirsi.

---

(1) Questo lavoro, salvo alcune lievi modificazioni, che mi furono, con somma benevolenza, suggerite dall'illustre Prof. GREGORIO RICCI, venne presentato alla Facoltà di Scienze di Padova quale dissertazione per la laurea in matematica.

(2) *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superfici curve.* « Ann. di Mat. », ser. 1a, tom. III e IV, 1860-61.

L'illustre prof. BELTRAMI, nella sua celebre Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (3), mise sotto nuova luce, estendendoli altresì ad un numero qualunque di variabili, certi parametri differenziali, occorsi già nelle ricerche di LAMÉ e di JACOBI, ed ebbe così a considerare espressioni invariantive, che contengono non solo i coefficienti della forma quadratica fondamentale e loro derivate, ma anche funzioni trasformabili per invarianza e relative derivate.

L'importanza somma di questo scritto, oltre che alla maggior generalità del problema risoluto, è dovuta altresì alla semplicità del metodo e all'uso straordinariamente fecondo dei risultati in questioni svariatissime d'analisi pura ed applicata.

Alcuni anni or sono il chiar. prof. RICCI (4) diede al problema della determinazione degli invarianti differenziali la massima generalità finora raggiunta, associando ad una forma differenziale quadratica fondamentale $\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ quanti si vogliono sistemi covarianti e contravarianti.

L'essenza del metodo consiste in ciò: Eliminare, a mezzo dei coefficienti della forma fondamentale e loro derivate, le derivate delle variabili d'ordine superiore al primo, per modo che tutte le eliminanti esprimano relazioni di covarianza oppure di contravarianza.

Basta allora risolvere una questione puramente algebrica, determinare cioè tutti gli invarianti assoluti di un sistema di forme puntuali o reciproche, che hanno ordinatamente per coefficienti:

se si vogliono gli invarianti di ordine zero:

1) i coefficienti della forma fondamentale,

2) gli elementi dei sistemi proposti;

se si vogliono gli invarianti di ordine zero ed uno:

1) i coefficienti della forma fondamentale,

2) gli elementi dei sistemi proposti,

3) gli elementi ottenuti dai proposti con una prima derivazione covariante o contravariante a norma della loro natura;

se infine si vogliono tutti gli invarianti, fino a quelli di un certo ordine $\mu > 1$:

1) i coefficienti della forma fondamentale,

2) gli elementi dei sistemi proposti,

---

(3) « Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna », ser. 2ª, tom. VIII (1868). [Opere mat., t. II, Milano, Hoepli, 1911; pp. 74-118].

(4) *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali.* « Ann. di Mat. », ser. 2ª, tom. XIV (1886-87); *Della derivazione covariante e contravariante.* Memorie pubblicate per commemorare l'VIII centenario dalle origini dell'Università di Bologna, Padova, 1888.

3) gli elementi ottenuti dai proposti con μ derivazioni covarianti o contravarianti a norma della loro natura,

4) i simboli di CHRISTOFFEL a_{rstu},

5) gli elementi, che da questi si ottengono con $\mu - 2$ derivazioni covarianti successive.

Come si vede, questo metodo, rimarchevole per genialità di concezione ed eleganza di procedimenti, esige la esistenza di una forma fondamentale quadratica di riferimento e diviene inapplicabile, se il sistema proposto non comprende almeno un sistema covariante doppio.

Il prof. SOMIGLIANA, essendo condotto da ricerche sulle equazioni a derivate parziali [5] a considerare forme differenziali superiori, tentò di estendere il metodo del prof. RICCI, ma, come osserva egli stesso in una nota inserita alla fine, i suoi risultati hanno valore solo fin tanto che la forma fondamentale di riferimento, di grado qualunque, sia però di classe zero.

Riassumendo, per ciò che riguarda la determinazione uniforme di tutti gli invarianti differenziali, noi ci siamo finora trovati di fronte ad un unico criterio direttivo fondamentale, che costituisce, si può dire, il metodo classico [6]. Esso risale a CASORATI e trova il suo fondamento nella eliminazione algebrica. Fu generalizzato e ridotto a forma più comprensiva dal prof. RICCI, quando, fra gli elementi del sistema proposto, esiste un sistema covariante doppio.

3. – Una via affatto diversa dalle precedenti è offerta dalle belle e profonde ricerche del LIE. Ecco il problema generale proposto da questo autore:

« È dato un gruppo G finito od infinito di trasformazioni (alcune delle « quali possono anche essere identiche) in N variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$; « $z_1, z_2, \dots, z_m$ $(n + m = N)$, di cui le x si risguardano indipendenti, le z « invece come loro funzioni. Determinare tutte le espressioni formate

---

[5] *Sulle trasformazioni delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.* « Ann. di Mat. », ser. 2ª, tom. XVIII (1890).

[6] Lo stesso indirizzo viene seguito in lavori più recenti da G. FROBENIUS, *Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden differentialparameter*, « Crelle's Journal », B. 110, Heft I, 1892, e da J. KNOBLAUCH, *Ueber Biegungscovarianten, Zur Theorie der Differentialparameter*. Ib., B. 111, Hefte I, IV, 1893, dove però la forma fondamentale considerata è quadratica binaria, e, rispetto alla teoria generale, nulla vi si trova, che non sia già implicitamente contenuto nei lavori del prof. RICCI.

Da concetto diverso è mosso invece il prof. PADOVA, il quale, in una sua nota *Sulle espressioni invariabili* « Memorie dell'Accademia dei Lincei », ser. IV, vol. IV, 1887, accostandosi ai procedimenti di JACOBI e BELTRAMI, mostrò in qual modo, per stabilire molte espressioni invariantive, si possano con vantaggio usare certe estensioni agli iperspazii dei lemmi di GREEN. Tale metodo, che ha lo scopo precipuo di assegnare il valore effettivo di molti invarianti differenziali, non sembra però atto ad una ricerca sistematica.

« colle x, colle z e colle derivate delle z rapporto alle x fino a quelle di « un certo ordine μ, le quali non cambiano di valore, quando sugli ele- « menti, da cui esse dipendono, si eseguisca una qualunque trasforma- « zione del gruppo ».

Questo enunciato, finchè si resta nell'ambito degli invarianti differenziali, generalizza considerevolmente la questione, di cui al § 1 (7), poichè, mentre in quella sono richiesti gli invarianti assoluti, le espressioni cioè, che rimangono inalterate di fronte a *qualsivoglia* trasformazione delle variabili indipendenti, qui invece abbiamo un elemento arbitrario di più, il gruppo di trasformazioni, che è il campo della loro invariabilità.

I risultati, che, a questo proposito, si trovano nei lavori del LIE, possono essere riassunti nel modo seguente:

1) « Gli invarianti differenziali relativi ad un sistema di n variabili « indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e di m funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ di fronte a tutte « le trasformazioni di un gruppo qualunque G (ad $N = n + m$ variabili) « sono le soluzioni (quando queste soluzioni esistono) di un sistema di « equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee ».

2) « Il sistema in questione è completo e quindi ammette soluzioni « ogni qualvolta il numero delle variabili sia superiore almeno di una » « unità a quello delle equazioni algebricamente indipendenti » (8).

4. – Queste due proposizioni esauriscono manifestamente la questione degli invarianti differenziali dal punto di vista della teorica generale dei gruppi; nei casi singoli si può richiedere qualche cosa di più. Perciò, essendomi proposto (§ 1) lo studio degli invarianti assoluti di un sistema S alquanto più generale di quello considerato dal prof. RICCI (perchè francato dal vincolo della forma quadratica fondamentale), e, dovendomi in primo luogo (§§ 5-16) occupare degli invarianti differenziali, ritenni insufficiente di limitarmi a stabilire il sistema di equazioni, che li definiscono,

---

(7) Si può infatti vedere come la ricerca degli invarianti assoluti del nostro sistema S non sia che un caso particolare di questo problema. Basta immaginare un gruppo, le cui equazioni di definizione sieno:

1) La identità $0 = 0$, cui si possono far corrispondere tutte le trasformazioni puntuali nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) Le equazioni differenziali fra le f e le (f), le quali si possono ottenere, derivando rispetto alle f stesse le relazioni fondamentali di covarianza e di contravarianza ed eliminando poi le derivate delle variabili indipendenti.

Gli invarianti di questo gruppo infinito sono precisamente le espressioni richieste.

(8) *Ueber Differentialinvarianten.* « Math. Annalen », B. XXIV (1884), Heft 4. [Gesamm. Abhandl., Leipzig-Oslo, Teubner-Aschehoug, Bd. VI (1927), pp. 95-138.] — *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Abschnitt, Leipzig, Teubner, 1888; Kap. 25. — *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen.* « Leipziger Berichte », 1891, Heft 3; pp. 316-393. [Gesamm. Abhandl., Leipzig-Oslo, Teubner-Aschehoug, Bd. VI (1927), pp. 300-364.]

ma volli altresì, quantunque per ciò si esigessero sviluppi laboriosi, rintracciare direttamente la struttura del sistema e investigare (veggasi particolarmente Teor. I, pag. 86-87) qualche proprietà delle sue soluzioni.

Nella seconda parte di questo lavoro si trova minor complicazione di calcolo e, se io non m'inganno, taluna novità di vedute, in quanto cercai di estendere il concetto di invariante, considerando certe espressioni integrali. Una tale ricerca (§§ 17-21) è, si può dire, una applicazione dei risultati ottenuti nella prima parte. Aggiunsi in fine (§ 22) un breve cenno diretto a mostrare in qual modo la considerazione degli invarianti integrali si possa estendere al caso di un gruppo qualsiasi.

5. – Veniamo ormai al nostro problema e rifacciamoci *ab initio*. Supponiamo dato un sistema S, il quale contenga α sistemi covarianti $Z_{1m_1}, Z_{2m_2}, \ldots, Z_{\alpha m_\alpha}$ d'ordine rispettivo $m_1, m_2, \ldots, m_\alpha$ e certi β sistemi contravarianti $Z_1^{w_1}, Z_2^{w_2}, \ldots, Z_\beta^{w_\beta}$ rispettivamente dell'ordine $w_1, w_2, \ldots, w_\beta$. Non consideriamo particolarmente le funzioni invarianti, potendo immaginarle incluse in una delle due classi accennate quali sistemi di ordine zero.

Fissiamo ora in generale un sistema covariante Z_m dell'ordine m e un sistema contravariante Z^w dell'ordine w; si dicano genericamente

$$f_{r_1 r_2 \ldots r_m}, \qquad f^{r_1 r_2 \ldots r_w} \qquad (r_1, r_2, \ldots, r_m, r_w = 1, 2, \ldots, n)$$

gli elementi rispettivi. Avremo le leggi caratteristiche di trasformazione:

$$(1) \qquad (f_{r_1 r_2 \ldots r_m}) = \sum_1^n{}_{q_1 q_2 \ldots q_m} f_{q_1 q_2 \ldots q_m} \frac{\partial x_{q_1}}{\partial (x_{r_1})} \frac{\partial x_{q_2}}{\partial (x_{r_2})} \cdots \frac{\partial x_{q_m}}{\partial (x_{r_m})},$$

$$(1') \qquad (f^{r_1 r_2 \ldots r_w}) = \sum_1^\infty{}_{q_1 q_2 \ldots q_m} f^{q_1 q_2 \ldots q_w} \frac{\partial (x_{r_1})}{\partial x_{q_1}} \frac{\partial (x_{r_2})}{\partial x_{q_2}} \cdots \frac{\partial (x_{r_w})}{\partial x_{q_w}}.$$

Queste relazioni dovranno sussistere, anche quando il cambiamento delle variabili x si riduca ad una variazione infinitesima, per cui si abbia:

$$(3) \qquad (x_i) = x_i + \delta x_i .$$

Soddisfatte, come noi supponiamo, le necessarie condizioni di continuità, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo si trova:

$$(f_{r_1 r_2 \ldots r_m}) = f_{r_1 r_2 \ldots r_m} - \sum_1^\infty{}_{q_1} f_{q_1 r_2 \ldots r_m} \frac{\partial \delta x_{q_1}}{\partial x_{r_1}} -$$

$$- \sum_1^n{}_{q_2} f_{r_1 q_2 \ldots r_m} \frac{\partial \delta x_{q_2}}{\partial x_{r_2}} - \cdots - \sum_1^n{}_{q_m} f_{r_1 r_2 \ldots q_m} \frac{\partial \delta x_{q_m}}{\partial x_{r_m}},$$

$$(f^{r_1 r_2 \dots r_w}) = f^{r_1 r_2 \dots r_w} + \sum_1^n{}_{q_1} f^{q_1 r_2 \dots r_w} \frac{\partial \delta x_r}{\partial x_{q_1}} +$$

$$+ \sum_1^n{}_{q_2} f^{r_1 q_2 \dots r_w} \frac{\partial \delta x_{r_2}}{\partial x_{q_2}} + \dots + \sum_1^n{}_{q_w} f^{r_1 r_2 \dots q_w} \frac{\partial \delta x_{r_w}}{\partial x_{q_w}},$$

le quali compendiosamente possono anche essere scritte:

(2) $$(f_{r_1 r_2 \dots r_m}) - f_{r_1 r_2 \dots r_m} = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial \delta x_q}{\partial x_{r_l}},$$

(2′) $$(f^{r_1 \dots r_2 r_w}) - f^{r_1 r \dots {}_2 r_w} = \sum_1^w{}_l \sum_1^n{}_q f^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_w} \frac{\partial \delta x_{r_l}}{\partial x_q}.$$

Come è manifesto, le differenze $(f) - f$ si possono risguardare quali variazioni prime delle quantità f stesse. Esse sono evidentemente nulle, se la f è una invariante, e sono date dalle (2), (2′), se f appartiene ad un sistema covariante o contravariante. Del resto basta fare $m = 0$ nella (2) o $w = 0$ nella (2′) che, mancando il secondo membro, si ritrova il caso della funzione invariante.

Poniamo per maggior semplicità

(4) $$\delta x_i = \xi_i, \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

(5) $$(f) - f = \delta f = \varphi,$$

(6) $$\frac{\partial^j f}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_j}} = f)_{s_1 s_2 \dots s_j} \ (j \text{ qualunque}; \ s_1, s_2, \dots, s_j = 1, 2, \dots, n),$$

e corrispondentemente:

(7) $$\delta f)_{s_1 s_2 \dots s_j} = \varphi_{(s_1 s_2 \dots s_j}.$$

Cerchiamo di esprimere, come, a mezzo delle (2), (2′), si è fatto per le f, le variazioni $\varphi_{(s_1 s_2 \dots s_j}$ delle loro derivate in funzione di quantità finite, delle ξ_i e delle loro derivate. Ricordiamo a tale scopo una formula fondamentale nel calcolo delle variazioni, che, per le (4), (5), (6), (7), potrà essere scritta:

$$\varphi_{(s_1} = \varphi)_{s_1} - \sum_1^n{}_q f)_q \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}}.$$

Considereremo separatamente il caso, in cui f appartiene ad un sistema covariante e quello, in cui esso è invece elemento di un sistema contravariante.

6. – Riferendoci da principio al primo caso, denoti Z_m il sistema generico, cui appartiene f, che sarà adunque un certo $f_{r_1 r_2 \dots r_m}$. Avremo per le (2), (4) e (5):

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m} = -\sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_r} . \tag{2bis}$$

Dalla formula sopra citata:

$$\begin{aligned} \varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1} &= \varphi_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1} - \sum_1^n {}_q f_{r_1 r_2 \dots r_m) q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} = \\ &= -\sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{r_l}} - \sum_1^n {}_q f_{r_1 r_2 \dots r_m) q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} \\ &\quad - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial^2 \xi_q}{\partial x_{r_l} \partial x_{s_1}} , \end{aligned} \tag{8}$$

la qual relazione porge le variazioni delle derivate prime di $f_{r_1 r_2 \dots r_m}$ espresse per gli altri elementi dei sistema Z_m, per le loro derivate prime e per le derivate prime e seconde delle ξ.

Più generalmente noi ci proponiamo di assegnare la forma di $\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}$. Con questo intento si ponga:

$$\left\{ \begin{aligned} & T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 r \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j} = 0 && \text{per } \varrho > j+1 \\ & = -\sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \gamma^j_{\varrho-1} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}} && \text{per } \varrho \leqslant j+1, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j} = 0 && \text{per } \varrho > j , \\ & = -\sum_1^n {}_q \gamma^j_\varrho f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 s_{j-\varrho} q} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{s_{j-\varrho+1}} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}} && \text{per } \varrho \leqslant j , \end{aligned} \right. \tag{10}$$

dove i simboli $\gamma^j_{\varrho-1}$, γ^j_ϱ abbracciano la somma di tutte le combinazioni semplici degli j indici $s_1, s_2, \dots, s_j$, considerati come elementi essenzialmente distinti ($\varrho - 1$ a $\varrho - 1$), (ϱ a ϱ) rispettivamente.

La (9) ci dà:
per $j = 0$, $\varrho = 1$,

$$T^{(1)}_{(0)r_1r_2\ldots r_m} = -\sum_l^m{}_1 \sum_q^n{}_1 f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{r_l}} ;$$

per $j = 1$, $\varrho = 1$,

$$T^{(1)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1} = -\sum_l^m{}_1 \sum_q^n{}_1 f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m)s_1} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{r_l}} ;$$

per $j = 1$, $\varrho = 2$,

$$T^{(2)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1} = -\sum_l^m{}_1 \sum_q^n{}_1 f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m} \frac{\partial^2 \xi_q}{\partial x_{r_l}\,\partial x_{s_1}} .$$

La (10) invece porge:
per $j = 0$, $\varrho = 1$,

$$\Theta^{(1)}_{(0)r_1r_2\ldots r_m} = 0 ;$$

per $j = 1$, $\varrho = 1$,

$$\Theta^{(1)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1} = -\sum_q^m{}_1 f_{r_1r_2\ldots r_m)q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} ;$$

per $j = 1$, $\varrho = 2$,

$$\Theta^{(2)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1} = 0 .$$

Posto ancora:

$$T^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j} + \Theta^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j} = \mathfrak{C}^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j} , \tag{11}$$

si ha manifestamente, per le (2^{bis}):

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m} = \mathfrak{C}^{(1)}_{(0)r_1r_2\ldots r_m} ,$$

e per le (8):

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m(s_1} = \mathfrak{C}^{(1)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1} + \mathfrak{C}^{(2)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1} .$$

Io dico ora che si ha in generale, qualunque sia j:

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j} = \sum_\varrho^{j+1}{}_1 \mathfrak{C}^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j} . \tag{12}$$

Si supponga infatti che la (12) sussista per un certo valore di j; possiamo provare che essa vale anche per $j+1$. In primo luogo, per la formula già ricordata dal calcolo delle variazioni:

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}} = \varphi_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j\, s_{j+1}} - \sum_1^n {}_q\, f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}},$$

quindi per la (12):

$$\varphi_{s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}} = \sum_1^{j+1} {}_\varrho \frac{\partial \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial x_{s_{j+1}}} - \sum_1^n {}_q\, f_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}. \tag{13}$$

Indichiamo con $\partial_1 \mathfrak{T} / \partial_1 x_s$ il risultato, che si ottiene derivando, in una $\mathfrak{T}$ qualsiasi il primo fattore f rapporto ad x_s, con $\partial_2 \mathfrak{T} / \partial_2 x_s$ il risultato, che si ottiene, derivando invece il secondo fattore. Analogo significato riserbiamo naturalmente a $\partial_1 T / \partial_1 x_s$, $\partial_1 \Theta / \delta_1 x_s$, ecc. Avremo, come è manifesto:

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x_s} = \frac{\partial_1 \mathfrak{T}}{\partial_1 x_s} + \frac{\partial_2 \mathfrak{T}}{\partial_2 x_s},$$

e le altre analoghe.

Tenendo presente dalle (10) che $\Theta^{(j+1)}_{(j) s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}} = 0$, la (13) potrà essere scritta

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_{j+1}} = \frac{\partial_1 \mathfrak{T}^{(1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} - \sum_1^n {}_q\, f_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{i+1}}} \tag{13bis}$$

$$+ \sum_2^{j+1} {}_\varrho \left\{ \frac{\partial_1 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 \mathfrak{T}^{(\varrho-1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} \right\} + \frac{\partial_2 \mathfrak{T}^{(j+1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}}.$$

Ora si ha dalle (9), essendo l'indice variabile ϱ della sommatoria antecedente sempre $\leqslant j+1$:

$$\frac{\partial_1 T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} =$$

$$= - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q\, \gamma^j_{\varrho-1} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1} s_{j+1}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l}\, \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}}$$

$$\frac{\partial_2 T^{(\varrho-1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} =$$

$$= - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q\, \gamma^j_{\varrho-2} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1} s_{j-\varrho+2}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l}\, \partial x_{s_{j-\varrho+3}} \dots \partial x_{s_j}\, \partial x_{s_{j+1}}}.$$

Sommando e ricordando dal calcolo combinatorio che:

$$\gamma^{j+1}_{\varrho-1}(s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}) = \gamma^{j}_{\varrho-1}(s_1 s_2 \dots s_j) + s_{j+1}\gamma^{j}_{\varrho-2}(s_1 s_2 \dots s_j)\,,$$

si conclude:

$$\frac{\partial_1 T^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 T^{(\varrho-1)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = T^{(\varrho)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_js_{j+1}}\,;$$

analogamente:

$$\frac{\partial_1 \Theta^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 \Theta^{(\varrho-1)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = \Theta^{(\varrho)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_js_{j+1}}\,,$$

e quindi:

$$(14)\qquad \frac{\partial_1 \mathcal{T}^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 \mathcal{T}^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = \mathcal{T}^{(\varrho)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_js_{j+1}}\,.$$

Si ha poi:

$$\frac{\partial_1 \mathcal{T}^{(1)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1r_2\dots r_{l-1}qr_{l+1}\dots r_m)s_1s_2\dots s_{j+1}} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{r_j}} = \mathcal{T}^{(1)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_{j+1}}\,,$$

$$\frac{\partial_1 \Theta^{(1)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} = -\sum_1^n{}_q \gamma^j_1 f_{r_1r_2\dots r_m)s_1s_2\dots s_{j-1}qs_{j+1}} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_j}}\,,$$

ed aggiungendo a entrambi i membri

$$-\sum_1^n{}_q f_{r_1r_2\dots r_m)s_1s_2\dots s_jq} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}\,,$$

otterremo a destra:

$$-\sum_1^n \gamma^{j+1}_1 f_{r_1r_2\dots r_m)s_1s_2\dots s_jq} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}\,, \qquad \text{cioé:}\quad \Theta^{(1)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_{j+1}}\,,$$

per il che da ultimo, sommando colla relazione precedente, si otterrà:

$$(15)\qquad \frac{\partial_1 \mathcal{T}^{(1)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} - \sum^n f_{r_1r_2\dots r_m)s_1s_2\dots s_jq} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}} = \mathcal{T}^{(1)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_js_{j+1}}\,.$$

Infine:

$$\frac{\partial_2 \mathcal{T}^{(j+1)}_{(j)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1r_2\dots r_{l-1}qr_{l+1}\dots r_m} \frac{\partial^{j+1}\xi_q}{\partial x_r\, \partial x_{s_1}\dots \partial x_{s_j}\, \partial x_{s_{j+1}}}$$

$$= \mathcal{T}^{(j+2)}_{(j+1)r_1r_2\dots r_m(s_1s_2\dots s_js_{j+1}}\,,$$

e, siccome $\Theta^{(j+2)}_{(j+1)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}} = 0$, potremo anche scrivere:

$$\frac{\partial_2 T^{(j+1)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j}}{\partial_2 x_{j+1}} = \mathcal{T}^{(j+2)}_{(j+1)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}}. \tag{16}$$

Valendoci ora delle (14), (15), (16), ricaviamo senza difficoltà dalla (13^{bis}):

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}} = \sum_1^{j+2}{}_{\varrho}\, \mathcal{T}^{(\varrho)}_{(j+1)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}},$$

la quale non è che la (12), cangiatovi j con $j+1$. Ora noi la abbiamo verificata effettivamente per $j=0$ e per $j=1$, quindi, in virtù della dimostrazione, che precede, essa vale in generale.

7. – In modo del tutto analogo si possono stabilire le formule corrispondenti per i sistemi contravarianti. Noi qui le trascriviamo senz'altro, riferendoci ad un generico sistema contravariante Z^w dell'ordine w. Avremo designando le formule correlative a quelle del paragrafo antedecente collo stesso numero accentato:

$$\varphi^{r_1r_2\ldots r_w} = \sum_1^w{}_l \sum_1^n{}_q f^{r_1r_2r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w} \frac{\partial \xi_{r_l}}{\partial x_q}, \tag{$2'^{\text{bis}}$}$$

$$\varphi^{r_1r_2\ldots r_w}_{(s_1} = \sum_1^w{}_l \sum_1^n{}_q f^{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w}_{)s_1} \frac{\partial \xi_{r_l}}{\partial x_q} - \sum_1^n{}_q f^{r_1r_2\ldots r_w} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} + \tag{8'}$$
$$+ \sum_1^w{}_l \sum_1^1{}_q f^{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w} \frac{\partial^2 \xi_{r_l}}{\partial x_q\, \partial x_{s_1}},$$

$$\left\{\begin{aligned} & T^{(\varrho)r_1r_2\ldots r_w}_{(j)s_1s_2\ldots s_j} = 0 && \text{per}\quad \varrho > j+1, \\ & = \sum_1^w{}_l \sum_1^n{}_q \gamma^j_{\varrho-1} f^{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w}_{)s_1s_2\ldots s_{j-\varrho+1}} \frac{\partial^{\varrho} \xi_{r_l}}{\partial x_q \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \ldots \partial x_{s_j}} && \text{per}\quad \varrho \leqslant j+1, \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

$$\left\{\begin{aligned} & \Theta^{(\varrho)r_1r_2\ldots r_m}_{(j)(s_1s_2\ldots s_j} = 0 && \text{per}\quad \varrho > j, \\ & = -\sum_1^n{}_q \gamma^j_{\varrho} f^{r_1r_2\ldots r_w}_{(j))s_1s_2\ldots s_{j-\varrho}q} \frac{\partial^{\varrho} \xi_q}{\partial x_{s_{j-\varrho+1}} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \ldots \partial x_{s_j}} && \text{per}\quad \varrho \leqslant j, \end{aligned}\right. \tag{10'}$$

$$(11') \qquad T^{(\varrho) r_1 r_2 \dots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \dots s_j} + \Theta^{(\varrho) r_1 r_2 \dots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \dots s_j} = \mathcal{T}^{(\varrho) r_1 r_2 \dots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \dots s_j},$$

$$(12') \qquad \varphi^{r_1 r_2 \dots r_w}_{(s_1 s_2 \dots s_j} = \sum_{1}^{j+1}{}_{\varrho} \, \mathcal{T}^{(\varrho) r_1 r_2 \dots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \dots s_j}.$$

8. – Si immagini ora che sia I un invariante differenziale del sistema S d'ordine, poniamo, μ. Dovendosi avere $(I) = I$ di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili, la stessa relazione dovrà sussistere, anche quando il cambiamento coincide colla variazione infinitesima (3). Sarà quindi: $(I) - I = \delta I = 0$. Ora I, per ipotesi, è formata colle variabili, cogli elementi del sistema S e colle loro derivate fino all'ordine μ; perciò, rappresentando genericamente con $f_{h m_h \, r_1 r_2 \dots r_{m_h}}$ un elemento del sistema

$$Z_{h m_h}, \qquad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

con $f_{k w_k}^{r_1 r_2 \dots r_{w_k}}$ un elemento del sistema

$$Z_k^{w_k}, \qquad (k = 1, 2, \dots, \beta),$$

con $\varphi_{h m_h \, r_1 r_2 \dots r_{m_k}}$, $\varphi_{k w_k}^{r_1 r_2 \dots r_{w_k}}$ le variazioni corrispondenti, avremo:

$$(18) \qquad \delta I = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial I}{\partial x_i} \xi_i + \sum_{1}^{\alpha}{}_h \sum_{0}^{\mu}{}_j \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_{m_k} \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{h m_h \, r_1 r_2 \dots r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_j}} \varphi_{h m_h \, r_1 r_2 \dots r_{m_h} (s_1 s_2 \dots s_j}$$

$$+ \sum_{1}^{\beta}{}_k \sum_{0}^{\mu}{}_j \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{k w_k \,) s_1 s_2 \dots s_j}^{r_1 r_2 \dots r_{w_k}}} \varphi_{k w_k \, (s_1 s_2 \dots s_j}^{r_1 r_2 \dots r_{w_k}} = 0,$$

dove la somma tra 1 ed n, rispetto agli indici $s_1 s_2 \dots s_j$, (separati perciò dagli r con una sbarretta) si intende estesa a tutte le combinazioni con ripetizione.

Da ciò risulta che la I, risguardata come funzione degli elementi che la costituiscono, è integrale della (18). Ma per le formule precedenti, le $\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}$, $\varphi^{r_1 r_2 \dots r_w}_{(s_1 s_2 \dots s_i}$ sono funzioni lineari ed omogenee delle derivate delle ξ, fino all'ordine $\mu + 1$ incluso, e d'altra parte le variazioni ξ_i e le loro derivate sono completamente arbitrarie; dunque la I soddisfa a tutte le equazioni, che si possono ottenere dalla (18), eguagliando separatamente a zero i coefficienti delle ξ_i e delle loro derivate fino all'ordine $\mu + 1$ incluso. Il sistema complessivo di tali equazioni, rappresentato anche dalla (18), potremo brevemente dinotare con Ω_μ.

Reciprocamente è facile dimostrare che ogni funzione I, la quale soddisfa a tutte le equazioni Ω_μ è un invariante del sistema S. Per brevità si potrebbe osservare che, siccome I non cambia di valore di fronte a nessuna variazione infinitesima delle variabili, lo stesso deve accadere per un cangiamento finito. Tuttavia, se si voglia condurre compiutamente la dimostrazione, si può far vedere che, scelta ad arbitrio una sostituzione di variabili:

$$(x_i) = \chi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

ed eseguitala sulle funzioni del sistema S, la (I) relativa ad esse è identica alla I primitiva.

Assumiamo a tale scopo una variabile ausiliaria t e poniamo:

$$y_i = x_i + t[\chi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

risguardando le (20) come un gruppo monometrico (eingliedrige Gruppe) di trasformazioni, che opera sulle variabili indipendenti x e che, per $t = 0$, dà la trasformazione identica, per $t = 1$, la (19). Immaginando di eseguire effettivamente sulle nostre variabili indipendenti e quindi sulle funzioni di S le trasformazioni del gruppo (20), la I diverrà una certa funzione $I(t)$ di t, tale che basterà assegnare il valore t, perchè $I(t)$ porga la (I) (relativa a quella trasformazione (20), che corrisponde al dato valore di t) espressa per le variabili primitive x. Ma δI è nullo per ogni variazione infinitesima, in particolare sarà $dI = 0$, rappresentando dI l'incremento, che subisce I, quando da un valor generico t si passa al valore contiguo $t + dt$. Ne consegue che I è indipendente da t e quindi eguale ad $I(0) = I$, con che riesce dimostrata completamente per il nostro sistema S la prima delle due proposizioni, di cui al § 3 (9).

(9) Nei riguardi degli invarianti differenziali assoluti, questa proposizione, oltre che dallo stesso LIE, si trova accennata esplicitamente alla fine di una nota del sig. GOURSAT, *Sur les invariants des équations différentielles*, «Comptes Rendus», tom. CVII, n. 23, 1888, nella quale però mancano naturalmente tutti gli sviluppi dei paragrafi antecedenti, non essendosi l'autore proposto di studiare i sistemi di equazioni differenziali.

Più recentemente il sig. KASIMIR ŻORAWSKI, seguendo la via tracciata da LIE, si occupò della effettiva determinazione di tutti gli invarianti differenziali, che si possono ottenere associando ad una forma quadratica binaria una o più funzioni invariantive, tenendo conto anche di quelli, che provengono da una estensione del gruppo (Mindingsche erweiterte Gruppe) dovuta all'ipotesi che delle due variabili originariamente indipendenti una si possa considerare funzione dell'altra. La sua memoria *Ueber Biegungsinvarianten*, «Acta Math.», vol. 16, 1892, dopo alcune osservazioni preliminari, contiene degli sviluppi analoghi ai precedenti nel caso speciale di due variabili, di un solo sistema covariante doppio e di quanti si vogliono sistemi di ordine zero. Vi è poi mostrato come le equazioni, da noi qui designate con Ω_μ, a partire da $\mu = 2$, sieno tutte indipendenti, del che si vale l'autore per stabilire il numero totale di invarianti differenziali di ordine qualunque, che possiede il sistema da lui considerato. L'ultima parte della memoria ha per iscopo il calcolo di alcuni invarianti già noti.

A proposito della estensione (dallo ŻORAWSKI denominata di MINDING) vogliamo avvertire che per le nostre n variabili x riterremo superflua l'ipotesi di un qualsiasi legame funzionale, accontentandoci, per ciò che si riferisce a questa ed eventualmente ad altre estensioni dei gruppi, delle teorie generali del LIE.

9. – Consideriamo un po' da vicino le equazioni del sistema Ω_μ. Noi abbiamo intanto $\partial I / \partial x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, da cui si conclude la notissima proprietà degli invarianti assoluti di non contenere esplicitamente le variabili indipendenti. Le altre equazioni Ω_μ si potranno genericamente rappresentare con $X_{(\mu)} I = 0$; in particolare poi quella tra esse, che si ottiene, eguagliando a zero il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}},$$

sarà designata con $X^{(\varrho)}_{(\mu) p_1 p_2 \ldots p_\varrho} I = 0$.

È bene rilevare dalle formule precedenti che le φ, relative sia agli elementi di un sistema (covariante e contravariante), sia alle loro derivate, si esprimono esclusivamente per gli elementi del sistema stesso e loro derivate, talchè, come del resto è chiaro a priori, le φ di due sistemi diversi hanno per coefficienti delle derivate delle ξ quantità assolutamente indipendenti. Ora potremo porre, come si rileva dalla (18):

$$X^{(\varrho)}_{(\mu) q p_1 p_2 \ldots p_\varrho} I = \sum_{1}^{\alpha}{}_h \, R^{(\varrho)}_{\substack{hm_h \\ (\mu) q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}} I + \sum_{1}^{\beta}{}_k \, R^{(\varrho)}_{\substack{kw_k \\ (\mu) q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}} I, \tag{21}$$

purchè con

$$R^{(\varrho)}_{\substack{hm_h \\ (\mu) q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}} I, \qquad R^{(\varrho)}_{\substack{km_k \\ (\mu) q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}} I,$$

si denotino rispettivamente i coefficienti di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}}$$

in:

$$\sum_{0}^{\mu}{}_j \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{\substack{hm_h \\ r_1 r_2 \ldots r_{m_h} \} s_1 s_2 \ldots s_j}}} \varphi^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} (s_1 s_2 \ldots s_j},$$

e in

$$\sum_{0}^{\mu}{}_j \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{r_1 r_2 \ldots r_{w_h}}_{\substack{kw_k \\ ) s_1 s_2 \ldots s_j}}} \varphi^{r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{\substack{kw_k \\ (s_1 s_2 \ldots s_j}}.$$

Per la osservazione fatta, variabili di derivazione e coefficienti sono da una R ad un'altra assolutamente distinti, il che è assai utile per il calcolo della risultante jacobiana di due qualsiansi equazioni: $X_{(\mu)} I = 0$, $X'_{(\mu)} I = 0$ del sistema Ω_μ.

Siccome infatti:

$$(R_{\underset{(\mu)}{hm_h}} R'_{\underset{(\mu)}{kw_k}})I \equiv 0,$$

qualunque sieno h e k;

$$(R_{\underset{(\mu)}{hm_h}} R'_{\underset{(\mu)}{km_k}})I \equiv 0, \qquad (R_{\underset{(\mu)}{hw_h}} R'_{\underset{(\mu)}{kw_k}})I \equiv 0\,,$$

per $h \gtrless k$, si conclude:

$$(X_{(\mu)} X'_{(\mu)})I \equiv \sum_1^\alpha {}_h [R_{\underset{(\mu)}{hm_h}} R'_{\underset{(\mu)}{hm_h}}]I + \sum_1^\beta {}_k [R_{\underset{(\mu)}{kw_k}} R'_{\underset{(\mu)}{kw_k}}]I\,, \tag{22}$$

talchè, per assegnare il valore effettivo del primo membro, tutto si riduce a trovare l'espressione generica di:

$$[R_{\underset{(\mu)}{hm_h}} R'_{\underset{(\mu)}{hm_h}}]I \quad \text{e di} \quad [R_{\underset{(\mu)}{kw_k}} R'_{\underset{(\mu)}{kw_k}}]I\,.$$

Prima di accingerci effettivamente a questa ricerca, arrestiamoci un momento a determinare il numero totale delle equazioni Ω_μ e quello delle relative variabili indipendenti. Possiamo ormai prescindere dalle n equazioni $\partial I/\partial x_i = 0$ e corrispondentemente dalle variabili x_i.

Il numero totale M_μ delle equazioni equivarrà manifestamente a quello di tutte le derivate delle ξ, fino all'ordine $\mu + 1$ incluso, sarà cioè:

$$M_\mu = n\left[n + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+\mu-1}{\mu} + \binom{n+\mu}{\mu+1}\right].$$

La totalità delle variabili coincide invece colla totalità delle funzioni del sistema S e loro derivate fino all'ordine $\mu + 1$ incluso. Ora un sistema covariante o contravariante di m-esimo ordine contiene n^m elementi e quindi, insieme alle loro derivate, fino all'ordine μ incluso, dà luogo complessivamente a:

$$n^m\left[1 + n + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+\mu-1}{\mu}\right]$$

variabili.

Noi abbiamo senz'altro asserito che un sistema covariante d'ordine m contiene n^m elementi, perchè, anche se non fossero tutti distinti, nella espressione di I, si possono risguardare, non foss'altro formalmente, diversi l'uno dall'altro, così da dar in ogni caso origine alle (18). Esse ammettono sempre per soluzioni tutti gli invarianti differenziali di S, solo che, quando, per esempio, tra i sistemi assegnati ve ne abbia di simmetrici, si potranno trovare compresi tra gli invarianti i primi membri delle equazioni di simmetria o loro derivate (come $f_{12} - f_{21}$ o $f_{12)s_1 s_2 \dots s_j} - f_{21)s_1 s_2 \dots s_j}$, ecc.), che non fanno parte delle espressioni effettivamente richieste, essendo conosciuti a priori ([10]).

Ciò posto, il numero totale delle variabili indipendenti N_μ sarà espresso da:

$$N_\mu = \left\{1 + n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+\mu}{\mu+1}\right\}\left\{\sum_1^\alpha {}_h\, n^{m_h} + \sum_1^\beta {}_k\, n^{w_k}\right\}.$$

Ora, per una formula conosciuta del calcolo combinatorio:

$$1 + n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+\mu-1}{\mu} = \binom{n+\mu}{\mu}$$

ed analogamente:

$$n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+\mu-1}{\mu} + \binom{n+\mu}{\mu+1} = \binom{n+\mu+1}{\mu+1} - 1\,;$$

quindi potremo anche scrivere:

$$M_\mu = n\left\{\binom{n+\mu+1}{\mu+1} - 1\right\}, \tag{23}$$

$$N_\mu = \binom{n+\mu}{\mu}\left\{\sum_1^\alpha {}_h\, n^{m_h} + \sum_1^\beta {}_k\, n^{w_k}\right\}. \tag{24}$$

([10]) Usando le relazioni di invarianza, che eventualmente intercedessero fra gli elementi del sistema S, si potrebbe formare direttamente il sistema di equazioni analogo ad Ω_μ; ma liberato da tutte le soluzioni illusorie. Così, per esempio, nel caso che un sistema covariante o contravariante sia simmetrico, si potrebbero introdurre originariamente appena

$$\binom{n+m-1}{m}$$

variabili, risguardando, come lo sono effettivamente, identici gli elementi, che differiscono per una diversa posizione degli indici r ed estendendo, nella (18), la somma, rispetto agli indici r di quel sistema, soltanto a tutte le combinazioni con ripetizione. È tuttavia più opportuno di prendere in esame il tipo unico di equazioni (18) e quindi il conseguente sistema Ω_μ; basta aver poi cura di sceverare dalle sue soluzioni quelle, che corrispondono a relazioni di invarianza preesistenti fra gli elementi del sistema S o che da esse si possono ricavare per derivazione.

10. – Esaurita così la parte preliminare, la quale in fondo, salvo forse le relazioni (12) e (12′), non contiene che amplificazioni e sviluppi di cose già da altri indirettamente accennate, passiamo allo studio dei sistemi Ω_μ.

Cominciamo dal considerare un sistema covariante generico dell'ordine m e cerchiamo l'espressione generale di un $R^{(\varrho)m}_{(\mu)q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}$ ad esso relativo.

Per definizione (pag. 54) $R^{(\varrho)m}_{(\mu)q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}$ è il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}}$$

nell'espressione di:

$$W^m = \sum_0^\mu{}_j \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}} \varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}, \tag{24}$$

come si rileva dalla (18), indicando, per il generico valore di h, cui ci riferiamo, $f^{h m_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}$ semplicemente con $f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}$, $\varphi^{h m_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} (s_1 s_2 \ldots s_j}$ semplicemente con $\varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}$. Poniamo inoltre:

$$W^m_j = \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_w \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}} \varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}, \tag{25}$$

sicchè sarà:

$$W^m = \sum_0^\mu{}_j \mathrm{W}^m_j. \tag{26}$$

D'altra parte, per le (11) e (12):

$$W^m_j = \sum_1^{j+1}{}_\varrho \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}} \times \left[T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j} + \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}\right],$$

e quindi, se si faccia per brevità:

$$U^m_j = \sum_1^{j+1}{}_\varrho \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}} T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}, \tag{27}$$

$$V^m_j = \sum_1^j{}_\varrho \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}} \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}, \tag{28}$$

si ha manifestamente:

$$W_j^m = U_j^m + V_j^m . \tag{29}$$

Determiniamo in primo luogo il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p p_\varrho}},$$

in W_j^m. Tuttavia, allo scopo di abbreviare un po' le scritture, conveniamo di designare con p il complesso dei ϱ indici $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$, con r il complesso degli m indici $r_1, r_2, \dots, r_m$, con s il complesso degli j indici $s_1, s_2, \dots, s_j$; inoltre introduciamo anche le notazioni $\bar{p}^\tau$, $\bar{s}^\tau$, $\bar{r}^\tau$, per indicare ordinatamente i complessi p, s, r, escluso però ciascuna volta uno di quegli indici, se ve n'ha, che corrisponda al valore τ. Infine, e di ciò faremo uso costante senza ripeterlo più oltre, risguarderemo il simbolo binomiale

$$\binom{a}{b} \equiv \frac{a!}{b!\,(a-b)!},$$

eguale a zero ogni qualvolta sia a minore di b ovvero di $a-b$. Con tale convenzione avranno per noi significato espressioni del tipo

$$\binom{a-1}{a}, \quad \binom{-1}{0}, \quad \binom{-1}{-1}, \quad \text{ecc.},$$

che stanno tutte a rappresentare lo zero.

La (28), scritta per disteso, a mezzo della (10), diverrà:

$$V_j^m = -\sum_1^j{}_\varrho \sum_1^n{}_{r|s} \frac{\partial I}{\partial f_{r)s}} \sum_1^n{}_q \gamma_\varrho^j f_{r)s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho} q} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{s_{j-\varrho+1}} \partial x_{s_{j-\varrho+1}} \dots \partial x_{s_j}}.$$

In primo luogo, se $\varrho > j$, V_j^m non contiene termini del tipo

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}};$$

se $\varrho \leqslant j$, tra tutte le combinazioni con ripetizione dei nostri indici s, trascegliamo quelle, che contengono gli elementi assegnati $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$. Esse si otterranno, immaginando di fissare ϱ tra gli indici s, per esempio, $s_{j-\varrho+1}, s_{j-\varrho+2}, \dots, s_j$, col porli eguali a $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ e lasciando poi variare i rimanenti $s_1, s_2, \ldots, s_{j-\varrho}$ da 1 ad n in modo da esaurire tutte le possibili combinazioni con ripetizione. I termini trovati in tal guisa conterranno

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{r_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}},$$

ma non saranno i soli; infatti, per completare l'esame di V_j^m, sopra ciascuno di essi è da eseguire l'operazione indicata con γ_ϱ^j. Per fissare effettivamente il numero dei termini, che si ottengono in tal modo, introduciamo delle costanti $\eta_{\lambda p}$, $\eta_{\lambda s}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, le quali esprimano quanti fra gli indici $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ o rispettivamente $s_1, s_2, \ldots, s_{j-\varrho}$ sono eguali a λ. Formando le combinazioni semplici ϱ a ϱ degli j elementi $s_1, s_2, \ldots, s_{j-\varrho}, p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ considerati come distinti, quelle tra esse, che sono identiche a $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ proverranno da scambi degli $\eta_{\lambda p}$ indici p eguali a λ cogli $\eta_{\lambda s}$ indici s eguali del pari a λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$.

Il numero dei termini risultanti, per ciascun valore di λ, è manifestamente eguale a quello delle combinazioni semplici ($\eta_{\lambda s}$ a $\eta_{\lambda s}$) di $\eta_{\lambda s} + \eta_{\lambda p}$ elementi, supposti fra loro distinti. Ciò posto, chiamando $\underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{Q^m}} I$ il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{r_2} \ldots \partial x_{r_\varrho}},$$

in V_j^m, avremo:

$$(30) \qquad \begin{cases} \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{Q^m}} I = 0 & \text{per } \varrho > j, \\ = -\sum_{r|s}{}_1^n \prod_\lambda{}_1^n \dbinom{\eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} f_{r)sq} \dfrac{\partial I}{\partial f_{r)sp}} & \text{per } \varrho \leqslant j. \end{cases}$$

Si ha per le (9) e (27):

$$\underset{j}{U_m} = -\sum_{1}^{j+1}{}_\varrho \sum \frac{\partial I}{\partial f_{r)s}} \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q r_{\varrho-1}^j f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_{j-\varrho+1}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \ldots \partial x_{s_j}}.$$

Il coefficiente $\underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{P^m}} I$ di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{r_2} \ldots \partial x_{r_\varrho}},$$

in $\underset{j}{U_m}$ sarà manifestamente nullo, se $\varrho > j + 1$; nel caso invece di

$\varrho \leqslant j+1$, per aver termini contenenti

$$\frac{\partial^{\varrho} \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}},$$

bisognerà porre r_l eguale ad una delle quantità $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ e poi tutto si condurrà come precedentemente; solo è d'uopo notare che, se per esempio, si è fatto $\tau = r_l = p_\vartheta$, alle quantità p dobbiamo sostituire $\overline{p}^\tau$. Con ciò si ottiene:

$$(31)\quad \left|\begin{array}{ll} \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{P_m}} I = 0 & \text{per } \varrho > j+1\,, \\ = -\sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-} r_{l+1} \ldots r_m | s} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{\tau} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda \overline{p}^\tau} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s} \times \right. & \\ \left. \qquad \times \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) s \overline{p}^\tau}} \right\} & \text{per } \varrho \leqslant j+1\,, \end{array}\right.$$

dove la somma rispetto all'indice τ, il quale veramente dovrebbe assumere soltanto valori eguali a qualcuna delle p, si è estesa completamente fra 1 ed n, colla tacita convenzione di risguardare in ogni caso, anche quando $\eta_{\tau p} = 0$, $\eta_{\tau \overline{p}^\tau} = \eta_{\tau p} - 1$ e quindi (vedi pag. 58) $\binom{\eta_{\tau s} - 1}{\eta_{\tau s}} = 0$.
Posto:

$$(32)\qquad \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{R_m}} I = \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{P_m}} I + \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{Q_m}} I\,,$$

sarà, per le (29) e (26) $\sum_{0}^{\mu}{}_{j} \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{R_m}} I$ il coefficiente di

$$\frac{\partial^{\varrho} \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}}$$

in W e quindi, nel primo membro della corrispondente equazione di Ω, $X_{(\mu)qp} I = 0$, quella parte, che proviene dal nostro sistema covariante generico d'ordine m, sarà:

$$(33)\qquad \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}_m}} I \equiv \sum_{0}^{\mu}{}_{j} \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{R_m}} I\,.$$

In particolare, per $\varrho = \mu + 1$, dalle (30), (31) e (32) si ha:

$$\left|\begin{array}{l} \overset{(\mu+1)}{\underset{(j)qp}{R_m}} I \equiv 0\,, \qquad (j = 0, 1, \ldots, \mu - 1) \\[2ex] \overset{(\mu+1)}{\underset{(\mu)qp}{R_m}} I = \overset{(\mu+1)}{\underset{(\mu)qp}{P_m}} I, \end{array}\right.$$

e per conseguenza:

$$(33^a)\quad \overset{(\mu+1)}{\underset{(j)qp}{\mathcal{R}_m}} I = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} \sum_1^n{}_\tau \binom{\eta_{\tau \overline{p}}{}^{-\tau}}{0} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) \overline{p}^{-\tau}}}$$

Dalle quali, per $\mu = 0$:

$$(33^b)\quad \overset{(1)}{\underset{(0)qp}{\mathcal{R}_m}} I = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_1 r_{l+1} \ldots r_m}},$$

e per $\mu = 1$:

$$(33^c)\quad \left\{\begin{array}{l} \overset{(2)}{\underset{(0)qp}{\mathcal{R}_m}} I = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \dfrac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_1 r_{l+1} \ldots r_m) p_2}} \qquad \text{per } p_1 = p_2\,, \\[3ex] = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \left[\dfrac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_1 r_{l+1} \ldots r_m) p_2}} + \dfrac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_2 r_{l+1} \ldots r_m) p_1}}\right]. \\ \hfill \text{per } p_1 \gtrless p_2\,, \end{array}\right.$$

Calcoliamo ancora il valore di $\overset{(1)}{\underset{(\mu)qp}{\mathcal{R}_m}} I$, che è:

$$(33^c)\quad \overset{(1)}{\underset{(\mu)qp}{\mathcal{R}_m}} I = \sum_1^\mu{}_j \overset{(1)}{\underset{(j)qp}{R_m}} I = \sum_1^\mu{}_j \overset{(1)}{\underset{(j)qp}{P_m}} I + \sum_1^\mu{}_j \overset{(1)}{\underset{(j)qp}{Q_m}} =$$

$$= \sum_0^\mu{}_j \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m | s_1 s_2 \ldots s_j} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_m) s}}$$

$$- \sum_0^\mu{}_j \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m | s_1 s_2 \ldots s_{j-1}} (1 + \eta_{ps}) f_{r) s_1 s_2 \ldots s_{j-1} q} \frac{\partial I}{\partial f_{r) s_1 s_2 \ldots s_{j-1} q}}\,.$$

11. – Pei sistemi contravarianti, fissatone al solito il rappresentante generico Z^w, potremo scrivere senz'altro, conservando le notazioni pre-

cedenti:

$$W_w = \sum_0^\mu {}_j \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_w \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{r_1 r_2 \dots r_w}_{)s_1 s_2 \dots j}} \varphi^{r_1 r_2 \dots r_w}_{(s_1 s_2 \dots s_j}, \tag{24'}$$

$$\underset{j}{W_w} = \sum_1^n {}_{r \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^r_{)s_1 s_2 \dots s_j}} \varphi^r_{(s_1 s_2 \dots s_j}, \tag{25'}$$

$$W_w = \sum_0^\mu \underset{j}{W_w}, \tag{26'}$$

$$\underset{j}{U_w} = \sum_1^{j+1} {}_\varrho \sum_1^n {}_{r \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^r_{)s_1 s_2 \dots s_j}} T^{(\varrho) r}_{(j)(s_1 s_2 \dots s_j}, \tag{27'}$$

$$\underset{j}{V_w} = \sum_1^{j+1} {}_\varrho \sum_1^n {}_{r \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^r_{)s_1 s_2 \dots s_j}} \Theta^{(\varrho) r}_{(j) s_1 s_2 \dots s_j}, \tag{28'}$$

$$\underset{j}{W_w} = \underset{j}{U_w} + \underset{j}{V_w}, \tag{29'}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \overset{(\varrho)}{\underset{(j)qp}{Q_w}} I = 0 && \text{per } \varrho > j, \\ & = \sum {}_{r \mid s} \prod_1^n {}_\lambda \binom{\eta_{\lambda q} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} f^r_{)sq} \frac{\partial I}{\partial f^r_{)sp}} && \text{per } \varrho \leqslant j, \end{aligned} \right. \tag{30'}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \overset{(\varrho)}{\underset{(j)qp}{P_w}} I = 0 && \text{per } \varrho > j+1 \\ & = \sum_1^w {}_l \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_w \mid s} \sum_1^n {}_\tau \prod_1^n {}_\lambda \binom{\eta_{\lambda \bar{p} \tau} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \times \\ & \times f^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_w}_{)s} \frac{\partial I}{\partial f^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_w}_{s_{\bar{p}} \tau}} && \text{per } \varrho \leqslant j+1. \end{aligned} \right. \tag{31'}$$

Questa formula (31′) si trova anch'essa in modo identico alla corrispondente (31), purchè, nella espressione di $\underset{j}{U_w}$, si abbia cura di scambiare fra loro i due indici r_l e q. Si dovrà poi fare:

$$\overset{(\varrho)}{\underset{(j)qp}{R_w}} I = \overset{(\varrho)}{\underset{(j)qp}{P_w}} I + \overset{(\varrho)}{\underset{(j)qp}{Q_w}} I, \tag{32'}$$

sicchè sarà:

$$(33') \qquad \overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{w}_{(\mu)qp} I = \sum_{0}^{\mu}{}_j \overset{(\varrho)}{R}{}^{w}_{(j)qp} I, \quad \text{ecc.}$$

12. – Ritorniamo al nostro sistema covariante Z_m e calcoliamoci la risultante jacobiana $\left(\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)qp} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)q'p'}\right) I$. Essendo, per la (33), $\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)qp} I = \overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} I + \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)qp} I$ ed analogamente $\overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)q'p'} I = \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'} I + \overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)q'p'} I$, potremo porre:

$$(34) \quad \left(\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)qp} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)q'p'}\right) I = \left(\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'}\right) I + \overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)qp} \overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'} I -$$
$$- \overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)q'p'} \overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} I + \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)qp} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'} I - \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)q'p'} \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu-1)qp} I .$$

Prescindendo, come faremo sempre in seguito, dai termini contenenti le derivate seconde di I, i quali si elidono identicamente, noi abbiamo in primo luogo $-\overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)q'p'} \overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} I \equiv 0$, perchè i coefficienti di $\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} I$ contengono $m + j - (\varrho - 1) \leqslant m + \mu - 1$ $(j = 0, 1, \ldots, \mu - 1)$ indici, mentre le variabili di derivazione di $\overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)q'p'} I$ sono munite di $m + \mu$ indici. Nello stesso modo si riconosce che $\overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)qp} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'} I \equiv 0$. Restano pertanto da determinare $\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} \overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)q'p'} I$ e $-\overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'} \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)qp} I$, le quali espressioni per brevità chiameremo rispettivamente C e D; la (34) diverrà:

$$(34^{bis}) \qquad \left(\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)qp} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu)q'p'}\right) I = \left(\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'} \overset{(\varrho')}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)q'p'}\right) I + C + D .$$

Avendosi $\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}}{}^{m}_{(\mu-1)qp} I = \sum_{0}^{\mu}{}_j \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(j)qp} I$ e d'altra parte, per le ragioni accennate:

$$\overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(j)qp} \overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)q'p'} I \equiv 0 \qquad (j \geqq \mu - \varrho' + 1),$$

ne deduciamo:

$$C = \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu-\varrho'+1)qp} \overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu)qp} I .$$

Analogamente sarà:

$$D = -\overset{(\varrho')}{R}{}^{m}_{(\mu-\varrho+1)q'p'} \overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)qp} I .$$

Segue immediatamente dalle (30), (31) e (32), $C = D = 0$ tutte le volte che $\varrho' > \mu - \varrho + 2$ ossia $\varrho + \varrho' - 1 > \mu + 1$.

Assai più laboriosa è la determinazione di C e D, quando $\varrho + \varrho' - 1 \leqslant \mu + 1$; questa ipotesi abbraccerà buon tratto degli sviluppi del presente paragrafo.

Avremo:

$$C = \underset{(\mu-\varrho'+1)qp}{P_m^{(\varrho)}} \underset{(\mu)q'p'}{P_m^{(\varrho')}} I + \underset{(\mu-\varrho'+1)q'p'}{P_m^{(\partial)}} \underset{(\mu)q'p'}{Q_m^{(\varrho')}} I$$
$$+ \underset{(\mu-\varrho'+1)qp}{Q_m^{(\varrho)}} \underset{(\mu)q'p'}{P_m^{(\varrho')}} I + \underset{(\mu-\varrho'+1)qp}{Q_m^{(\varrho)}} \underset{(\mu)q'p'}{Q_m^{(\varrho')}} I,$$

i quali addendi, allo scopo di guadagnare un po' in concisione, chiameremo ordinatamente C_1, C_2, C_3, C_4. Sarà quindi:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \tag{35}$$

e corrispondentemente:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4. \tag{36}$$

Occupiamoci per ora del valore di C; nella espressione di C_1, che calcolata a mezzo della (31), sarà:

$$C_1 = \sum_1^m{}_{ll'} \sum_1^n{}_{\substack{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid s, \\ r_1' r_2' \ldots r_{l'-1}' r_{l'+1}' \ldots r_m' \mid s'}} \left\{ \sum_1^n{}_{\tau\tau'} \prod_1^n \binom{\eta_{\lambda \bar{p}^\tau} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} \times \right.$$
$$\left. \times f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s} \frac{\partial f_{r_1' r_2' \ldots r_{l-1}' q' r'_{l+1} \ldots r_m') s'}}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}^\tau}} \frac{\partial f}{\partial f_{r_1' r_2' \ldots r_{l'-1}' \tau' r_{l'+1}' \ldots r_m') s \bar{p}^{\tau'}}} \right\};$$

facciamo dapprima $l \lesseqgtr l'$ e indichiamo con C_1' il complesso dei termini, che vi corrispondono. Affinchè il fattore

$$\frac{\partial f_{r_1' r_2' \ldots r_{l'-1}' q' r_{l'+1}' \ldots r_m') s'}}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}^\tau}},$$

non sia identicamente nullo, è d'uopo supporre in primo luogo $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2, \ldots,$ $r_{l-1}' = r_{l-1}$, $r_l' = \tau$, $r_{l'+1}' = r_{l+1}, \ldots,$ $r_{l'-1}' = r_{l'-1}$ $q' = r_{l'}$, $r_{l'+1}' = r_{l'+1}, \ldots,$ $r_m' = r_m$; fra gli indici s_1', s_2', ..., $s_{\mu+1-\varrho'}$ bisognerà poi sceglierne $\varrho - 1$ eguali a $\bar{p}^\tau$ e i rimanenti $\mu + 2 - \varrho - \varrho'$ farli ordinatamente coincidere con s. Per evitare ambiguità, indichiamo con t gli indici s, che restano variabili ed esprimiamo $\eta_{\lambda s}$, $\eta_{\lambda s'}$ per $\eta_{\lambda t}$.

Abbiamo immediatamente, non essendosi cambiata che la denominazione, $\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t}$; quanto agli indici s', $\mu + 1 - \varrho'$ son già fissati ed eguali a $\overline{p}^{\tau}$, i rimanenti coincidono con t. Sarà pertanto: $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}$. Ora, essendo $\eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda \overline{p}'^{\tau'}}$ manifestamente eguale a $\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]}$ e d'altra parte:

$$\binom{\eta_{\lambda\overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \binom{\eta_{\lambda\overline{p}'^{\tau'}} + \eta_{\lambda\overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda\overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}} = \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau}]} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]})!}{\eta_{\lambda\overline{p}^{\tau}}!\, \eta_{\lambda\overline{p}^{\tau}}!} \quad (^{11}),$$

verrà:

$$(37) \qquad C_1' = \sum_1^m{}_{ll'} \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{l'-1} r_{l'+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^m{}_{\tau\tau'} \prod_1^n{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\times \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]})!}{\eta_{\lambda\overline{p}^{\tau}}!\, \eta_{\lambda\overline{p}'^{\tau'}}} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{l'-1} q' r_{l'+1} \dots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_{l'-1} q' r_{l'+1} \dots r_m) t \overline{p}^{\tau} \overline{p}'^{\tau'}}},$$

da cui apparisce che C_1' è indipendente dalla posizione speciale, che in C_1 occupano le quantità non accentate di fronte a quelle accentate.

Supponendo ora $l = l'$, troveremo la rimanente parte di C_1, che chiameremo C_1''. Se $q' \gtrless \tau$, sarà necessariamente

$$\frac{\partial f_{r_1' r_2' \dots r_{l-1}' q' r_{l+1}' \dots r_m') s'}}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_m) s \overline{p}^{\tau}}} = 0;$$

perciò bisogna anche fissare $\tau = q'$. Operando del resto come precedentemente, verrà:

$$C_1'' = \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^n{}_{\tau'} \prod_1^n{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}^{q'} + \overline{p}'^{\tau'}]} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}^{q'} + \overline{p}'^{\tau'}]})!}{\eta_{\lambda\overline{p}^{q'}}!\, \eta_{\lambda\overline{p}'^{\tau'}}!} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t \overline{p}^{q'} \overline{p}'^{\tau'}}} \right\}.$$

(11) Questa identità e alcune altre, riportate nelle pagine seguenti 66, 67, 68, 69, 71, 72 sono evidentissime, finchè i simboli binomiali si mantengono nel campo consueto. È facile però riconoscere che esse sussistono ancora, quando detti simboli si immaginino estesi secondo le convenzioni, di cui a pag. 58. Così, per es., riferendoci alla relazione qui sopra indicata, si vede che essa vale anche nel caso, in cui, per $\eta_{\tau\overline{p}^{\tau}}$ ovvero $\eta_{\tau'\overline{p}^{\tau'}}$ eguali a -1, i fattoriali portino sopra quantità negative. Ed invero, se ciò accade, tanto il primo che il secondo membro, per le nostre convenzioni, si annullano, onde la eguaglianza sussiste ancora. Analogamente per le altre relazioni della stessa natura.

Ma è:

$$\frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}q' + \overline{p}'\tau']})!}{\eta_{\lambda\overline{p}q'}!\,\eta_{\lambda\overline{p}'\tau'}!} = \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}q' + p']})!}{\eta_{\lambda\overline{p}q'}!\,\eta_{\lambda p'}!}$$

per $\lambda \lessgtr \tau'$; e, per $\lambda = \tau'$,

$$\frac{(\eta_{\tau'[\overline{p}q' + \overline{p}'\tau']})!}{\eta_{\tau'\overline{p}q'}!\,\eta_{\tau'\overline{p}'\tau'}!} = \frac{(\eta_{\tau'[\overline{p}'q' + p']})!}{\eta_{\tau'\overline{p}q'}!\,\eta_{\tau'p'}!}\,\frac{\eta_{\tau'p'}}{\eta_{\tau'\overline{p}q'} + \eta_{\tau'p'}},$$

quindi, ponendo

$$H_{\overline{p}q'p'} = \prod_{1}^{n}{}_{\lambda}\left[\frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}q' + p']})!}{\eta_{\lambda\overline{p}q'}!\,\eta_{\lambda p'}!}\right] \tag{38}$$

ed osservando che $H_{\overline{p}q'p'}$ è indipendente da tutti gli indici di sommatoria, si potrà scrivere:

$$C_1'' = H_{\overline{p}q'p'} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \sum_{1}^{n}{}_{\tau'} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}q' + \overline{p}'\tau']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times$$
$$\times \frac{\eta_{\tau'\overline{p}q'} + \eta_{\tau'p'}}{\eta_{\tau'p'}} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1}\tau' r_{l+1} \dots r_m)t\overline{p}q'\overline{p}'\tau'}}. \tag{39}$$

Abbiamo:

$$C_2 = P^{(\varrho)}_{\substack{m \\ (\mu+1-\varrho')qp}} Q^{(\varrho')}_{\substack{m \\ (\mu)q'p'}} I =$$
$$= \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{\substack{r_1 r_2 \dots r_l{}_{-1} r_{l+1} \dots r_m \mid s \\ r' \qquad\qquad\quad \mid s'}} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{\tau} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda\overline{p}\tau'} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda p'} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} \times \right.$$
$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)s} \frac{\partial f_{r')s'q'}}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1}\tau' r_{l+1} \dots r_m)s\overline{p}\tau'}} \frac{\partial I}{\partial f_{r')s'p'}} \right\}.$$

Perchè sia

$$\frac{\partial f_{r's')q'}}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1}\tau' r_{l+1} \dots r_m)s\overline{p}\tau'}};$$

diverso da zero, bisogna supporre $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$, ..., $r_{l-1}' = r_{l-1}$, $r_l' = \tau'$,

$r'_{l+1} = r_{r+1}, \ldots, r'_m = r_m$ e quindi identificare il complesso degli indici s', q' ad $s\bar{p}^{\tau'}$. Gioverà a tale scopo distinguere i due casi $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} = 0$ ed $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} > 0$. Per quei valori di τ', per cui riesce $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} = 0$, fra gli indici variabili $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu+2-\varrho-\varrho'}$, uno deve prendersi eguale a q', mentre i $\mu - \varrho'$ indici s' complessivamente hanno a coincidere con $\bar{p}^{\tau'}$, $\bar{s}^{\tau'}$, che sono, come è evidente, in numero di $(\varrho - 1) + (\mu + 2 - \varrho - \varrho' - 1) = \mu - \varrho'$.

Gl'indici s rimasti variabili, in numero di $\mu + 1 - \varrho - \varrho'$, come precedentemente, chiameremo t e sarà:

$$\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t} \quad \text{per} \quad \lambda \lesseqgtr q', \qquad \eta_{q's} = \eta_{q't} + 1, \qquad \eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda t}.$$

Eseguendo talune riduzioni, analoghe affatto alle precedenti, ove si ponga:

$$H_{pp'} = \prod_1^n {}_\lambda \left[\frac{\eta_{\lambda[p+p']}!}{\eta_{\lambda p}!\, \eta_{\lambda p'}!} \right], \tag{40}$$

l'addendo di C_2, che corrisponde ad un valore τ', per cui $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} = 0$, si trova essere:

$$H_{\tau p'} \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^n {}_\lambda \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau' p'}} \times \right.$$
$$\left. \times f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) t p' \bar{p}^{\tau'}}} \right\}.$$

Quando invece $\eta_{p'\bar{p}^{\tau'}} > 0$, allora l'identità fra s' q', $s\bar{p}^{\tau'}$ si può stabilire, anche senza porre uno degli indici s eguale a q'; basta assumere i $\mu - \varrho$ indici s' coincidenti con $s\bar{p}^{\tau' q'}$. Avremo pertanto, conservando per un momento il simbolo s agli indici variabili: $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \bar{p}^{\tau' q'}} + \eta_{\lambda s}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, od anche $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s}$ $(\lambda \gtrless q')$, $\eta_{q' s'} = \eta_{q' \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q' s} - 1$. Come sopra:

$$\binom{\eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s}} = \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']})!}{\eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}}!\, \eta_{\lambda p'}!} \qquad (\lambda \lesseqgtr q')$$

e

$$\binom{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{q's} - 1}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1} =$$

$$= \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{q's} - 1)!}{(\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1)!\, \eta_{q'p'}!} \frac{(\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's})!}{\eta_{q's}!\, \eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!} = \frac{[\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + (\eta_{q's} - 1)]!}{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!\, \eta_{q'p'}!} \times$$

$$\times \frac{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,(\eta_{q's} - 1)!}\left[1 + \frac{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}}{\eta_{q's}}\right] = \frac{[\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + (\eta_{q's} - 1)]!}{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!\,\eta_{q'p}\,!} \times$$

$$\times \frac{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,(\eta_{q's} - 1)!} + \frac{[\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+x']} + \eta_{q's}]!}{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'} + \eta_{q's}]!\,\eta_{q'x'}!}\,\frac{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'} + \eta_{q's}]!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'}!\,\eta_{q's}!} \times$$

$$= \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + (\eta_{q's} - 1)}{(\eta_{q's} - 1)}\frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+x']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{q'x'}!} + \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+p']} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \times$$

$$\times \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{q'p'}!}.$$

Corrispondentemente a questi due termini, da cui risulta l'espressione di

$$\binom{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}}\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+x']} + \eta_{q's} - 1}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1},$$

l'addendo di C_2, che spetta ad ogni τ', per cui $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} > 0$, si scinde in due parti, cioè:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1r_2\ldots r_{l-1}r_{l+1}\ldots r_m\,|\,s}\left\{\prod_1^n{}_\lambda^{q'}\binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+x']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}}\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{\lambda p'}!}\times\right.$$

$$\left.\times\binom{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}[+x']} + (\eta_{q's} - 1)}{(\eta_{q's} - 1)}\frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+x']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}:\eta_{q'p'}!}\,f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}q\,r_{l+1}\ldots r_m)s}\,\frac{\partial I}{\partial f_{r_1r_2\ldots l-1\tau'r_{l+1}\ldots r_m)s\bar{p}^{\tau'}q'p'}}\right\}$$

e:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1r_2\ldots r_{l-1}r_{l+1}\ldots r_m\,|\,s}\left\{\prod_1^n{}_\lambda^{q'}\binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}}\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+x']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{\lambda p'}!}\times\right.$$

$$\left.\times\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+p']} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}}\frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'}!\,\eta_{q'x'}!}\,f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}q\,r_{l+1}\ldots r_m)s}\,\frac{\partial I}{\partial f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}\tau'r_{l+1}\ldots r_m)s\bar{p}^{\tau'}q'x'}}\right\}.$$

Rispetto alla prima parte, è inutile supporre $\eta_{q's} = 0$, chè altrimenti, essendo zero il fattore

$$\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+x']} + (\eta_{q's} - 1)}{(\eta_{q's} - 1)}$$

(pag. 58), essa si annulla.

Possiamo adunque fin d'ora fissare un indice s eguale a q' e lasciarne variabili soltanto $\mu + 1 - \varrho - \varrho'$, il cui complesso chiameremo l; sarà $\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t}$ $(\lambda \gtrless q')$, $\eta_{q's} - 1 = \eta_{q't}$, perciò l'espressione precedente diverrà:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\lambda p'}!} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t \bar{p}\tau' p'}} \right\},$$

od anche, ricordando che:

$$\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}\tau+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\lambda p'}!} = \frac{(\eta_{\lambda[p+p']})!}{\eta_{\lambda p}!\,\eta_{\lambda p'}!} \qquad (\lambda \gtrless \tau'),$$

$$\frac{(\eta_{\tau'[\bar{p}\tau'+p']})!}{\eta_{\tau'\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\tau' p'}!} = \frac{(\eta_{\tau'[p+p']})!}{\eta_{\tau' p}!\,\eta_{\tau' p'}!} \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau' p'}},$$

e la (40):

$$H_{pp'} \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau' p'}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_{12} \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t \bar{p}\tau' p'}} \right\},$$

la quale prima parte è identica all'unico addendo, che proviene da quei τ', per cui $\eta_{q'\tau'} = 0$. Ne segue, sommando rispetto a τ' da 1 ad n, che C_2 contiene un primo gruppo di termini:

$$(41) \qquad C_2' = H_{pp'} \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^s{}_{\tau'} \prod_1^n{}_\lambda \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau' p'}} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m \mid t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t \bar{p}\tau' p'}} \right\}.$$

Quando $\eta_{q'\bar{p}\tau'} > 0$, abbiamo trovato l'ulteriore addendo:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda^{q'} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau' q'+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\lambda p'}!} \times \right.$$

$$\left. \times \binom{\eta_{q'[\bar{p}\tau' q'+p']} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \frac{(\eta_{q'[\bar{p}\tau' q'+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}\tau' q'}!\,\eta_{q' p'}!} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) s \bar{p}\tau' q' p'}} \right\},$$

il quale, osservando che $\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']} = \eta_{\lambda[\bar{p}\tau'q'+p']}$, $\eta_{\lambda\bar{p}\tau'} = \eta_{\lambda\bar{p}\tau'q'}$ $(\lambda \gtrless q')$, in virtù della (38), fattovi anche $s = l$, potrà essere scritto:

$$H_{\bar{p}q'p'} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'q'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{\eta_{\tau'\bar{p}q'}}{\eta_{\tau'\bar{p}q'} + \eta_{\tau'p'}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t \bar{p} \tau' q' p'}} \right\}.$$

Se $\eta_{q'\bar{p}\tau'} > 0$ per ogni valore di τ', sommando rispetto a τ' da uno ad n, troviamo la seconda parte di C_2:

$$(42) \qquad C_2'' = H_{\bar{p}q'p'} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_1 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{\tau'} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'q'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t p \tau' \bar{p}' q'}} \right\}.$$

È facile però riconoscere che si ha, in qualunque caso:

$$(43) \qquad C_2 = C_2' + C_2'' ;$$

ed in vero, se per ogni valore di τ', $\eta_{q'\bar{p}\tau'} = 0$, allora manca la seconda parte C_2'', ma la (43) sussiste sempre, perchè da $\eta_{q'\bar{p}\tau'} = 0$ $(\tau' = 1, 2, \dots n)$, segue $\eta_{q'p} = 0$ e quindi (pag. 58) $H_{q'\bar{p}\tau'} = 0$. Se poi $\eta_{q'\bar{p}\tau'} > 0$ $(\tau' \gtrless q')$, ma $\eta_{q'\bar{p}\tau'} = 0$ (altri casi non sono evidentemente possibili), la somma rispetto a τ' dovrebbe escludere il valore q'; tuttavia il valore di detta somma è anche in questo caso C_2'', poichè il termine, che proverrebbe dal fare $\tau' = q'$, è nullo, contenendo $\eta_{q'\bar{p}q'}$ a fattore.

Più spedita indagine avuto riguardo alle cose dette, può essere istituita rispetto a C_3. Infatti essendo:

$$C_3 = \underset{(\mu-\varrho'+1)qp}{\overset{(\varrho)}{Q_m}} \; \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho)}{P_m}} \; I =$$

$$= \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1'' r_2' \dots r_{l-1}' \overset{r}{r_{l+1}'} \dots r_m' \mid s'}^{\mid s'} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{\tau'} \prod_{1}^{n} \binom{\eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda \bar{p}'\tau'} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r)sq} \frac{\partial f_{r_1' r_2' \dots r_{l-1}' q' r_{l+1}' \dots r_m')s'}}{\partial f_{r)sq}} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1' r_2' \dots r_{l-1}' \tau' r_{l+1}' \dots r_m')s' \bar{p}' \tau' q'}} \right\},$$

la parte finita si otterrà, facendo $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2, \ldots,$ $r'_{l-1} = r_{l-1}$, $q' = r_l$, $r'_{l+1} = r_{l+1}, \ldots,$ $r'_m = r_m$ e fissando gli indici s' col porli eguali ad s, p. Se si designano con t i $\mu + 2 - \varrho - \varrho'$ indici s rimasti variabili e si osserva al solito che $\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t}$, $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda t}$, ponendo mente anche alla (40), si trova senza difficoltà:

$$(44) \qquad C_3 = H_{p\mathfrak{p}'} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \sum_{1}^{m}{}_{\tau'} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[p + \bar{p}'\tau']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\eta_{\tau'\mathfrak{p}'}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau'\mathfrak{p}'}} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) tq} \right\}.$$

Infine, passando a:

$$C_4 = \underset{(\mu - \varrho' + 1) q p}{\overset{(\varrho)}{Q_m}} \; \underset{(\mu) q' \mathfrak{p}'}{\overset{(\varrho')}{Q_m}} I =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{\substack{r \mid s \\ r' \mid s'}} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda \mathfrak{p}'} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} f_{r) s q} \frac{\partial f_{r') s' q'}}{\partial f_{r) s p}} \frac{\partial I}{\partial f_{r') s' \mathfrak{p}'}},$$

se $\eta_{q'p} = 0$, si calcolerà la parte non nulla C'_4, facendo $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2$, $\ldots,$ $r'_m = r_m$, uno degli indici s eguale a q' e finalmente $s' \equiv \bar{s}^{q'} p$. Chiamando sempre t il complesso dei $\mu + 1 - \varrho - \varrho'$ indici s, rimasti variabili, col solito metodo, in virtù della (40):

$$(45) \qquad C'_4 = H_{p\mathfrak{p}'} \sum_{1}^{n}{}_{r \mid t} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[p + \mathfrak{p}']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} f_{r) t q q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r) p \mathfrak{p}' t}}.$$

Se all'incontro $\eta_{q'p} > 0$, potremo lasciar variare tutti gli indici s, purchè si assuma $s' \equiv s\bar{p}^{q'}$; abbiamo:

$$\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \bar{p}^{q'}} + \eta_{\lambda s} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \qquad \eta_{\lambda p} = \eta_{\lambda \bar{p}^{q'} p} \qquad (\lambda \gtrless q'),$$

$$\eta_{q'p} = \eta_{q' \bar{p}^{q'}} + 1,$$

e al solito:

$$\binom{\eta_{\lambda \bar{p}^{q'}} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda[\mathfrak{p}' + \bar{p}^{q'}]} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda \bar{p}^{q'}} + \eta_{\lambda s}} = \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'} + \mathfrak{p}']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'} + \mathfrak{p}')})!}{\eta_{\lambda \bar{p}^{q'}}! \, \eta_{\lambda \mathfrak{p}'}!} \qquad (\lambda \gtrless q'),$$

mentre:

$$\binom{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}+1}{\eta_{q's}}\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}=\left\{\binom{\eta_{q'\bar{p}^{p'}}+\eta_{q's}}{\eta_{q's}}+\right.$$

$$\left.+\binom{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}{(\eta_{q's}-1)}\right\}\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}=\binom{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}{\eta_{q's}}\times$$

$$\times\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}+\binom{\eta_{q'p}+(\eta_{q's}-1)}{(\eta_{q's}-1)}\binom{\eta_{q'[p+p']}+(\eta_{q's}-1)}{\eta_{q'p}+(\eta_{q's}-1)}=$$

$$=\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q's}}\frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}!\,\eta_{q'p'}!}+\binom{\eta_{q'[p+p']}+(\eta_{q's}-1)}{(\eta_{q's}-1)}\frac{(\eta_{q'[p+p']})!}{\eta_{q'p}!\,\eta_{q'p'}!}.$$

Dal primo di questi addendi, ponendo t per s, nasce il termine:

$$(46)\qquad C_4''=H_{\bar{p}^{q'}p'}\sum_1^n{}_{r\,|\,t}\prod_1^n{}_\lambda\binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}}f_{r)tq}\frac{\partial I}{\partial f_{r)t\bar{p}^{q'}p'}}=$$

$$=H_{\bar{p}^{q'}p'}Q^{(\varrho+\varrho'-1}_{\substack{m\\(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p]}}I\,.$$

Quanto al secondo, per le nostre convenzioni, esso è nullo ogni qualqualvolta $\eta_{q's}=0$, perchè contiene

$$\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+(\eta_{q's}-1)}{(\eta_{q's}-1)}=0\,,$$

a fattore. Si può quindi addirittura immaginare attribuito il valore fisso q' ad uno degli indici s e, chiamando t i rimanenti $\mu-\varrho-\varrho'$ indici s variabili, basta ripetere in modo identico il ragionamento fatto a proposito di C_2, per stabilire che questa seconda porzione di C_4 è ancora C_4'. Nel caso, adunque, in cui $\eta_{q'\bar{p}^{q'}}>0$, abbiamo trovato:

$$(47)\qquad C_4=C_4'+C_4'',$$

mentre per $\eta_{q'\bar{p}^{q'}}=0$, era identicaments $C_4=C_4'$; è facile però rilevare che la (47) vale in generale, inquantochè, per $\eta_{q'\bar{p}^{q'}}=0$, C_4'' svanisce.

Ora dalle (31), (39) e (42) si ha:

$$(48)\qquad C_1''+C_2''=-H_{\bar{p}^{q'}p'}P^{(\varrho+\varrho'-1)}_{\substack{m\\(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p']}}I\,,$$

poichè, se per un certo valore di τ', tanto $\eta_{\tau'\bar{p}^{q'}} > 0$, quanto $\eta_{\tau' p'} > 0$, ne viene $\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+\bar{p}',\tau']} = \eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}\tau'+p']} = \overline{\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+p']}}^{\,\tau'}$; se invece $\eta_{\tau'\bar{p}^{q'}} = 0$, ma $\eta_{\tau' p'} > 0$, $\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+\bar{p}',\tau']} = \eta_{\lambda\overline{[\bar{p}^{q'}]}^{\,\tau'}+p'}$; finalmente, quando $\eta_{\tau'\bar{p}^{q'}} > 0$, mentre $\eta_{\tau' p'} = 0$, allora $\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}\tau'+p']} = \eta_{\lambda\overline{[\bar{p}^{q'}+p']}^{\,\tau'}}$. Osserviamo ancora che le tre quantità C'_1, $C'_2 + C_3$, C'_4, come apparisce dalle (37), (41), (44) e (46), si comportano in modo affatto simmetrico, rispetto alla posizione, che occupano gli indici accentati di fronte a quelli non accentati. Cambiata la posizione relativa degli uni rispetto agli altri, il che appunto accade in D, si devono riprodurre delle quantità identiche a C'_1, $C'_2 + C_3$, C'_4; siccome però in D anche i segni sono cambiati, così, nella somma $C+D$, le quantità C'_1, $C'_2 + C_3$, C'_4 si elideranno colle corrispondenti D'_1, $D'_2 + D_3$, D'_4. Resterà pertanto: $C + D = C''_1 + C''_2 + C''_4 + D''_1 + D''_2 + D''_4$, ossia, per le (46), (48), (32), ritenuto che D differisce da C per il segno e per l'inversione fra le lettere accentate e le non accentate:

$$C + D = -H_{\bar{p}^{q'}p'} R^{(\varrho+\varrho'+1)}_{m\,(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p']} I + H_{p\bar{p}'^{q}} R^{(\varrho+\varrho'-1)}_{m\,(\mu)q'[p+\bar{p}^{q}]} I, \tag{49}$$

la qual relazione, ricordando quanto si è detto a pag. 64, vale per $\varrho + \varrho' - 1 \leqslant \mu + 1$, mentre $C + D$ è nullo se $\varrho + \varrho' - 1 > \mu + 1$; ma in questo caso, come segue dalle (30), (31), (32), anche il secondo membro della (49) si annulla, dunque la (49) stessa fornisce l'espressione generale di $C + D$.

La (34^{bis}) diviene ormai:

$$\left\{ \mathcal{R}^{(\varrho)}_{m\,(\mu)qp} \; \mathcal{R}^{(\varrho')}_{m\,(\mu)q'p'} \right\} I = \left\{ \mathcal{R}^{(\varrho)}_{m\,(\mu-1)qp} \; \mathcal{R}^{(\varrho')}_{m\,(\mu-1)q'p'} \right\} I$$

$$- H_{\bar{p}^{q'}p'} R^{(\varrho+\varrho'-1)}_{m\,(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p']} I + H_{p\bar{p}^{q'}} R^{(\varrho+\varrho'-1)}_{m\,(\mu)q'[p+\bar{p}'^{q}]} I .$$

Cambiando μ in $\mu - 1$, poi in $\mu - 2$ e così successivamente fino ad 1, e sommando infine membro a membro si trova:

$$\left\{ \mathcal{R}^{(\varrho)}_{m\,(\mu)pq} \; \mathcal{R}^{(\varrho')}_{m\,(\mu)q'p'} \right\} I = \left\{ \mathcal{R}^{(\varrho)}_{m\,(0)qp} \; \mathcal{R}^{(\varrho')}_{m\,(0)q'p'} \right\} I$$

$$- H_{\bar{p}^{q'}p'} \sum_{1}^{\mu}{}_{j} R^{(\varrho+\varrho'-1)}_{m\,(j)q[\bar{p}q'+p']} I + H_{p\bar{p}'^{q}} \sum_{1}^{\mu}{}_{j} R^{(\varrho+\varrho'-1}_{m\,(j)q'[p+\bar{p}'q]} I .$$

Se si osserva che $\mathcal{R}_{(0)}$ è in ogni caso identico a $R_{(0)}$, e quindi che il primo termine del secondo membro può essere scritto:

$$\underset{(0)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}_m}}\ \underset{(0)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R_m}}\ I - \underset{(0)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}_m}}\ \underset{(0)qp}{\overset{(\varrho)}{R_m}}\ I = C + D$$

(per il caso speciale di $\mu = 0$), avremo, applicando ancora la (49):

$$(50)\qquad \left\{ \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}_m}}\ \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}_m}} \right\} I = -H_{\bar{p}q'p'} \underset{(\mu)q[\bar{p}q'+p']}{\overset{(\varrho+\varrho'-1)}{\mathscr{R}_m}} I + H_{p\bar{p}'q} \underset{(\mu)q'[p+\bar{p}'q]}{\overset{(\varrho+\varrho'-1)}{\mathscr{R}_m}} I\,,$$

la quale è appunto la relazione, che ci importava di stabilire.

13. – Pei sistemi contravarianti si può operare in modo analogo a quello seguito finora; risparmiandoci di ripetere qui tutto il calcolo, ci accontentiamo di accennare il risultato finale, che è identico a quello or ora trovato. Si ha cioè per un sistema generico contravariante Z^w:

$$(50')\qquad \left\{ \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^w}}\ \underset{(\varrho)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^w}} \right\} I = -H_{\bar{p}q'p'} \underset{(\mu)q[\bar{p}q'+p']}{\overset{(\varrho+\varrho'-1)}{\mathscr{R}^w}} I + H_{p\bar{p}'q} \underset{(\mu)q'[p+\bar{p}'q]}{\overset{(\varrho+\varrho'-1)}{\mathscr{R}^w}} I\,.$$

Riprendiamo ormai la (21) e poniamovi nel secondo membro, in luogo delle risultanti jacobiane, i loro valori desunti dalle (50) e (50′); verrà:

$$(51)\qquad \left\{ X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} X^{(\varrho')}_{(\mu)q'p'} \right\} I = -H_{\bar{p}q'p'} X^{(\varrho+\varrho'-1)}_{(\mu)q[\bar{p}q'+p']} I + H_{p\bar{p}'}{}^{q} X^{(\varrho+\varrho'-1)}_{(\mu)q'[p+\bar{p}'q]} I\,,$$

la quale infine non solo dimostra che il nostro sistema Ω_μ è incondizionatamente completo, ma, essendo $H_{\bar{p}q'p'}$, $H_{q\bar{p}'}{}^{q}$ fattori puramente numerici, ci dice ([12]) altresì che le equazioni Ω_μ definiscono un gruppo finito G_μ di trasformazioni nelle variabili f e loro derivate. Questo gruppo è al più M_μ-metrico (M_μ-gliedrig), essendo costituito da M_μ trasformazioni infinitesime, che potrebbero però non esser tutte linearmente indipendenti ([13]). Noi ne conosciamo la struttura (Zusammensetzung), in virtù delle (51), e d'altra parte le equazioni in termini finiti non possono essere che le originarie relazioni di invarianza, covarianza, contravarianza e loro derivate, che legano gli elementi trasformati ai primitivi. Le derivate delle variabili indipendenti, che compariscono in queste relazioni, devono essere risguardate come le costanti caratteristiche, i parametri del gruppo. Immaginando, per esempio, di esprimere, per mezzo delle derivate delle antiche rispetto alle nuove variabili, quelle altre delle

---

([12]) Lie-Engel, *Theorie* ecc., Erster Abschnitt, Kap. 9.
([13]) Lie-Engel, loc. cit., Kap. 3, § 16.

nuove rispetto alle antiche, noi troviamo proprio M_μ parametri, ma non è detto che abbiano ad essere tutti essenziali, perchè, come si è accennato, in generale non sappiamo se le trasformazioni infinitesime Ω_μ sieno tutte linearmente indipendenti. In ogni caso il fatto che noi conosciamo le equazioni in termini finiti di G_μ permetterebbe di determinare le espressioni invariantive di fronte a G_μ, che sono poi i domandati invarianti assoluti, senza integrare effettivamente il sistema Ω_μ ([14]); basta eliminare i parametri dalle equazioni in termini finiti. In ciò nulla di nuovo per noi, avendo ritrovato per altra via il criterio fondamentale dei metodi ordinarî. Però in questo risultato due conseguenze non ispregevoli sono incluse implicitamente: una dimostrazione rigorosa (cfr. appunto il più volte citato *Erster Abschnitt*, pag. 218) che le eliminanti (nel senso di Casorati) si possono mettere sotto la forma $(I) = I$; la proprietà del gruppo, costituito dalle derivate d'ordine qualunque di tutti i sistemi di n variabili indipendenti, di possedere la struttura (51) e ciò perchè tali gruppi sono parametrici (Parametergruppe) rispetto ai gruppi G e ogni gruppo è oloedrico isomorfo col gruppo dei suoi parametri ([15]).

14. – Procedendo col metodo della eliminazione alla ricerca delle espressioni invariabili, noi siamo certi che le eliminanti si presenteranno sotto forma algebrica razionale negli elementi primitivi e nei trasformati, perciocchè le derivate delle antiche rispetto alle nuove variabili, le quali noi dobbiamo eliminare, entrano razionalmente nelle equazioni originarie di invarianza, covarianza, contravarianza e loro derivate.

Non è tuttavia in alcun modo evidente che dette eliminanti si possano *razionalmente* ricondurre alla forma canonica $(I) = I$. Anzi il metodo, cui accenna il Lie (sempre a pag. 218 del suo primo volume) in generale non soddisfa certamente a questa condizione. Perciò, dato il solito sistema S, noi non sappiamo a priori se, fra gli invarianti assoluti, ve ne abbia almeno tanti razionali quanti indipendenti. Una tale proprietà si verifica in tutti gli esempi di invarianti finora considerati, ma in generale ha bisogno di essere dimostrata. Per questa dimostrazione noi dobbiamo far uso di un teorema importante nella teorica dei gruppi finiti, dovuto al sig. Maurer. Noi ci limitereno a riportarne l'enunciato, rimandando per maggiori dettagli alle memorie di lui ([16]); tuttavia dobbiamo premettere alcune definizioni.

([14]) Lie-Engel, ib., Kap. 13, S. 217-218.

([15]) Lie-Engel, ib., Kap. 21.

([16]) *Ueber lineare Substitutionen*, Inaugural Dissertation, Strassburg, 1887.

Ueber allgemeinere Invarianten Systeme. « Sitzungsberichte der k. bayerischen Ak. der Wiss. zu München », 1888, Heft I. Un riassunto dei lavori di Maurer sopra questo argomento si trova nel terzo volume della *Theorie*, ecc., Leipzig, 1893, Kap. 29, § 145.

Si dice omogenea una trasformazione infinitesima Xf portante su n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quando Xf è del tipo $\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu} x_\nu \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$; la equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0 .$$

algebrica di grado n in ω è detta la equazione caratteristica corrispondente alla trasformazione omogenea infinitesima. Infine una equazione caratteristica sarà chiamata *normale*, se tutte le sue radici sono nulle, oppure se i rapporti di queste sono numeri razionali, ogni radice essendo di più tale che annulla insieme al determinante proposto tutti i suoi minori di un ordine corrispondente alla multiplicità della radice stessa.

Ciò posto, il teorema del sig. MAURER suona così: « Se r trasformazioni infinitesime ed omogenee $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ determinano un gruppo finito intransitivo al più r-metrico, condizione *necessaria e sufficiente* affinchè questo gruppo abbia almeno tanti invarianti razionali quanti ne ammette di indipendenti è che le trasformazioni infinitesime del gruppo si possano, mediante combinazioni lineari, porre sotto tale forma che le equazioni caratteristiche corrispondenti a ciascuna di esse riescano normali ».

Noi avremo occasione di applicare successivamente le due parti di questo teorema; in primo luogo ci varremo del fatto che l'accennata condizione è necessaria.

Riprendiamo le equazioni Ω_μ, le quali, abbiam visto, determinano, qualunque sia μ, un gruppo finito al più M_μ-metrico.

Per il valore speciale $\varrho = 1$, le corrispondenti equazioni Ω_μ, saranno manifestamente tante quante le derivate prime delle ξ, cioè n^2; le indicheremo complessivamente con Ω_μ^1 e il loro tipo generale sarà, come si desume dalle (21):

$$\overset{(1)}{X}_{(\mu)qp} I = \sum_1^\alpha \overset{(1)}{R}{}^{hm_h}_{(\mu)qp} I + \sum_1^\beta \overset{(1)}{R}{}^{kw_k}_{(\mu)qp} I ,$$

cioè, per le (33 d) e corrispondenti (33′ d):

$$(52) \qquad \overset{(1)}{X}_{(\mu)qp} I = \sum_1^\alpha{}_h \sum_0^\mu{}_j \left\{ - \sum_1^{m_h}{}_l \; \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j} \left(f^{h m_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{m_h}} \right)_s \times \right.$$

$$\times \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_{m_h})s}} \Bigg) - \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} | s_1 s_2 \dots s_{j-1}} (1 + \eta_{sp}) f^{hm_h}_{r)sq} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r)sp}} \Bigg\} +$$

$$+ \sum_1^\beta {}_k \sum_0^\mu {}_j \Bigg\{ \sum_1^{w_k} {}_l \sum_1^h {}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{w_k} | s_1 s_2 \dots s_j} \Bigg(f^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_{w_k}}_{km_k)s} \times$$

$$\times \frac{\partial I}{\partial f^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{w_k}}_{kw_k)s}} \Bigg) - \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} | s_1 s_2 \dots s_{l-1}} (1 + \eta_{sp}) f^{r}_{kw_k)sq} \frac{\partial I}{\partial f^{r}_{kw_k)sp}} \Bigg\}$$

$$(q, p = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Fra poco avremo occasione di riprenderle; prima però si rende opportuna una breve digressione nel campo delle forme algebriche. Se siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ coordinate puntuali omogenee in uno spazio Euclideo S_{n-1}, $u_1, \dots, u_{n-1}$ coordinate duali di un S_{n-2}, i simboli a_α, u_x rappresenteranno secondo le notazioni abituali forme lineari ed omogenee del tipo $\sum_i a_i x_i$ e $\sum_i \alpha^i u_i$ rispettivamente.

Una forma di m-esimo grado in coordinate di punti

$$X_m \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m} f_{r_1 r_2 \dots r_m} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_m}$$

sarà rappresentata dal simbolo a_x^m ovvero $a_x^{(1)} \cdot a_x^{(2)} \dots a_x^{(m)}$, secondochè le $f_{r_1 r_2 \dots r_m}$ che compariscono nella espressione effettiva della forma, sieno o no simmetriche rispetto alla disposizione dei loro indici. Più generalmente se in una forma d'ordine $m_h + j$, i coefficienti sono simmetrici rispetto a certi j indici $s_1, s_2, \dots, s_j$, si può porre:

$$X_{\underset{j}{hm_h}} \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r m_h | s_1 s_2 \dots s_j} f^{km_h}_{r|s} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_{m_h}} x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_j} \equiv a_x^{(1)} a_x^{(2)} \dots a_x^{(m_h)} b_x^j, \tag{53}$$

e in ogni caso il passaggio dalla forma simbolica alla effettiva è possibile univocamente e senza ambiguità.

Lo stesso vale per le forme duali in coordinate u e per i connessi ([17]) a due serie di variabili x ed u del tipo generale:

$$\Gamma_{\underset{j}{kw_k}} \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} | s_1 s_2 \dots s_j} f^{r}_{kw_k|s} \cdot u_{r_1} u_{r_2} \dots u_{r_{w_k}} x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_j} \equiv u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} \dots u_\alpha^{(w_k)} c_x^j \tag{53'}$$

([17]) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Ersten Bandes, zweiter Teil, Leipzig, 1876, Siebente Abtheilung.

l'identità (53′) essendosi stabilita nell'ipotesi che le $f_{)s}^{kw_h}$ siano simmetriche rispetto agli indici s.

Il passaggio univoco fra i simboli ed i valori effettivi sarà determinato dalle relazioni:

$$a_{r_1}^{(1)} a_{r_2}^{(2)} \dots a_{r_{m_h}}^{(m_h)} b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_2} = f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_j}, \tag{54}$$

$$\alpha^{(1) r_1} \alpha^{(2) r_2} \dots \alpha^{(w_k) r_{w_k}} c_{s_1} c_{s_2} \dots c_{s_j} = f^{kw_k \; r_1 r_2 \dots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \dots s_j}. \tag{54′}$$

La proprietà commutativa dei fattori b o c nei prodotti simbolici esprime la simmetria dei coefficienti effettivi rispetto agli indici s, mentre i fattori a ed α, quantunque permutabili fra loro, non hanno alcuna influenza sull'ordine degli indici r, avendo noi a bella posta, coll'introduzione degli apici (1), (2), ..., nelle a ed α, vincolato ciascun fattore a rappresentare l'indice di un posto determinato.

Sia ora:

$$x_i = \sum_1^n {}_\nu \, e_{i\nu}(x_\nu) , \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{55}$$

una qualunque sostituzione lineare di variabili, il cui determinante E sia diverso da zero.

Sarà corrispondentemente:

$$u_i = \sum_1^n {}_\nu \, e^{\nu i}(u_\nu) , \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{56}$$

rappresentando $e^{\nu i}$ il minore complementare $E_{\nu i}$ diviso per E.

Indicando con $(X_j^{hm_h})$ e $(\Gamma_j^{kw_k})$ ciò, che divengono $X_j^{hm_h}$, $\Gamma_j^{km_k}$, in seguito a questa sostituzione, avremo, come si sa:

$$\begin{aligned}(f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} s_1 s_2 \dots s_j}) = \\ = \sum_1^n {}_{a_1 a_2 \dots a_{m_h} t_1 t_2 \dots t_j} f^{hm_h}_{a_1 a_2 \dots a_{m_h} t_1 t_2 \dots t_j} e_{a_1 r_1} e_{a_2 r_2} \dots e_{a_{m_h} r_{m_h}} e_{t_1 s_1} e_{t_2 s_2} \dots e_{t_j s_j},\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}(f^{kw_k \; r_1 r_2 \dots r_{m_k}}_{s_1 s_2 \dots s_j}) = \\ = \sum_1^n {}_{a_1 a_2 \dots a_{w_k} t_1 t_2 \dots t_j} f^{kw_k \; a_1 a_2 \dots a_{w_k}}_{t_1 t_2 \dots t_j} e^{r_1 a_1} e^{r_2 a_2} \dots e^{r_{w_k} a_{w_k}} e_{t_1 s_1} e_{t_2 s_2} \dots e_{t_j s_j}.\end{aligned} \tag{57′}$$

Consideriamo ora un sistema S' costituito da $\alpha(\mu + 1)$ forme puntuali $X_j^{hm_h}$ $(j = 0, 1, 2, \dots, \mu)$ $(h = 1, 2, \dots, \alpha)$ e da $\beta(\mu + 1)$ connessi

$\Gamma_j^{k w_k}$ $(j = 0, 1, 2, ..., \mu)$ $(k = 1, 2, ..., \beta)$ ed osserviamo che, per la teoria delle forme algebriche in quante si vogliono variabili ([18]), gli invarianti assoluti di un tale sistema, cioè le espressioni invariabili di fronte a qualsiasi trasformazione lineare, non sono che rapporti di due invarianti (nel senso considerato dai geometri) e quindi funzioni algebriche razionali ed omogenee dei coefficienti delle forme proposte. Veramente gli autori citati dimostrano ciò per forme a coefficienti simmetrici, rispetto a tutti i loro indici, ma, siccome in tali dimostrazioni si considerano sistemi generali di forme simboliche e le (53) (53′) fanno appunto vedere come, anche senza la simmetria rispetto a tutti gli indici, sia possibile una univoca rappresentazione simbolica, così possiamo senz'altro asserire che il sistema S' possiede almeno tanti invarianti assoluti razionali nei coefficienti delle forme, quanti esso ne ammette di indipendenti.

D'altra parte, approfittando delle teorie di Lie, questi invarianti assoluti si possono risguardare ([19]) come soluzioni di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, del sistema cioè costituito dalle trasformazioni infinitesime di un gruppo G' n^2-metrico in N_μ variabili (pag. 56), le cui equazioni in termini finiti sono le (57), (57)′, supponendovi j suscettibile di prendere tutti i valori compresi fra 0 e μ, h fra 1 ed α, k fra 1 e β. Ricordiamo ora ([20]) che, per trovare le trasformazioni infinitesime di un gruppo finito G_{n^2}, di cui si conoscono le equazioni in termini finiti, basta derivare successivamente ciascuna di dette equazioni rapporto ai parametri (e_{qp} nel caso nostro) e attribuire, dopo eseguita la derivazione, ai parametri stessi quei valori che loro spettano nella trasformazione identica. Per le nostre equazioni (57) (57′), la trasformazione identica si ha facendo $e_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}$, dove, secondo le notazioni abituali, $\varepsilon_{i\nu} = 0$ per $i \gtrless \nu$, mentre $\varepsilon_{ii} = 1$.

Denoteremo con ψ_0 ciò che diviene una funzione ψ dei parametri $e_{i\nu}$ quando per essi si pongano i valori $\varepsilon_{i\nu}$. Avremo: $E_0 = 1$

$$e_0^{i\nu} = \frac{(E_{i\nu})_0}{E_0} = \varepsilon_{i\nu}\,, \tag{58}$$

$$\left(\frac{\partial e_{i\nu}}{\partial e^{i'\nu'}}\right)_0 = \left(\frac{\partial E^{i\nu}}{\partial e_{i'\nu'}}\right)_0 \frac{1}{E_0} - \frac{(E_{i'\nu'})_0\,(E_{i\nu})_0}{E_2^0} = -\,\varepsilon_{i\nu'}\varepsilon_{i'\nu}\,, \tag{59}$$

ciò che può essere verificato senza difficoltà.

([18]) Clebsch, Op. cit., Ersten Bandes erster Teil, dritte Abtheilung, S. 267. – Id., *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen.* «Crelle's Journal», B. 59 (1861).

Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen.* «Math. Ann.», B. XXXVI (1890). – Id., *Ueber die vollen Invariantensysteme.* «Math. Ann.», B. XLII (1893).

([19]) Lie-Engel, *Theorie* ecc., Erster Abschnitt, Kap. 13, S. 215.

([20]) Lie-Engel, ib., Kap. 4, S. 78.

Derivando il secondo membro di una generica (57) o (57′), per esempio di:

$$(f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j}) = \sum_1^n {}_{q_1 q_2 \ldots q_{m_h} t_1 t_2 \ldots t_j} f^{hm_h}_{q_1 q_2 \ldots q_{m_h}) t_1 t_2 \ldots t_j} e_{q_1 r_1} e_{q_2 r_2} \ldots e_{q_{m_h} r_{m_h}} e_{t_1 s_1} \ldots e_{t_2 s_2} \ldots e_{t_j s_j}$$

rapporto ad e_{qp} e ponendo poi ciascun $e_{iv} = \varepsilon_{iv}$ $(i, v = 1, 2, \ldots, n)$ il risultato ci rappresenta il coefficiente di $\dfrac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}}$ in una delle n^2 trasformazioni infinitesime indipendenti del nostro gruppo. Noi le troviamo tutte, eseguendo l'operazione indicata rispetto agli n^2 parametri e_{qp} $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$; quando poi si eguaglino a zero, esse ammettono per soluzioni comuni gli invarianti del gruppo G'_{n^2}.

Formiamo la trasformazione infinitesima corrispondente ad e_{qp}. Riferendoci ad una equazione (57) ed immaginando di derivare successivamente rispetto ad e_{qp} ciascuno degli $m_h + j$ fattori del secondo membro, facendo poi $e_{iv} = \varepsilon_{iv}$, il risultato potrà essere espresso da:

$$\sum_1^{m_h}{}_l\, \varepsilon_{pr_l} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j} + \sum_1^{i}{}_\lambda\, \varepsilon_{ps_\lambda} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s_j}.$$

Per una generica (57′), in virtù delle (59), si avrà invece:

$$-\sum_1^{w_h}{}_l\, \varepsilon_{qr_l} f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j} + \sum_1^{j}{}_\lambda\, \varepsilon_{ps_\lambda} f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s}.$$

Moltiplicando per le corrispondenti derivate

$$\frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j}}$$

e sommando rispetto a r, s, h, k, j, si trova l'espressione della trasformazione infinitesima relativa ad e_{qp}. Essa è:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^{\alpha}{}_k \sum_0^{\mu}{}_j \Bigg\{ \sum_1^{m_h}{}_l \sum_1^{r}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{qr_l} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_l r_{l+1} \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \\
&\qquad + \sum_1^{j}{}_\lambda \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{ps_\lambda} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \Bigg\} \\
&\qquad + \sum_1^{\beta}{}_k \sum_0^{\mu}{}_j \Bigg\{ -\sum_1^{w_k}{}_l \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{qr_l} f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_l r_{l+1} \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j}} \\
&\qquad + \sum_1^{j}{}_\lambda \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{ps\lambda} f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j}} \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Nel primo e nel terzo dei termini tra parentesi, può essere soppressa la somma rispetto ad r_l, attribuendo ad esso il valor fisso p o q rispettivamente, e ciò perchè $\varepsilon_{pr_l} = 0$, $\varepsilon_{qr_l} = 0$, per r_l diverso da p o da q. Nel secondo e quarto termine invece, una delle s, s_j per esempio, può essere senz'altro fissata eguale a p, perchè, se nessuna s possiede tale valore, e_{ps_λ} è nullo per ogni valore di λ; corrispondentemente poi ad ogni combinazione con ripetizione delle $(j-1)$ s rimaste variabili, le somme

$$\sum_1^i{}_\lambda \varepsilon_{ps_\lambda} f^{hm_h}_{r_1r_2\dots r_{m_h})s_1s_1\dots s_{\lambda-1}qs_{\lambda+1}\dots s_j}, \qquad \sum_1^i{}_\lambda \varepsilon_{ps_\lambda} f^{kw_k\; r_1r_2\dots r_{w_k}}_{)s_1s_2\dots s_{\lambda-1}qs_{\lambda+1}\dots s_j},$$

tenendo presente la simmetria degli indici s, saranno eguali a

$$f^{hm_h}_{r_1r_2\dots r_{m_h})s_1s_2\dots s_{j-1}q} \qquad \text{ovvero a} \qquad f^{kw_k\; r_1r_2\dots r_{w_k}}_{)s_1s_2\dots s_{j-1}q}$$

più tante volte termini identici a quelli, quanti tra gli $j-1$ indici rimasti variabili sono eguali a p. Potremo adunque togliere il simbolo sommatorio rispetto a λ, purchè, fissato uno degli indici eguale a q, e continuando a chiamare s gli $j-1$ indici variabili, si aggiunga in ciascun caso il fattore $\eta_{ps} + 1$. Così facendo verrà:

$$(60) \qquad \sum_1^\alpha{}_h \sum_0^\mu{}_j \left\{ \sum_1^{m_h}{}_l \sum_1^n{}_{r_1r_2\dots r_{l-1}r_{l+1}r_{m_h})s_1s_2\dots s_j} f^{hm_h}_{r_1r_2\dots r_{l-1}qr_{l+1}\dots r_{m_h})s_1s_2\dots s_j} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1r_2\dots r_{l-1}pr_{l+1}\dots r_m)s}} + \sum_1^n{}_{r_1r_2\dots r_{m_h}\,|\,s_1s_2\dots s_{j-1}} (1+\eta_{sp}) f^{hm_h}_{r)sq} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r)sq}} \right\}$$

$$+ \sum_1^\beta{}_k \sum_0^\mu{}_j \left\{ - \sum_1^n{}_l \sum_1^{w_k}{}_{r_1r_2\dots r_{l-1}r_{l+1}\dots r_{w_k}\,|\,s_1s_2\dots s_j} f^{kw_k\; r_1r_2\dots r_{l-1}pr_{l+1}\dots r_{w_k}}_{)s} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\; r_1r_2\dots r_{l-1}qr_{l+1}\dots r_{w_k}}_{)s}} + \sum_n^1{}_{r_1r_2\dots r_{w_k}\,|\,s_1s_2\dots s_{j-1}} (1+\eta_{sp}) f^{kw_k\; r}_{)sq} \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\; r}_{)sp}} \right\}.$$

Pertanto, qualunque sieno p e q, le n^2 trasformazioni infinitesime di G'_{n^2} sono rappresentate dalle (60) e basta confrontarle coi primi membri delle equazioni Ω^1_μ (52), per concludere, a meno d'un fattore -1, la loro identità.

D'altra parte, come abbiamo osservato a pag. 79, di fronte a tutte le trasformazioni lineari (55) (56), il sistema di forme algebriche S'_{n^2} possiede almeno tanti invarianti assoluti razionali quanti ne ammette di indipendenti; lo stesso vale quindi per il gruppo G'_{n^2}, che può immaginarsi definito dalle trasformazioni infinitesime indipendenti (52) o (60).

In virtù della prima parte del teorema di MAURER sopra citato, noi concludiamo che i primi membri delle equazioni Ω_μ^0 sono linearmente riducibili a tal forma che le equazioni caratteristiche corrispondenti a ciascuna di esse sieno normali.

Assai più semplice e diretta investigazione si può intraprendere rispetto alle altre equazioni di Ω_μ. Considerandone una qualsiasi, poniamo $X_{(\mu)qp}^{(\varrho)} I = 0$ $(\varrho > 1)$, riconosceremo tosto che la equazione caratteristica, che le corrisponde è normale. Infatti, avendosi per le (18), (30), (31), (32), (33):

$$
\begin{aligned}
(61) \qquad & X_{(\mu)qp}^{(\varrho)} I \equiv \\
& \equiv \sum_1^a {}_h \sum_0^\mu {}_j \Bigg\{ - \sum_1^{m_h} {}_l \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \dots s_j} \sum_1^n {}_\tau \prod_1^n {}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda \bar{p}^\tau} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} \times \\
& \times f_{h m_h \atop r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{m_h})s} \frac{\partial I}{\partial f_{h m_h \atop r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_{m_h}) s \bar{p}^\tau}} - \\
& - \sum {}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \dots s_{j-1}} \prod_1^n {}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} f_{h m_h \atop r) s q} \frac{\partial I}{\partial f_{h m_h \atop r) s p}} \Bigg\} \\
& + \sum_1^\beta {}_k \sum_0^\mu {}_j \Bigg\{ \sum_1^{w_k} {}_l \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{w_h} \mid s_1 s_2 \dots s_j} \sum_1^n {}_\tau \prod_1^n {}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda \bar{p}^\tau} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} \times \\
& \times f_{k w_k \atop)s}^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_{w_k}} \frac{\partial I}{\partial f_{k w_k \atop) s \bar{p}^\tau}^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{w_k}}} \\
& - \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \dots s_{j-1}} \prod_1^n {}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} f_{k w_k \atop) s q}^{r} \frac{\partial I}{\partial f_{k w_k \atop) s p}^{r}} \Bigg\} = 0 ,
\end{aligned}
$$

potremo in primo luogo immaginare ordinate le N_μ variabili, da cui dipende questa trasformazione infinitesima omogenea, in modo che, a ciascun numero intero, compreso fra 1 e N_μ, corrisponda una particolare variabile. Senza fissare tassativamente questa corrispondenza, noi possiamo scindere le nostre variabili in $\mu + 1$ gruppi successivi, il primo dei quali comprende in un certo ordine, che qui non ci importa di stabilire, tutti gli elementi dei proposti sistemi, il secondo tutte le loro derivate prime e così successivamente, finchè il $(\mu + 1)$-esimo sarà costituito da tutte le derivate d'ordine μ.

Una semplice ispezione della precedente equazione $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} I = 0$, mostra come, essendo ϱ, cioè il numero delle p, superiore all'unità, i coefficienti di ciascuna derivata della funzione I appartengono ad uno dei nostri $\mu + 1$ gruppi, inferiore, per numero d'ordine, almeno di una unità a quello, cui appartiene la variabile di derivazione. Se quindi si costituisce il determinante caratteristico d'ordine N_μ e di elementi, diciamo $a_{i\nu}$, e si distribuiscono in ciascuna sua riga i coefficienti delle derivate di I rapporto alle singole variabili, nell'ordine di successione dei gruppi da noi stabilito, per l'osservazione fatta, sarà certamente $a_{i\nu} = 0$, tutte le volte che sia $\nu \geqslant i$. Perciò il determinante si riduce al prodotto degli elementi $-\omega$ posti sulla diagonale principale e l'equazione caratteristica risultante è, come si vede,

$$(-1)^{N_\mu} \omega^{N_\mu} = 0 \,,$$

cioè normale.

Al § 13 abbiamo visto che i primi membri delle equazioni Ω_μ determinano un gruppo finito di trasformazioni. Questo gruppo è, per definizione, intransitivo in tutti i casi, in cui esso, cioè a dire il proposto sistema S, ammette invarianti. Rispetto alle trasformazioni infinitesime Ω_μ, per $\varrho = 1$, il confronto col sistema ausiliario di forme algebriche S', per $\varrho > 1$, le brevi considerazioni, che precedono, mostrano che le equazioni caratteristiche relative ad esse sono o si possono rendere normali; applicando quindi la seconda parte del più volte citato teorema di Maurer, noi concludiamo che il nostro sistema S ammette almeno tanti invarianti razionali quanti indipendenti.

15. – Se sia I uno qualunque tra essi, si potrà porre: $I = A/B$, dove tanto A che B designano funzioni intere.

Consideriamo uno dei sistemi covarianti o contravarianti contenuti in S, Z, per esempio, ed indichiamo con Z^μ il gruppo di variabili, costituito dagli elementi di Z e dalle loro derivate fino all'ordine μ. Potremo risguardare le funzioni intere A e B quali somme di funzioni omogenee rispetto alle variabili Z^μ e fare $A = \sum_{1}^{a}{}_h A_h$, $B = \sum_{1}^{b}{}_k B_k$, dove, col crescere degli indici, supponiamo decrescano i gradi delle funzioni corrispondenti e quindi, per esempio, A_1, B_1, comprenderanno i termini di grado massimo rapporto alle variabili Z^μ, in A e B rispettivamente.

Come apparisce dalle (61), una qualunque operazione $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} I$, applicata ad una funzione intera, lascia inalterato il grado di ciascun suo termine, relativo ad ogni singolo gruppo di variabili Z^μ; per conseguenza le funzioni omogenee A_h, B_k si cangeranno in $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} A_h$, $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} B_k$ pure omogenee e rispettivamente dello stesso grado.

Ora si ha:

$$X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} I \equiv X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} \frac{A}{B} \equiv X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} \frac{A_1 + \sum_2^a {}_h A_h}{B_1 + \sum_2^b {}_k B_k} \equiv$$

$$\equiv \frac{\left\{B_1 + \sum_2^b {}_k B_k\right\} X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} \left[A_1 + \sum_2^a {}_h A_h\right] - \left\{A_1 + \sum_2^a {}_h A_h\right\} X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} \left[B_1 + \sum_2^b {}_k B_k\right]}{B^2} \equiv 0,$$

e, dovendo il numeratore essere identicamente eguale a zero, si annulleranno separatamente i gruppi di termini dello stesso grado; in particolare sarà:

$$B_1 X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} A_1 - A_1 X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} B_1 = 0 \text{ od anche } X^{(\varrho)}_{(\mu)qv} \frac{A_1}{B_1} = 0,$$

la quale ci mostra che A_1/B_1 soddisfa a tutte le equazioni del sistema Ω_μ ed è quindi un invariante omogeneo.

Segue da ciò che il quoziente dei termini di grado massimo di un invariante razionale è un invariante omogeneo; ripetendo lo stesso ragionamento sopra $I - A_1/B_1$, si trova un secondo invariante omogeneo, che è il secondo termine del quoziente A/B, in quanto A e B si risguardino quali polinomi ordinatamente costituiti dagli addendi $A_1, A_2, \ldots, A_a$; $B_1, B_2, \ldots, B_b$.

Indichiamo con O_1, $O_2, \ldots$ i termini successivi di questo quoziente; essi saranno, per le cose dette, invarianti omogenei del sistema S.

Noi vogliamo dimostrare che, se la divisione A/B non si effettua esattamente, se cioè si può protrarre a piacere la formazione di termini $O_1, O_2, \ldots$, i rapporti

$$\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_1}, \ldots, \frac{A_a}{B_1}; \frac{B_2}{B_1}, \frac{B_3}{B_1}, \ldots, \frac{B_b}{B_1},$$

sono tutti esprimibili per le O, e quindi essi stessi degli invarianti omogenei. A tale scopo si osservi che, indicando con R_1, $R_2, \ldots, R_c$ i successivi resti, avremo:

$$A = BO_1 + R_1 = B(O_1 + O_2) + R_2 = \ldots = B(O_1 + O_2 + \ldots + O_c) + R_c$$

e, siccome i polinomii A e B erano ordinati per le funzioni omogenee di grado decrescente in Z^{μ}, così i gradi dei successivi R_1, $R_2, \ldots, R_c$ andranno costantemente decrescendo.

Da ciascuno di essi al consecutivo vi sarà nel grado la differenza almeno di una unità, quindi, prendendo c sufficientemente grande, potremo far sì che il resto R_c abbia grado inferiore a quel numero, che più ci piace, per esempio, al grado di A_a.

Ora, nella identità:

$$A = \sum_1^a {}_h A_h = \sum_1^b {}_k B_k \cdot [O_1 + O_2 + \ldots + O_c] + R_c,$$

dovranno separatamente essere eguali i termini dello stesso grado; quelli compresi in R_c hanno tutti grado più piccolo di una qualsiasi funzione A. Ciascuna A_h $(h = 1, 2, \ldots, a)$ si esprimerà pertanto in funzione lineare ed omogenea delle R e delle O.

Sia O_{c+1} il termine del quoziente immediatamente successivo ad O_c. Il grado di una qualunque $O_{c+1}B_k$ $(k = 1, 2, \ldots, b)$, per il modo, onde abbiam scelto R_c, sarà minore del grado di ogni A_h $(h = 1, 2, \ldots, a)$. Di più si può scegliere $c' > c$ tale che $R_{c'}$ contenga soltanto termini inferiori per grado a ciascun $O_{c+1}B_k$ $(k = 1, 2, \ldots, b)$, bastando perciò rendere il grado di $R_{c'}$ inferiore a quello di $O_{c+1}B_b$.

Dalla identità:

$$\sum_1^a {}_h A_h = \sum_1^b {}_k B_k \cdot [O_1 + O_2 + \ldots + O_c + O_{c+1} + \ldots + O_{c'}] + R_{c'}$$

rileviamo che i termini, compresi in

$$\sum_1^b {}_k B_k \cdot [O_1 + O_2 + \ldots + O_c + O_{c+1} + \ldots + O_{c'}]$$

e rispettivamente dello stesso grado di $O_{c+1}B_1$, $O_{c+1}B_2, \ldots, O_{c+1}B_b$, devono ciascuna volta dar per somma zero, inquantochè, per il procedimento adottato, nè il primo membro, nè $R_{c'}$ contengono termini di quei gradi. Avremo certo b relazioni lineari ed omogenee rapporto alle B ed alle O; riferendoci alle ultime $b - 1$, noi vogliamo provare che esse sono atte a fornirci i rapporti B_2/B_1, $B_3/B_1, \ldots, B_b/B_1$, si possono cioè risolvere rispetto a B_2, $B_3, \ldots, B_b$. Perciò basterà far vedere che, risguardando le O come elementi essenzialmente distinti, il determinante dei coefficienti delle B (il quale sarà appunto una certa funzione delle O) non si annulla identicamente.

Infatti, in ciascuna equazione: $B_k O_{c+1} + \ldots = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, b)$, O_{c+1}

entra soltanto come coefficiente di B_k, poichè ogni altro termine del tipo $O_{c+1}B_{k'}$ $(k' \gtrless k)$ avrebbe nelle Z^μ grado diverso da $O_{c+1}B_k$, nè potrebbe quindi appartenere con esso ad una stessa equazione. Immaginando ora che le equazioni $O_{c+1}B_k + ... = 0$ si succedano nell'ordine crescente di k, il determinante dei coefficienti di B_2, $B_3, ...,$ B_b, avrà tutti gli elementi della diagonale principale eguali ad O_{c+1}, nè conterrà in alcun altro modo O_{c+1} stesso. Nel suo sviluppo pertanto il termine O_{c+1} non potrà elidersi con alcuno dei rimanenti e quindi il determinante non è identicamente zero.

Dacchè i rapporti delle B a B_1 si possono esprimere per mezzo degli invarianti omogenei O, e le A a loro volta sono esprimibili per le B e per le O, riconosciamo che i rapporti A_1/B_1, $A_2/B_1, ...,$ A_a/B_1 si possono assegnare in funzione degli invarianti omogenei O.

Ora, se la divisione A/B si effettua esattamente, l'invariante razionale I, da cui siamo partiti, ha la forma $I = \sum O$; se ciò non accade, si possono esprimere per mezzo delle O i rapporti A_h/B_1 $(h = 1, 2, ..., a)$,

$$\frac{B_k}{B_1} \quad (k = 2, 3, \ldots, b) \quad \text{e quindi} \quad I = \frac{\sum_1^a {}_h A_h}{\sum_1^b {}_k B_k} = \frac{\sum_1^a {}_h \frac{A_h}{B_1}}{1 + \sum_2^b {}_k \frac{B_k}{B_1}}.$$

Ne viene che un invariante razionale è sempre esprimibile per mezzo di invarianti omogenei rispetto ad una certa serie di variabili Z^μ, ed è pur chiaro che, ripetendo identicamente lo stesso ragionamento, può anche dirsi, rispetto a ciascuna serie di variabili Z^μ.

Noi abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che ogni sistema S possiede tanti invarianti razionali quanti esso ne ammette di indipendenti, cioè a dire tanti invarianti razionali, non legati tra loro da alcun legame funzionale, quanti sono gli invarianti assoluti indipendenti del sistema.

Questi invarianti razionali, come si è visto, sono esprimibili per mezzo di invarianti omogenei. Dico che tra essi ve ne ha proprio altrettanti di indipendenti. Infatti non potrebbero essere di più, perchè il numero massimo di invarianti, non legati da alcuna relazione, è precisamente quello degli invarianti razionali, nè in numero minore, perchè allora gli invarianti razionali stessi non sarebbero più tutti indipendenti, contro l'ipotesi. Concludiamo pertanto:

Teor. I. – « *Ogni sistema S ammette precisamente tanti invarianti razionali omogenei ed indipendenti, quanti gli competono invarianti non legati da alcuna relazione. La loro omogeneità è relativa ad ogni serie di variabili,* *costituita dagli elementi di qualsivoglia sistema covariante o contravariante contenuto in S e dalle loro derivate* ».

Questi invarianti omogenei tra loro indipendenti si potranno brevemente designare col nome di *invarianti principali*.

16. – Il minimo numero di invarianti indipendenti, che spettano ad un dato sistema S, fino ad un certo ordine prestabilito μ, è espresso manifestamente (§ 9) da $N_\mu - M_\mu$, perchè il sistema Ω_μ, costituito da M_μ equazioni con N_μ variabili indipendenti (§ 13), è completo; siccome però in generale non si sa se le equazioni del sistema Ω_μ sieno tutte fra loro indipendenti, così il numero totale degli invarianti non sarà in ogni caso $N_\mu - M_\mu$, ma potrà subire, per ciascun valore di μ, un certo incremento g_μ, che rappresenta il numero delle equazioni Ω_μ implicitamente incluse nelle rimanenti. La determinazione di g_μ, oltre che dal valore di μ, dipende dalla natura speciale del sistema S, che si prende in esame; tralasciando di occuparcene in generale, non sarà tuttavia inopportuno far menzione di un risultato ottenuto dal sig. Żorawski, [21] il quale, nel caso speciale assai notevole di un solo sistema covariante doppio simmetrico a due variabili indipendenti, ha dimostrato che, a partire da $\mu = 3$, le singole g_μ sono tutte nulle. In conseguenza di ciò, per essere in questo caso:

$$M_\mu = 3\left\{\binom{\mu+3}{\mu+1} - 1\right\} = 2\,\frac{(\mu+3)(\mu+2)}{2} - 2\,,$$

$$N_\mu = 4\binom{\mu+2}{\mu} = 2(\mu+2)(\mu+1)\,,$$

verrà:

$$N_\mu - M_\mu = 2(\mu+2)(\mu+1) - (\mu+3)(\mu+2) + 2 = \mu^2 + \mu\,,$$

da cui, per avere gli invarianti proprii, dovremo togliere il numero delle equazioni di simmetria e loro derivate, cioè:

$$1 + 2 + \ldots + (\mu+1) = \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}\,,$$

e la differenza

$$\frac{2\mu(\mu+1)}{2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2} = \frac{(\mu+1)(\mu-2)}{2}$$

[21] Mem. cit., pag. 21.

rappresenterà, a partire da $\mu = 3$, il numero, possiamo anche dire (§ 15), degli invarianti principali d'ordine non superiore a μ, spettanti ad una varietà a due dimensioni.

Per $\mu = 3$, $\mu = 4$, si ritrovano dei numeri, indicati già dal prof. CASORATI ([22]).

Prima di chiudere queste considerazioni generali sugli invarianti differenziali, vogliamo ancora rilevare come, dato un sistema S, le espressioni, che dal prof. BELTRAMI vengono chiamate parametri o funzioni invariabili, non sono in fondo che degli invarianti, relativi però non più al sistema S, originariamente assegnato, ma a quello, che si ottiene, associando ad esso uno o più sistemi d'ordine zero, cioè una o più funzioni.

Si potrebbe tentare qualche applicazione dei criterii generali precedentemente esposti alla ricerca effettiva di espressioni invariantive; tuttavia, sotto questo punto di vista, non è chi non scorga quanto laboriosa e malagevole riescirebbe la integrazione dei sistemi Ω_μ, pur tenendo conto dei notevoli vantaggi, che, in questo riguardo, potrebbe offrire il metodo di MAYER.

Preferisco per intanto di non insistere, almeno per ora, su cotesta questione, cercando invece di far valere taluno dei risultati fin qui ottenuti in un campo, per quanto io so, del tutto inesplorato.

17. – Dato un sistema S, proponiamoci di determinare tutte le espressioni ψ, dipendenti dalle variabili, dalle funzioni di S e dalle loro derivate fino a quelle d'ordine μ, tali che riescano invarianti gli integrali del tipo:

$$J = \int_C^{(n)} \psi \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n \,,$$

dove C è un campo arbitrario, però indipendente dal sistema di variabili, rispetto a cui viene eseguita l'integrazione. Tali espressioni ψ diremo *ipofunzioni d'ordine* μ e i corrispondenti J saranno invarianti integrali dello stesso ordine.

Seguendo il procedimento stesso, adottato già per gli invarianti differenziali, riconosciamo che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un integrale J rimanga invariante si è che:

$$\delta J = 0 \,, \tag{63}$$

([22]) Mem. cit., tom. IV, pag. 179.

ossia, portando il simbolo di variazione sotto il segno:

$$(64) \qquad \int_C \left\{ \delta\psi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n + \sum_1^n \varphi\, dx_1 \ldots dx_{q-1} \delta dx_q\, dx_{q+1} \ldots dx_n \right\} = 0\,,$$

e, scrivendo $(\partial\xi_q/\partial x_q)\, dw_q$ per δdx_q:

$$(65) \qquad \int_C \left\{ \delta\psi + \sum_1^n {}_q\, \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} \right\} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0\,.$$

Dacchè questa relazione deve valere, qualunque sia la natura del campo C, dovremo avere necessariamente:

$$(65') \qquad \delta\psi + \sum_1^n {}_p\, \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} = 0\,,$$

la quale è condizione necessaria perchè $\delta J = 0$, e, come rilevasi dalla (65), è altresì sufficiente.

Ora, qualunque sia μ, $\delta\psi$, come già δJ, è una funzione lineare ed omogenea delle singole ξ e loro derivate, nella quale il coefficiente di ξ_i è $\partial\psi/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, mentre, secondo la notazione introdotta al § 9,il coefficiente di una generica $\partial^\varrho \xi_q/\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}$ è $X^{(\varrho)}_{(\mu) q p_1 p_2 \ldots p_\varrho} I$. (Per l'espressione éffettiva si vegga la formula (61)).

Abbiamo quindi dalla (65'):

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \xi_i + \sum_1^{\mu+1} {}_\varrho \sum_1^n {}_{q \mid p_1 p_2 \ldots p_\varrho} X^{(\varrho)}_{(\mu) p q_1 p_2 \ldots p_\varrho} \psi \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}} + \sum_1^n {}_q\, \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} = 0\,,$$

nella quale ci converrà di scrivere a parte i termini della seconda sommatoria, che corrispondono a $\varrho = 1$, ottenendo:

$$\sum_1^p \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \xi_i + \sum_2^{\mu+1} {}_\varrho \sum_1^n {}_{q \mid p_1 p_2 \ldots p_\varrho} X^{(\varrho)}_{(\mu) q q_1 p_2 \ldots r_\varrho} \psi \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{r_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}} +$$

$$+ \sum_1^n {}_{qp}\, X^{(\varrho)}_{(\mu) q p} \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_p} + \sum_1^n {}_q \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} = 0\,,$$

e questa manifestamente si scinde nelle:

$$(66)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}=0 & (i=1,2,\ldots,n) \\ X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi+\varepsilon_{qp}\psi=0 & (q,p=1,2,\ldots,n) \\ \bar{\Omega}_\mu=0\,, & \end{array}\right.$$

dove, per brevità, con $\bar{\Omega}_\mu=0$ rappresentiamo il complesso di tutte le $M_\mu-n^2$ equazioni $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi=0$ di Ω_μ, in cui $\varrho>1$.

La ricerca delle ipofunzioni è così ricondotta allo studio del sistema (66).

18. – Cominceremo con un caso speciale molto notevole, quello cioè delle ipofunzioni d'ordine zero. Segue dalle (65) che esse devono in questo caso soddisfare alle equazioni:

$$(67)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$(67')\qquad X^{(1)}_{(0)qp}\,\psi+\varepsilon_{qp}\psi=0 \qquad (q,p=1,2,\ldots,n)\,.$$

Dalle (67) rileviamo che le ψ non contengono le variabili indipendenti; prima di avviarci a trovare l'integrale generale delle (67′), sarà bene riassumere alcune proprietà note dei sistemi di forme algebriche, le quali, come vedremo, valgono nella maggior parte dei casi a fornire la determinazione completa di questo integrale.

Osserviamo a tale scopo che, siccome il sistema S è costituito da α sistemi covarianti Z_{hm_h} $(h=1,2,\ldots,\alpha)$ e da β sistemi contravarianti $Z^{w_k}_h$ $(k=1,2,\ldots,\beta)$ (§ 5), così possiamo anche risguardare i suoi invarianti d'ordine zero come invarianti assoluti (di fronte a tutte le trasformazioni lineari) relativi ad un sistema simultaneo di $\alpha+\beta$ forme algebriche puntuali e reciproche, di gradi m_h, w_k, che hanno rispettivamente per coefficienti $f_{hm_h\atop r_1r_2\ldots r_{m_h}}$, $f_{kw_k}^{r_1r_2\ldots r_{w_k}}$.

Ora le n^2 equazioni $X^{(1)}_{(0)qp}\psi=0$ $(q,p=1,2,\ldots,n)$, che definiscono gli invarianti assoluti (cioè il nostro Ω_0) sono già state considerate da Cayley ([23]), da Clebsch ([24]) ed in particolare dall'Aronhold, il quale

---

([23]) *Nouvelles recherches sur les covariantes*, « Crelle's Journal », B. 47.

([24]) *Ueber die simultane Integration partieller Differentialgleichungen*, ib., B. 65, S. 267.

mostrò inoltre (ed è questo che sommamente ci interessa) come le equazioni $X^{(1)}_{(0)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\lambda\psi = 0$ $(q, p = 1, 2, ..., n)$ vengano soddisfatte dagli invarianti (nel senso geometrico) dello stesso sistema ([25]), dalle espressioni cioè, che godono della proprietà di riprodursi, in seguito ad una trasformazione lineare, moltiplicati per la potenza λ-esima del determinante della sostituzione. Per ciascun invariante si ha la relazione:

$$\lambda = \frac{\sum_h^{\alpha} {}_1 m_h \gamma^{m_h}_h - \sum_k^{\beta} {}_1 w_k \gamma^{w_k}_k}{n}, \tag{68}$$

dove $\gamma^{m_h}_h$ rappresenta il grado delle f_{hm_h}, $\gamma^{w_k}_k$ quello delle f^{kw_k} nell'invariante geometrico ([26]).

Il nostro scopo, ricordiamolo, è di integrare il sistema di equazioni a derivate parziali (67′), che è un caso particolare di quello studiato dall'Aronhold e corrisponde a $\lambda = 1$.

Esso ammette pertanto come integrali tutti gli invarianti geometrici di caratteristica $\lambda = 1$. È poi bene osservare che da ogni invariante geometrico (non assoluto) si può dedurre un integrale particolare. Sia infatti I un invariante geometrico per modo che si abbia $X^{(1)}_{(0)qp}I + \varepsilon_{qp}\lambda I = 0$ $(q, p = 1, 2, ..., n)$ con λ diverso da zero; potendosi allora porre $\psi = I^{1/\lambda}$,

---

([25]) *Ueber eine fundamentale Begründung der invarianten Theorie*, ib., B. 62. A pag. 311 sono date le equazioni:

$$\begin{cases} SD_{QQ}(P) = \lambda P \\ SD_{QQ}(P) = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

dove il simbolo sommatorio si riferisce alle singole forme del sistema e le $D_{QQ}(P)$, $D_{QQ}(P)$ corrispondono alle nostre:

$$-\mathcal{R}^{(1)}_{(0)qp}I \equiv -R^{(1)}_{(0)qp}I \equiv -P^{(1)}_{(0)qp}I$$

[(32), (33), (33*a*), pag. 60-61].

Per vero dire l'autore si riferisce esclusivamente al caso, in cui i coefficienti f sieno simmetrici rispetto a tutti i loro indici; è facile però riconoscere che il teorema accennato è indipendente dall'ipotesi restrittiva della simmetria.

([26]) Nella citata memoria di Aronhold vengono considerate soltanto forme puntuali e si trova assegnata, sempre a pag. 311, la relazione:

$$\lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + ... + p_m\gamma_m}{n},$$

nella quale $p_1, p_2, ..., p_m$ tengono il posto delle nostre m_h, $\gamma_1, \gamma_h, ..., \gamma_m$ rappresentano i gradi dell'invariante nei coefficienti delle singole forme. L'estensione al caso più generale di un sistema, costituito anche da forme reciproche, scaturisce immediatamente da una osservazione semplicissima, dovuta a Clebsch; cfr. *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen*, « Crelle's Journal », B. 59, S. 3.

cioè $I = \psi^\lambda$, si sostituisca questo valore di I nelle identità precedenti e si troverà:

$$\lambda\psi^{\lambda-1} X^{(1)}_{(0)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\lambda\psi^\lambda = 0$$

cioè, dividendo per $\lambda\psi^{\lambda-1}$,

$$X^{(1)}_{(0)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\psi = 0\,,$$

come avevamo annunciato. Di questa circostanza trarremo profitto a suo tempo.

Riprendiamo ora lo studio dell'integrale generale del sistema (67′). Immaginiamo che esso sia definito da una equazione implicita del tipo $\chi(\psi) = 0$; avremo identicamente

$$\frac{\partial \chi}{\partial f} + \frac{\partial \chi}{\partial \psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial f} = 0\,,$$

e, siccome le $X^{(1)}_{(0)qp}\psi$ sono espressioni lineari ed omogenee nelle $\partial\psi/\partial f$, sostituendo per queste nelle (67′) i loro valori

$$-\frac{\partial \chi}{\partial f}\Big/\frac{\partial \chi}{\partial \psi}\,.$$

e, moltiplicando da una parte e dall'altra per $\partial\chi/\partial\varphi$, verrà:

$$X^{(1)}_{(0)qp}\chi - \varepsilon_{qp}\frac{\partial \chi}{\partial \psi}\,\psi = 0 \qquad (q, p = 1, 2, \ldots, n), \tag{69}$$

le quali n^2 equazioni sono lineari ed omogenee rispetto alla incognita χ, risguardata funzione delle variabili indipendenti f e della ψ.

Scegliamone due ad arbitrio, quelle per esempio, che corrispondono ai valori qp, $q'p'$ e formiamone la funzione alternata; si hanno, tenendo presenti le (50), le nuove equazioni:

$$-H_{\bar{p}q'p'}X^{(1)}_{(0)q[\bar{p}q'+p']}\chi + H_{p\bar{p}'q}X^{(2)}_{(0)q'[p+\bar{p}'q]}\chi + \varepsilon_{qp}\varepsilon_{q'p'}\psi\frac{\partial \chi}{\partial \psi} - \varepsilon_{qp}\varepsilon_{q'p'}\psi\frac{\partial \chi}{\partial \psi} = 0\,,$$

e, siccome (38):

$$H_{\bar{p}q'p'} = \prod_1^n{}_\lambda \left[\frac{(\chi_{\lambda[\bar{p}q'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}q'}!\ \ \eta_{\lambda p'}!}\right]$$

è eguale (pag. 58) nel caso presente a zero se $q' \gtrless p$, ad uno se $q' = p$ e analogamente $H_{p\overline{p'}q}$, così, valendoci al solito delle costanti ε, le risultanti jacobiane potranno essere scritte:

$$- \varepsilon_{pq'} \left\{ X^{(1)}_{(0)pq'} \chi - \varepsilon_{qp'} \psi \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon_{p'q} \left\{ X^{(1)}_{(0)q'p} \chi - \varepsilon_{q'p} \psi \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right\} = 0 ,$$

le quali mostrano che le (69) costituiscono un sistema completo.

Se fossero tutte indipendenti, ammetterebbero $N_0 - M_0 + 1$ soluzioni distinte; siccome in generale ciò non può essere asserito, denotiamo con g_0' il numero delle equazioni (69), che sono una conseguenza delle rimanenti; siccome gli integrali del sistema Ω_0 soddisfanno anche al sistema (69), essendo per essi $\partial\chi/\partial\psi = 0$, e d'altra parte il sistema (69) stesso contiene tante equazioni quante Ω_0 ed ha una variabile indipendente di più, così è chiaro che sarà o $g_0' = g_0 - 1$, o $g_0' = g_0$. Ora se $N_0 - M_0 + g_0 + 1$ è negativo o nullo, a più forte ragione $N_0 - M_0 + g_0' + 1 \leqslant 0$ e, quindi non esistono ipofunzioni; ciò accade anche quando, pur essendo $N_0 - M_0 + g_0 + 1 > 0$, $g_0' = g_0 - 1$, poichè allora le (69) non ammettono alcun integrale contenente ψ [27]; se invece $g_0' = g_0$, allora il sistema (69) ammetterà un integrale indipendente di più che non il sistema Ω_0, χ_σ per esempio, e questo sarà necessariamente funzione di ψ.

Avremo per conseguenza come integral generale delle (69) una funzione arbitraria χ delle $N_0 - M_0 + g_0 + 1$ soluzioni particolari χ_σ, I_τ $(\tau = 1, 2, \ldots, N_0 - M_0 + g_0)$.

Le brevi considerazioni sui sistemi di forme algebriche, che noi abbiamo riassunte dalla memoria di ARONHOLD, permettono di determinare un integrale particolare χ_σ, ogni qualvolta il sistema S ammette invarianti geometrici. Infatti si è visto come da ogni invariante geo-

---

(27) Che un tal caso effettivamente possa presentarsi si riconosce, per es., nel modo che segue. Sieno dati due sistemi a_r, $b^{(r)}$, uno covariante, l'altro contravariante e relativi a due variabili indipendenti x_1, x_2. Le quattro equazioni Ω, sono:

$$- a_1 \frac{\partial I}{\partial a_1} + b^{(1)} \frac{\partial I}{\partial b^{(1)}} = 0 , \quad - a_2 \frac{\partial I}{\partial a_1} + b^{(1)} \frac{\partial I}{\partial b^{(2)}} = 0 , \quad - a_1 \frac{\partial I}{\partial a_2} + b^{(2)} \frac{\partial I}{\partial b^{(1)}} = 0 ,$$

$$- a_2 \frac{\partial I}{\partial a_2} + + b^{(2)} \frac{\partial I}{\partial b^{(1)}} = 0 ,$$

che si possono ridurre a tre distinte ed infatti esiste l'invariante $\sum_r{}_1^2 a_r b^{(r)}$. Ora il sistema (69) ha nel caso nostro tutte le sue equazioni indipendenti, quindi $g_0' = 0$ ed esso ammette una sola soluzione, che è la $\sum_r{}_1^2 a_r b^{(r)}$. Non possono pertanto esistere integrali particolari delle (69) contenenti ψ quantunque $N_0 - M_0 + g_0' + 1$, cioè $4 - 4 + 0 + 1$ sia maggiore di zero.

metrico non assoluto, cioè di caratteristica $\lambda \gtrless 0$, si possa dedurre un integrale particolare χ_σ delle (67′). Facendo poi $\chi_\sigma = \psi_\sigma/\psi$, si ha in χ_σ il desiderato integrale delle (69), che contiene la variabile ψ.

19. – In questo paragrafo vogliamo indicare alcune applicazioni a particolari sistemi. Sia in primo luogo un solo sistema covariante doppio e simmetrico di elementi a_{rs}. Il sistema di forme algebriche, che vi corrisponde, si riduce all'unica forma quadratica $\sum_{rs} a_{rs}x_r x_s$, la quale ha, come è noto, l'invariante geometrico $a = \sum \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ e nessun invariante assoluto. Valendoci della formula (68), siccome nel caso presente $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m = 2$, $\gamma = n$, troviamo $\lambda = 2 \cdot n/n = 2$ e quindi ψ è definita dall'equazione $\chi(\sqrt{a}/\psi) = 1$; la funzione arbitraria χ non potendo portare che sopra costanti, sarà, risolvendo, $\sqrt{a}/\psi = C$, $\psi = C^{-1}\sqrt{a}$.

Per conseguenza, ove si prescinda dalla costante arbitraria, un sistema covariante doppio e simmetrico possiede il solo invariante integrale d'ordine zero

$$\int^{(n)} \sqrt{a}\, dx_1 dx_2 \dots dx_n \,.$$

Veniamo al caso di un sistema S, che sia costituito da un solo sistema covariante triplo e simmetrico in due variabili. Abbiamo anche qui un invariante geometrico e precisamente, seguendo le notazioni del Clebsch ([28]):

$$R = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) = 2[4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2]\,,$$

dove a_0, a_1, a_2, a_3 coincidono ordinatamente cogli elementi a_{111}, a_{112}, a_{122}, a_{222} del proposto sistema. Dalla (68), $\lambda = 2 \cdot 4/2 = 4$, il che si poteva dedurre immediatamente dal fatto che, nella rappresentazione simbolica, entrano quattro serie di lettere. Come precedentemente, abbiamo quindi il solo invariante $\iint \sqrt{R}\, dx_1\, dx_2$, che, si può dire per analogia, rappresenta la superficie di una varietà analitica a due dimensioni, il cubo del cui elemento lineare sia espresso dalla forma differenziale cubica:

$$a_0 dx_1^3 + 3a_1\, dx_1^2\, dx_2 + 3a_2\, dx_1\, dx_2^2 + a_3\, dx_2^3\,.$$

Una tale analogia viene però a cessare appena si considerino forme

([28]) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Ersten Bandes erster Teil, Leipzig, Teubner, 1891; S. 219-220.

differenziali superiori. Per esempio, data una varietà, il cui elemento lineare sia:

$$ds = \sqrt[4]{\varphi} = \sqrt[4]{a_0\, dx_1^4 + 4a_1\, dx_1^3\, dx_2 + 6a_2\, dx_1^2\, dx_2^2 + 4a_3\, dx_1\, dx_2^3 + a_4\, dx_2^4}\,,$$

e, considerando il sistema covariante quadruplo, che le corrisponde, si trovano ([29]) i due invarianti geometrici $i = (ab)^4$, $j = (ab)^2(bc)^2(ca)^2$ dei gradi 2 e 3 rispettivamente e il solo invariante assoluto i^3/j^2. La (68) porge $\lambda = 2\cdot 4/2 = 4$ per i e $\lambda = 3\cdot 4/2 = 6$ per j. Possiamo assumere per integrali particolari $\sqrt[4]{i}/\psi, j^3/j^2$, ovvero $\sqrt[6]{j}/\varphi$, j^3/j^2, od anche più semplicemente $\sqrt[4]{i}/\psi$, $\sqrt[6]{j}/\psi$, ed avremo, se la forma quadratica è generale, cioè se fra i ed j non passano speciali relazioni, infiniti invarianti integrali $\iint \psi\, dx_1\, dx_2$, dove ψ è radice dell'equazione: $\chi(\sqrt[4]{i}/\psi,\ \sqrt[6]{j}/\varphi) = 0$. Se si volesse in qualche modo interpretare geometricamente questo risultato, si dovrebbe concludere che le varietà di elemento lineare $\sqrt[4]{\varphi}$ ammettono un numero infinito di caratteristiche geometriche, di cui una soltanto, cioè l'estensione, corrisponde a un concetto intuitivo. Inoltre, come si vede, quando si conosca la espressione di $ds^4 \equiv \varphi$, non resta individuata la geometria metrica della varietà, ma se ne possono immaginare infinite, per ciascuna delle quali l'area si rappresenti con un diverso invariante $\iint \psi\, dx_1\, dx_2$.

20. – Ricordiamo che, nell'ipotesi più generale, la determinazione delle ipofunzioni è stata ricondotta a quella dell'integral generale delle (66). Queste si possono distinguere in due gruppi:

$$X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\psi = 0 \qquad (q, p = 1, 2, \ldots, n) \tag{70}$$

$$\bar{\Omega}_\mu = 0\,, \tag{71}$$

prescindendo, si intende, dalle $\partial\psi/\partial x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, le quali, come sempre, ci dicono che le cercate ipofunzioni non dipendono dalle variabili x.

Possiamo poi immaginare, nello stesso modo usato per $\mu = 0$, che l'integrale delle (70), (71), sia definito da una equazione implicita

---

([29]) Ib., S. 229.

$\chi(\varphi)=0$, χ dovendo soddisfare alle equazioni:

(72) $$X^{(1)}_{(\mu)qp}\chi - \varepsilon_{qp}\frac{\delta\chi}{\delta\psi}=0 \qquad (q, p=1, 2, ..., n)$$

(73) $$\overline{\Omega}_\mu = 0\,.$$

Queste costituiscono un sistema completo, come si può verificare con tutta facilità, tenendo presenti le (51); inoltre, detto $M_\mu - g'_\mu$ il numero di quelle tra esse, che sono indipendenti, si riconosce subito (vedi pag. 91) che dovrà essere $g'_\mu = g_\mu$ oppure $g'_\mu = g'_\mu - 1$.

Ora, se $N_\mu - M_\mu + g_\mu + 1$ è negativo o nullo, lo stesso a più forte ragione avverrà per $N_\mu - M_\mu + g'_\mu + 1$ e quindi le (72), (73) non ammettono soluzioni comuni; se invece $N_\mu - M_\mu + g'_\mu + 1 > 0$, ma $g'_\mu = g_\mu - 1$, allora non esiste alcun integrale del sistema contenente ψ e quindi nemmeno si hanno ipofunzioni di ordine μ; allorquando infine $N_\mu - M_\mu + g_\mu + 1 > 0$ e $g'_\mu = g_\mu$, le (72), (73) ammetteranno come integrali particolari indipendenti gli invarianti differenziali I_1, I_2, ..., $I_{N_\mu - M_\mu + g_\mu}$ ed oltre a ciò un'altra funzione χ_σ contenente ψ. Si può adunque enunciare il:

Teor. II. – « *Un sistema S non ammette ipofunzioni ψ d'ordine μ, se $N_\mu - M_\mu + 1 \leqslant 0$, ovvero se $g'_\mu = g_\mu - 1$; in ogni altro caso le ψ suaccennate sono definite dalla equazione implicita*:

$$\chi(\chi_\sigma, I_1, ..., I_{N_\mu - M_\mu + g_\mu}) = 0\,,$$

dove χ è simbolo di funzione arbitraria, I_1, I_2, ..., $I_{N_\mu - M_\mu + g_\mu}$ sono invarianti differenziali indipendenti del nostro sistema ».

La determinazione dell'integrale particolare χ_σ può farsi assai facilmente, allorquando non tutti gli invarianti principali (§ 15) del nostro sistema sieno funzioni intere, per modo che tra essi uno almeno ve n'abbia della forma $I = A/B$, dove A/B è frazione, che supponiamo irriducibile e i cui termini separatamente non sono invarianti.

Dalle $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2...p_\varrho}\, A/B = 0$ deduciamo:

$$\frac{X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2...p_\varrho}A}{A} = \frac{X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2...p_\varrho}B}{B}\;;$$

siccome A e B sono funzioni omogenee, ciascun rapporto sarà di grado zero, e quel che più interessa, una semplice costante, per l'ipotesi assunta che A e B non abbiano alcun fattore comune; se si indica questa costante con $\lambda_{qp_1p_2\ldots p_\varrho}$, deduciamo che A e B sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali:

$$(74) \qquad X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi - \lambda_{qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi = 0 \qquad \left\{\begin{matrix} \varrho = 1, 2, \ldots, \mu+1 \\ q, p_1, p_2 \ldots, p_\varrho = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right\}.$$

Ricordando al solito le formule (51), le risultanti jacobiane di due generiche (74) saranno:

$$-H_{\overline{p}q'p'}X^{(\varrho+\varrho'-1)}_{(\mu)q[\overline{p}q'+p']}\psi + H_{p\overline{p'}q}X^{)\varrho+\varrho'-1}_{(\mu)q'[p+\overline{p'}q]}\psi = 0\,,$$

che, confrontate colle (74) stesse, porgono:

$$(75) \qquad H_{\overline{p}q'p'}\lambda_{q[\overline{p}q'+p']} - H_{p\overline{p'}q}\lambda_{q'[p+\overline{p}^1q]} = 0\,.$$

Valendoci di queste relazioni, dimostreremo in primo luogo che è nulla ogni $\lambda_{kh_1h_2\ldots h_\varrho}$, di cui uno almeno degli indici h, per esempio h_τ, sia diverso da k. Facciamo infatti nella formula precedente $q = k$, $p = h_1h_2\ldots h_\varrho$, $q' = h_\tau$, $p' = h_\tau$. Siccome $h_\tau \gtrless k$, così $H_{p\overline{p'}q}$ sarà nullo, mentre, essendovi fra gli indici $p(h_1h_2\ldots h_\varrho)$ il q' cioè h_τ, $H_{\overline{p}q'p'}$ sarà certamente diverso da zero, per cui la (75) porge: $\lambda_{q[\overline{p}q'+p']} = 0$, cioè $\lambda_{k[h_1h_2\ldots h_{\tau-1}h_{\tau+1}\ldots h_\varrho+h_\tau]} = \lambda_{kh_1h_2\ldots h_\varrho} = 0$, come volevasi dimostrare.

Resta da vedere quale valore si debba attribuire a

$$\lambda_{\overline{kkk\ldots k}^{\,\varrho \text{ volte}}}\,.$$

È facile riconoscere che

$$\lambda_{\overline{kkk\ldots k}^{\,\varrho \text{ volte}}}$$

è ancora 0 se $\varrho > 1$. E per verità, preso $k' \gtrless k$, si ponga nella (75),

$$q = k, \quad p = \overline{kk\ldots kk'}^{\,\varrho-1\text{volte}}\,.$$

I due coefficienti $H_{\overline{p}q'p'}$, $H_{p\overline{p'}q}$, cioè:

$$H_{\overline{kk\ldots kk}^{\,\varrho-1\text{ v.}}} = \varrho, \qquad H_{\overline{kk\ldots kk'}^{\,\varrho-1\text{ v.}}} = 1$$

sono entrambi diversi da zero:

$$\lambda_{q'[p+\bar{p}q']} = \lambda_{k'\overset{\varrho-1\,\text{v.}}{\overline{[k\ldots kk']}}}$$

e, siccome si è supposto $\varrho > 1$, contiene almeno un indice k diverso da k', quindi per la dimostrazione precedente è nullo; ne consegue $\lambda_{q[p'+\bar{p}q']}$ cioè, nel caso nostro

$$\lambda_{\overset{\varrho\,\text{volte}}{\overline{kkk\ldots k}}} = 0\,.$$

Abbiamo così trovato che le uniche λ diverse da zero, devono essere del tipo λ_{qq} e queste bisogna che sieno eguali tra loro, come si verifica, ponendo nella (75), $p = q'$, $p' = q$, perchè allora se ne trae $\lambda_{qq} = \lambda_{q'q'}$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$; le (74) potranno scriversi sotto la forma

$$(74')\qquad \begin{cases} X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi + \lambda\varepsilon_{qp}\psi = 0\,, \\ \overline{\Omega}_\mu = 0\,, \end{cases}$$

e, come abbiamo visto, saranno soddisfatte dalle funzioni A e B. Ora non può essere $\lambda = 0$, poichè le (74′) coinciderebbero colle Ω_μ, mentre si è escluso che A e B sieno invarianti assoluti; procedendo, quindi, come nel caso di $\mu = 0$, si riconosce che $\psi_\sigma = A^{1/\lambda}$ è integrale di un sistema analogo al (74′), dove $\lambda = 1$, cioè a dire delle (70), (71). Sarà adunque $\chi_\sigma = \psi_\sigma/\psi = A^{1/\lambda}/\psi$ il richiesto integrale particolare delle (72), (73) non indipendente da ψ.

22. – Noi ci siamo finora occupati delle ipofunzioni, che rendono invarianti gli integrali della forma:

$$J = \int_C^{(n)} \psi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\ ;$$

esaminiamo da ultimo se esistono espressioni ψ', dipendenti dalle solite quantità, per cui riescano invarianti espressioni come:

$$\int_{C'}^{(n')} \psi\, dx_{\tau_1}\, dx_{\tau_2} \ldots dx_{\tau_{n'}}\,,$$

dove il campo di integrazione C' è ad $n' < n$ dimensioni, rappresentando $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n'}$ certi n' distinti tra i numeri 1, 2, ..., n.

Ripetendo proprio identicamente quanto fu detto al § 17, si giunge intanto a provare essere condizione necessaria e sufficiente per l'invarianza di:

$$\int\limits_{C'}^{(n')} \psi' \, dx_{\tau_1} dx_{\tau_2} \ldots dx_{\tau_{n'}},$$

che la funzione integranda ψ' soddisfaccia alle equazioni seguenti:

$$(66')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi'}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ X^{(1)}_{(\mu)\tau_1\tau_1}\psi' + \psi' = 0\,, \quad X^{(1)}_{(\mu)\tau_2\tau_2}\psi' + \psi' = 0\,, \quad \ldots, \quad X^{(1)}_{(\mu)\tau_{n'}\tau_{n'}}\psi' + \psi' = 0\,, \\ X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi' = 0\,, \qquad \text{per tutte le coppie di valori } p,\ q \text{ diverse da } (\tau_1\tau_1) \ldots (\tau_{n'}\tau_{n'})\,; \\ \overline{\Omega}_\mu = 0. \end{cases}$$

Ora queste equazioni sono tutte del tipo

$$X^{)\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi + \lambda_{qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi = 0\,,$$

e noi abbiamo visto (pag. 98) che sono compatibili equazioni siffatte, solo quando sia: $\lambda_{qp_1p_2\ldots p_\varrho} = 0$, per $\varrho > 1$, e inoltre, per $\varrho = 1$, $\lambda_{qp} = \varepsilon_{qp}\lambda$, quando cioè esse abbiano la forma (74'). Ora, se n' è minore di n, le equazioni (66') manifestamente non appartengono a questa categoria, per cui si può a priori escludere l'esistenza di invarianti integrali del tipo

$$\int\limits_{C'}^{(n')} \psi' \, dx_{\tau_1} dx_{\tau_3} \ldots dx_{\tau_{n'}} \text{ con } n' < n.$$

22. – Vogliamo ancora accennare come la ricerca delle ipofunzioni si possa estendere al caso di un qualsiasi gruppo G. Se si suppone infatti che esso operi su $n + m$ variabili: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cui corrispondono le trasformazioni infinitesime $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_m$ funzioni delle precedenti x, cui spettano le trasformazioni infinitesime $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$, per determinare le ipofunzioni basta assumere a punto di partenza la (63) e supporre che la variazione del corrispondente invariante, senza essere zero identicamente, si annulli per tutti gli spostamenti ξ, ζ conciliabili col nostro gruppo, si annulli cioè, dopo che si sono ridotte le variazioni ξ, ζ e loro derivate a mezzo delle equazioni differenziali lineari, che definiscono le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo.

Questo procedimento permetterà in ogni caso di stabilire le equazioni differenziali, cui devono soddisfare le ipofunzioni richieste.

Sarà opportuno illustrare questo concetto con un esempio.

Sia il gruppo di Möbius [30] $\partial\xi/\partial x + \partial\eta/\partial y = 0$ e proponiamoci di determinare le ipofunzioni d'ordine zero, cioè tutte le espressioni $\psi(x, y)$, tali che gli integrali del tipo

$$J = \iint \psi(x, y)\, dx\, dy$$

non mutino di valore, per effetto delle trasformazioni del gruppo.

Dovendosi avere:

$$\delta J = \frac{\partial\psi}{\partial x}\xi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\eta + \psi\left\{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right\} = 0\ ,$$

per tutti gli spostamenti ξ, η legati dalla relazione $\partial\xi/\partial x + \partial\eta/\partial y = 0$, la $\delta J = 0$, ridotta, ci porge $\partial\psi/\partial x = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$; e quindi $\psi=$cost è la espressione più generale per le ipofunzioni d'ordine zero.

L'invarianza di

$$\int dx\, dy$$

ci dice, ciò che del resto è notissimo, che, eseguendo una trasformazione del gruppo sopra una figura qualsiasi, la sua area rimane inalterata.

Padova, Giugno 1894.

---

(30) Lie, *Ueber Differentialinvarianten*, «Math. Annalen», B. XXIV (1884), S. 561; Gesamm. Abhandl.», B. VI, Leipzig–Oslo, Teubner–Aschehoug (1927); II Abhandl., pp. 65–138.