I.

SUGLI INFINITI ED INFINITESIMI ATTUALI QUALI ELEMENTI ANALITICI

«Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti», s. VII, t. IV (1892-93)

pp. 1765-1815

I concetti di infinito e infinitesimo attuale, di cui potevasi riscontrare il germe nelle opere di CAVALIERI e di LEIBNITZ, disparvero poi completamente dal dominio della matematica; nell'analisi, perchè, fissate le basi del calcolo sul concetto di limite, nessun'altra teoria ne faceva sentire il bisogno, nella geometria, per l'influenza dell'empirismo fino ad oggi dominante.

Solo pochi anni or sono dal CANTOR e dal DU BOIS-REYMOND fu ripresa una tale questione, posta però e studiata da essi sotto punti di vista essenzialmente diversi. Il primo ricava il concetto di numero transfinito, movendo da considerazioni sulla serie naturale dei numeri interi; il secondo mostra la opportunità di introdurre nuovi simboli (numeri) per rappresentare l'ordine di infinità di alcune funzioni.

Tuttavia nè i risultati di questi due matematici, nè quelli, cui posteriormente pervenne lo STOLZ, soddisfanno a tutti i principii fondamentali dell'aritmetica e non sono quindi suscettibili di una trattazione analitica, che corrisponda agli ordinarii procedimenti di calcolo.

Il chiar.mo Prof. VERONESE, nella sua opera magistrale *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* ecc. (Padova, Tip. del Seminario, 1891), come seppe abbattere gli ostacoli, che pregiudizî inveterati opponevano allo svolgimento della ipergeometria, quale scienza pura, così, essendo condotto da quegli studii a discutere e a riformare i principii di tutta la geometria, apportò, anche in tale riguardo, vedute nuove e feconde. Tra queste, per lo scopo nostro, ci limiteremo ad accennare la possibilità astratta di segmenti infiniti ed infinitesimi limitati e la conseguente ammissibilità di nuovi segmenti, pur essi infiniti od infinitesimi, che, di fronte ai primi, si comportino come quelli di fronte ai finiti (infiniti ed infinitesimi dei varî ordini).

Quindi, per rappresentare questi enti così introdotti, egli coordina loro dei numeri e ne stabilisce le operazioni fondamentali; codesti numeri tuttavia non possono adoperarsi con vantaggio quali strumenti analitici, da un lato per la loro origine essenzialmente geometrica (la quale appunto li rende più direttamente applicabili a questa scienza), dall'altro per la mancanza di simboli o convenzioni, onde riescano compendiosamente rappresentati.

Sembrami pertanto non del tutto inopportuno di presentare questo stesso soggetto da un punto di vista assolutamente analitico, dando anche, in un campo però più ristretto (n. 25 nota), maggiore generalizzazione al concetto di ordine di infinità. Dovrò poi varcare i confini dell'aritmetica elementare, per poter dedurre qualche conseguenza analitica dei risultati ottenuti e farne da ultimo anche una applicazione d'indole strettamente geometrica.

Monosemii e numeri generali di 2ª specie (ellittici ed iperbolici).

1. – Fissato, nel campo dei numeri reali, un numero qualunque a, noi possiamo pensare insieme con a, o, se si vuole, successivamente ad a, un altro numero reale ν e risguardare il risultato di questa operazione intellettuale diverso da quello, che si sarebbe ottenuto, pensando prima l'a e poi, fatta astrazione da esso, il ν. Indicheremo col simbolo a_ν (che leggeremo a coll'indice ν) il risultato di una siffatta elaborazione mentale. Converremo poi di attribuire l'indice 0 a quei numeri, che vennero originariamente pensati o di cui, come accade per esempio, in seguito alla l'operazione del numerare, formossi l'idea, indipendentemente da alcun concetto di indice. Ciò premesso, il far astrazione dell'indice ν di un dato ente a_ν, con che resta solo l'idea del numero a, val quanto sostituire l'indice 0 al primitivo indice ν di a.

Tali nuovi enti saranno chiamati *numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie.* Tra essi, come fu detto, sono compresi gli ordinarii numeri reali, cui spetta l'indice 0.

Nel monosemio a_ν il numero a si chiama *caratteristica.*

In generale due monosemii li diremo eguali allora e solo allora che hanno eguale indice ed eguale caratteristica. Però risguarderemo nulli e quindi tutti eguali fra loro quei monosemii, la cui caratteristica è 0. Ciò equivale a dire che 0_ν, 0_μ, ecc., si considerano come simboli rappresentanti lo 0. Con tale convenzione, ai monosemii di caratteristica nulla, qualunque sia il loro indice, si potrà sempre intendere sostituito il numero zero, cioè, siccome esso appartiene alla categoria dei numeri reali, il monosemio di indice zero, che ha pure 0 per caratteristica.

2. – Un numero reale è maggiore o minore di zero, secondochè è positivo o negativo; usando le denominazioni testè introdotte, potremo anche dire: Un monosemio d'indice zero è maggiore o minore di 0, secondochè la sua caratteristica è positiva o negativa. Questa definizione si può generalizzare all'intera classe dei monosemii, stabilendo che un monosemio qualunque a_ν abbia a dirsi maggiore o minore di zero (che sarà corrispondentemente minore o maggiore di a_ν), secondochè la caratteristica a è positiva o negativa. Il monosemio stesso a_ν si dirà in conformità positivo o negativo.

Stabilite le relazioni di disuguaglianza fra lo zero e un monosemio non nullo, prendiamo due monosemii quali si vogliono a_ν e b_μ diversi da zero. Dal loro confronto possono emergere anzitutto due casi distinti: o $\nu = \mu$, o ν è diverso da μ. Nel primo caso, se le caratteristiche a e b sono fra loro eguali, i due monosemii pure, per la definizione precedente (n. 1) saranno fra loro eguali e scriveremo $a_\nu = b_\mu$. Se le caratteristiche sono differenti, a seconda che $a \gtrless b$, porremo di conformità $a_\nu \gtrless b_\mu$. Se invece $\nu \gtrless \mu$, ove inoltre si suppongano le caratteristiche entrambe positive, risguarderemo come maggiore dell'altro quello tra i due monosemii, cui compete indice maggiore. Quando le caratteristiche non sono tutte due positive, si applicherà in prima il criterio precedente, risguardandole tali, e la relazione di disuguaglianza, così risultante, si dovrà poi modificare a seconda dei segni dei due monosemii, come se si trattasse di due numeri reali (1).

In conseguenza di queste definizioni, i segni $=$, $>$, $<$ assumono, secondo i casi, significati diversi, ma soddisfanno sempre (ciò, che si ricava immediatamente, passando in rassegna i diversi casi possibili) alle leggi fondamentali, che li caratterizzano, quando si riferiscono ai numeri ordinarii, ai segmenti del continuo rettilineo, ecc.

Così, per esempio, dal confronto di due monosemii a_ν e b_μ, emerge sempre o $a_\nu = b_\mu$, o $a_\nu > b_\mu$, o finalmente $a_\nu < b_\mu$ e di questi fatti si verifica uno solo. Se $a_\nu > b_\mu$ e $b_\mu > c_\varrho$, si ha subito $a_\nu > c_\varrho$ e via dicendo.

3. – Proponiamoci di definire il simbolo

$$\sum_1^n{}_r\, a_\mu^{(r)} = a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \dots + a_\mu^{(n)},$$

essendo $a_\mu^{(1)}$, $a_\mu^{(2)}$, ..., ecc., monosemii dello stesso indice. Tale simbolo

(1) Possiamo riconoscere fin d'ora nei monosemii i contrassegni degli infiniti e degli infinitesimi. Infatti, per le definizioni adottate, i monosemii d'indice $\nu > 0$ sono, in valore assoluto, maggiori di tutti i numeri finiti ordinari (monosemii d'indice 0), e i monosemii d'indice minore di 0, pur non essendo nulli, sono minori d'ogni numero finito.

diciamo *somma* dei numeri $a_\mu^{(1)}$, $a_\mu^{(2)}$, ..., che ne sono gli addendi e ne fissiamo il significato colla seguente definizione:

Colla scrittura

$$\sum_1^n {}_r\, a_\mu^{(r)}$$

si intende il risultato, che si ottiene, facendo astrazione dall'indice comune degli addendi, sommandoli insieme e attribuendo al totale l'indice μ stesso.

Così avremo per definizione:

$$a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \dots + a_\mu^{(n)} = \{a^{(1)} + a^{(2)(n)} + \dots\} + a_\mu ,$$

qualunque sieno gli addendi a, purchè, si intende, in numero finito.

Sarebbe facilissimo il mostrare, nè occorre insistere maggiormente, come, per la somma di più monosemii dello stesso indice, così definita, valgono tutte le proprietà dell'addizione ordinaria. Accenniamo ancora che, avendo noi inteso parlare della somma algebrica delle a, si trovano senz'altro estese alla sottrazione di monosemii dello stesso indice le proprietà ricordate.

4. – Indichiamo colla lettera G un gruppo di monosemii, i cui elementi abbiano *indici fra loro distinti* (²), per esempio:

$$a_{\nu^{(1)}}^{(1)}, \quad a_{\nu^{(2)}}^{(2)}, \quad \dots, \quad a_{\nu^{(n)}}^{(n)}, \quad \dots$$

e prendiamo a considerare gli indici $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, ..., $\nu^{(n)}$, ..., i quali costitui scono un gruppo Γ di numeri reali ordinarî. Fra tutti i possibili gruppi Γ, presentano per noi uno speciale interesse quelli, che soddisfanno a particolari condizioni.

Per esempio, può accadere che, scelto un numero A arbitrariamente piccolo (cioè grande quanto si vuole e negativo), sia pur sempre finito il numero degli elementi $\nu^{(r)}$ di Γ maggiori di A. (Basta supporre che G e quindi Γ sieno costituiti da un numero finito di elementi, per convincersi della possibilità dell'ipotesi fatta). I gruppi di questo tipo li chiameremo *ellittici* e si potranno anche contraddistinguere, dicendo che essi soddisfanno alla condizione (E) o, se si vuole, che possiedono la proprietà (E).

Del pari si potranno costruire dei gruppi G, di cui i Γ corrispondenti sieno invece tali che, assegnato un numero A arbitrariamente grande, sia sempre finito il numero di elementi $\nu^{(r)}$ di Γ minori di A. Questo

---

(²) La ragione di questa restrizione apparirà nel paragrafo seguente.

carattere, che, collo scambio delle parole maggiore e minore, corrisponde al precedente, sarà indicato col simbolo (I), ed *iperbolici* si diranno i gruppi corrispondenti.

Fissiamo ora alcune proprietà, che competono ai gruppi ellittici. Vedremo poi che proposizioni del tutto analoghe si potranno enunciare pei gruppi iperbolici.

Supppongasi dunque dato

$$G = a^{(1)}_{\nu^{(1)}},\ a^{(2)}_{\nu^{(2)}},\ \ldots,\ a^{(n)}_{\nu^{(n)}},\ \ldots$$

sicchè sarà $\Gamma = \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$, il gruppo di numeri reali, rispetto al quale è verificata la (E). Si ha intanto che i numeri $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$, non possono ammettere alcun elemento limite l finito. Infatti, ove esso esistesse, in ogni suo intorno comunque piccolo, dovrebbero cadere infiniti elementi del gruppo, nè potrebbe quindi contemporaneamente avvenire, come segue invece dalla (E), che, per $l' < l$, il numero delle $\nu^{(r)}$ maggiori di l' fosse finito. Di più si ha subito:

[E_1] Il gruppo ammette un massimo.

[E_2] Il gruppo è costituito da un numero finito di elementi, oppure è tale che questi elementi hanno per limite inferiore $-\infty$, senza ammettere contemporaneamente alcun altro elemento limite.

[E_3] Si può ordinare il gruppo, costituendo una successione, i cui termini sono disposti in ordine decrescente. Questi sono in numero finito, ovvero decrescono indefinitamente.

Analogamente pei gruppi del tipo (I) si conclude:

[I_1] Esiste un minimo.

[I_2] Gli elementi del gruppo sono in numero finito, ovvero hanno per limite superiore l'infinito, nè ammettono alcun altro elemento limite.

[I_3] Si possono disporre gli elementi del gruppo in ordine crescente. La successione, che così si ottiene, consta di un numero finito di termini, ovvero ha per limite $+\infty$.

I gruppi limitati godono ad un tempo delle proprietà (E) ed (I), e, si riconosce facilmente, che sono i soli.

5. – Un gruppo G di monosemii si può considerare anche sotto un altro punto di vista, immaginando che esso porga il mezzo di determinare uno ed un solo monosemio, quando si fissa un indice ν: ed infatti, se ν è un elemento di Γ, cioè se esiste un monosemio a_ν appartenente al gruppo G, il cui indice sia ν, e in questo caso ne esiste uno solo (n. 4 nota), allora si potrà far corrispondere a_ν a ν; in caso diverso, quando cioè all'indice ν non corrisponde in G alcun monosemio, si potrà convenire che spetti a quell'indice la caratteristica 0. Così la legge di corrispondenza riesce univoca, senza eccezione alcuna; è poi chiaro che assegnare un gruppo di monosemii, i cui elementi abbiano indice distinto, coincide col porre un algoritmo, mediante il quale ogni indice determina una ed una sola caratteristica.

Ciò ritenuto, possiamo dare le seguenti definizioni fondamentali:

Se un gruppo ellittico si considera come dato, la rappresentazione mentale corrispondente si dirà *numero generale ellittico.*

Numero generale iperbolico è la rappresentazione analoga, relativa però ad un gruppo iperbolico.

Queste due classi di numeri verranno studiate ciascuna per sè, indipendentemente dall'altra; tuttavia si troverà che le loro proprietà si corrispondono univocamente e si possono ricavare letteralmente una dall'altra, collo scambio delle parole maggiore e minore, massimo e minimo, ellittico ed iperbolico. Per rendere manifesto tale nesso, addotteremo sul principio una disposizione simultanea, che, colla semplice sostituzione di alcuni vocaboli, posti fra parentesi, permette immediatamente di passare dal sistema ellittico all'iperbolico.

6. – I numeri ellittici e gli iperbolici si chiameranno complessivamente *numeri generali di seconda specie.*

Integranti monosemie di un numero generale, o semplicemente integranti, sono i monosemii del gruppo G corrispondente. Le integranti (n. 4) hanno indici tutti distinti. Dato un numero generale, è fissato l'algoritmo determinativo delle sue integranti (n. 5), si ha cioè una legge, mediante la quale, scelto un indice, si risale alla integrante corrispondente.

Il carattere (E) $((I))$ di ciascun gruppo, il quale definisce un numero generale ellittico (iperbolico) a, dà luogo alle seguenti proprietà dei numeri stessi.

I. *È sempre finito il numero delle integranti di* a, *il cui indice sia maggiore* (*minore*) *di un numero prefissato* A.

II. *Tra le integranti, ve ne ha una* a_ν *di indice massimo* (*minimo*); *essa si dirà* valore principale *del numero* a, *che si considera, e si scriverà* $a_\nu = [a]_E$ $(a_\nu = [a]_I)$. A denotare questo fatto, diremo talvolta che a appartiene all'indice ν.

III. *Le integranti di un numero* a, $a^{(0)}_{\nu^{(0)}}$, $a^{(1)}_{\nu^{(1)}}$, ..., $a^{(n)}_{\nu^{(n)}}$, ... *si possono ordinare in modo che i loro indici* $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, ..., $\nu^{(n)}$ *costituiscano una successione decrescente* (*crescente*). Per mettere in evidenza questa proprietà, e senza attribuire per adesso alcun particolare significato al segno $+$, (cfr. n. 9 e 15), indicheremo talora a col simbolo:

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \dots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}} + \dots$$

od anche, secondo i casi,

$$\sum_{0}^{n}{}_r\, a^{(r)}_{\nu(r)}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_r\, a^{(r)}_{\nu(r)}\,,$$

dove supponiamo le ν, che sono tutte distinte (n. 4), disposte in ordine decrescente (crescente) e tali oltre a ciò (n. 4, $[E_3]$ ed $[I_3]$ rispettivamente) che, se il numero delle integranti non è finito, $\lim\limits_{r=\infty} \nu^{(r)} = -\infty$ $(\lim\limits_{r=\infty} \nu^{(r)} = +\infty)$.

Tanto fra i numeri ellittici che fra gli iperbolici, sono compresi i monosemii, i quali provengono da gruppi di un solo elemento. Essi coincidono evidentemente col loro valore principale ed appartengono al proprio indice ([3]).

Ogni gruppo nullo, privo cioè di elementi, sta a rappresentare lo zero. In tale condizione, per le convenzioni fatte (n. 5), sono quei gruppi, pei quali a ciascun indice corrisponde la caratteristica zero.

Considerare un numero ellittico (*iperbolico*) a, *rispetto all'indice* ν, o prendere il valore di a per $E = \nu$ $(I = \nu)$, significa fare astrazione da tutte le integranti di a, il cui indice sia minore (maggiore) di ν. Il risultato di questa operazione, per la proprietà fondamentale I., è sempre costituito da un numero finito di integranti monosemie e queste (n. 4 alla fine) definiscono un nuovo numero ellittico $\operatorname{Val}\limits_{E=\nu} a$ (iperbolico $\operatorname{Val}\limits_{I=\nu} a$), che si leggerà valore di a rispetto all'indice ν, il quale ha, in ordine decrescente (crescente), fino a quella d'indice ν incluso, le stesse integranti di a.

7. – Le definizioni seguenti sono applicabili tanto al sistema ellittico che a quello iperbolico. *Eguali* si dicono due numeri di seconda specie, quando lo sono tutte le loro integranti monosemie, cioè quando i gruppi corrispondenti coincidono. Evidentemente questa definizione vale anche pei monosemii, benchè si riduca allora alla semplice enunciazione del principio di identità.

Dati due numeri generali a e b, diremo che: $a \gtrless b$ *secondochè il valore principale di* a (n. 6, II) (si tratta di monosemii e quindi ci rife-

([3]) Tanto il sistema ellittico, quanto il sistema iperbolico, si presentano quale una generalizzazione dell'ordinario campo numerico, ottenuta introducendo elementi infiniti ed infinitesimi (si vegga la nota al n. 2). Tuttavia, nel solo sistema ellittico, valgono quelle proprietà, che si attribuiscono empiricamente ai concetti di infinito e di infinitesimo, e quindi i numeri del sistema ellittico, a differenza degli iperbolici, si troveranno rappresentabili geometricamente da segmenti limitati, in modo conforme all'intuizione spaziale.

riamo al n. 2) *è maggiore o minore del valore principale di* b [4]. Se le integranti principali e un certo numero tra le successive riescono tra loro eguali, dovremo confrontare la prima coppia di integranti, che nell'ordine degli indici (decrescente o crescente, secondochè si tratta di numeri ellittici od iperbolici) riescono disuguali, e, in conformità alla relazione, risultante da tale paragone, si stabilirà la disuguaglianza fondamentale tra i due numeri in questione. Nè può accadere, per la prima definizione, che le integranti principali dei due numeri e tutte le successive siano uguali, senza che questi pure sieno eguali tra loro. Al solito questa definizione riesce identica, quando si applichi ai monosemii, i quali (n. 6) coincidono col valore principale. Si riconosce immediatamente, che, anche pei numeri di seconda specie, valgono le leggi caratteristiche dei segni $=$, $>$ e $<$.

Un numero di seconda specie si dirà *positivo* o *negativo*, secondo che è positivo o negativo (n. 2) il suo valore principale.

Due numeri ellittici (iperbolici) a e b *si dicono eguali rispetto all'indice* ν, e si scrive:

$$\underset{E=\nu}{a=b} \qquad \left(\underset{I=\nu}{a=b}\right),$$

quando $\underset{E=\nu}{\mathrm{Val}}\, a = \underset{E=\nu}{\mathrm{Val}}\, b \left(\underset{I=\nu}{\mathrm{Val}}\, a = \underset{I=\nu}{\mathrm{Val}}\, b\right)$.

Addizione - sottrazione - moltiplicazione.

8. – Dati n gruppi di monosemii G_i $(i = 1, 2, ..., n)$ (sempre nel senso indicato al n. 4, cioè ciascuno costituito da monosemii con indici tra loro distinti), possiamo costruirne un altro G, che chiameremo *somma* degli n dati, il quale comprenda tutti gli elementi di ciascun G_i, con questa avvertenza però che, se più monosemii, nei diversi gruppi, corrispondono ad uno stesso indice ν, a quest'indice si attribuisca in G, come caratteristica, la somma delle caratteristiche, che gli spettano nei vari G_i. Il gruppo somma comprende adunque tutti i monosemii dei diversi G_i, che hanno indice fra loro distinto e la somma di quelli, cui compete indice eguale (n. 3).

---

[4] L'osservazione, fatta alla fine del n. 4, che i gruppi limitati sono ad un tempo ellittici ed iperbolici, potrebbe far credere che, rispetto alle relazioni di disuguaglianza, il confronto fra due di tali gruppi, a seconda che si risguardano ellittici od iperbolici, possa dar luogo a contraddizione. Si elimina tale dubbio, quando si avverta che qui si tratta di *numeri ellittici* od *iperbolici* e non dei gruppi corrispondenti, e che due numeri, l'uno ellittico e l'altro iperbolico, anche se provengono da un medesimo gruppo limitato, *sono distinti*, poichè (n. 5) il primo è la rappresentazione mentale del gruppo, in quanto esso è ellittico, il secondo invece è la rappresentazione dello stesso gruppo, ma in quanto gode della proprietà (I).

Se ciascun gruppo G_i è ellittico (iperbolico) lo è del pari il gruppo somma.

Scelto infatti un numero qualunque A, se si indica con $k^{(i)}$ il numero degli elementi di G_i, il cui indice sia maggiore (minore) di A, sarà al più

$$\sum_{1}^{n} {}_i\, k^{(i)} ,$$

che è, in ogni caso, finito, il numero degli elementi del gruppo G, cui spetta un indice maggiore (minore) di A.

9. – Una operazione da eseguirsi sui numeri di seconda specie si definirà in generale, enunciando una legge, per mezzo della quale, dati certi elementi, si può costruire un nuovo numero od un sistema di nuovi numeri.

Somma o *totale* di un numero finito n di numeri ellittici (iperbolici) $a_1)$, $a_2)$, ..., $a_n)$, che corrispondono rispettivamente ai gruppi G_1, G_2, ..., G_n ellittici (iperbolici), è il numero definito dal gruppo G somma (n. 8) di G_1, G_2, ..., G_n.

Questa operazione comprende come caso particolare la somma di più monosemii dello stesso indice, precedentemente considerata (n. 3); essa ha poi le proprietà caratteristiche dell'addizione ordinaria ([5]). Il modo, col quale si costruiscono le integranti della somma s di n addendi $a_1)$, $a_2)$, ..., $a_n)$ mostra che, se ad un certo indice non corrisponde integrante in nessuno degli addendi, lo stesso avviene per la somma; in particolare, se gli indici principali di $a_1)$, $a_2)$, ..., $a_n)$ sono tutti inferiori (superiori) ad un certo numero K, ciò si verifica pure per l'indice principale di s, ecc.

Un numero

$$a = a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \ldots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}} ,$$

costituito da un numero finito di integranti, ne è altresì la somma. Infatti il gruppo somma relativo ai monosemii

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}} , \quad a^{(1)}_{\nu^{(1)}} , \quad \ldots , \quad a^{(n)}_{\nu^{(n)}}$$

([5]) Per tutte le operazioni aritmetiche sui numeri di seconda specie si troverà mantenuto l'algoritmo ordinario. Questa caratteristica, comune ai numeri del Prof. VERONESE e ai sistemi ellittico ed iperbolico, li distingue essenzialmente dai numeri transfiniti di CANTOR, dagli ordini di infinità del DU BOIS-REYMOND, dai momenti dello STOLZ. Notiamo poi, come già ebbe ad osservare il Prof. VERONESE, nella sua opera citata, che questa possibilità di conservare tutte le leggi fondamentali dell'aritmetica non è in contraddizione col teorema di WEIERSTRASS, da cui discende che, all'infuori dei numeri reali e complessi ordinarii, non esiste alcun altro sistema, *con un numero finito n di unità indipendenti*, per il quale valgano le ordinarie regole di calcolo. Infatti nè al sistema ellittico, nè all'iperbolico può applicarsi una tale proposizione, poichè ciascuno dei due sistemi contiene un numero infinito di unità I_ν; dove l'indice ν assume tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$.

è precisamente quello, che definisce il numero a. Con ciò si giustifica, per il caso di un numero finito di integranti, la eguaglianza

$$a = a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \dots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}},$$

assunta precedentemente (n. 6, III) come una semplice convenzione. Si vedrà in seguito (n. 16) la ragione del simbolo

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\, a^{(r)}_{\nu^{(r)}}.$$

Dato un numero di seconda specie a, se si cambia il segno alle caratteristiche di tutti gli elementi del gruppo corrispondente G, riesce definito un nuovo numero $(-a)$ della stessa natura di a (cioè ellittico od iperbolico insieme ad a) e tale che $a + (-a) = 0$. Infatti (n. 6) il gruppo somma è tale che ad ogni indice corrisponde la caratteristica 0. Fissata per ogni numero l'esistenza del suo opposto, possediamo gli elementi per definire la sottrazione e riconoscere che è l'operazione inversa della somma: così per la somma algebrica, ecc.

Per *valore assoluto* di un numero negativo (n. 7) si intende il numero positivo opposto. Vale, rispetto ai valori assoluti, il noto teorema che il modulo della somma non è mai maggiore della somma nè minore della differenza dei moduli.

Si verifica subito che considerare una somma rispetto ad un dato indice ν (n. 6) val quanto considerare separatamente ciascun addendo rispetto allo stesso indice e sommare poi i risultati, e cioè:

$$\operatorname*{Val}_{E=\nu}(a+b) = \operatorname*{Val}_{E=\nu} a + \operatorname*{Val}_{E=\nu} b,$$

se i due numeri a e b sono ellittici, ed analogamente:

$$\operatorname*{Val}_{I=\nu}(a+b) = \operatorname*{Val}_{I=\nu} a + \operatorname*{Val}_{I=\nu} b,$$

se trattasi di due addendi iperbolici.

10. – Chiameremo *prodotto* di più monosemii, quel monosemio, che ha per caratteristica il prodotto delle caratteristiche e per indice la somma degli indici. Così, per definizione:

$$a^{(1)}_{\nu^{(1)}} \cdot a^{(2)}_{\nu^{(2)}} \dots a^{(n)}_{\nu^{(n)}} = \left\{a^{(1)} \cdot a^{(2)} \dots a^{(n)}\right\}_{(\nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \dots + \nu^{(n)})}.$$

Si trovano senz'altro estese alla moltiplicazione dei monosemii i caratteri tutti della moltiplicazione ordinaria, per il fatto che le proprietà fondamentali associativa e commutativa valgono separatamente per il prodotto delle caratteristiche e per la somma degli indici.

11. – Dati due gruppi ellittici (iperbolici) G_1 e G_2, i cui elementi, disposti in ordine decrescente (crescente) (n. 4 [E_3] o [I_3]), sieno rispettivamente:

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}},\ a^{(1)}_{\nu^{(1)}},\ \ldots,\ a^{(n)}_{\nu^{(n)}},\ \ldots;\qquad b^{(0)}_{\mu^{(0)}},\ b^{(1)}_{\mu^{(1)}};\ \ldots,\ b^{(n)}_{\mu^{(n)}},\ \ldots,$$

e, scelto un numero A ad arbitrio, noi vogliamo provare che il numero dei monosemii c_ϱ del tipo:

$$a^{(r)}_{\nu^{(r)}} b^{(s)}_{\mu^{(s)}} = \{a^{(r)} b^{(s)}\}_{\nu^{(r)}+\mu^{(s)}},$$

cui compete un indice $\varrho = \nu^{(r)} + \mu^{(s)} > A$ $(\varrho = \nu^{(r)} + \mu^{(s)} < A)$, è in ogni caso finito o nullo. Ed invero, se $\nu^{(r)} + \mu^{(s)}$ deve essere maggiore (minore) di A, a più forte ragione dovranno sussistere le due disuguaglianze $\nu^{(r)} + \mu^{(0)} > A$ e $\nu^{(0)} + \mu^{(s)} > A$ $(\nu^{(r)} + \mu^{(0)} < A$ e $\nu^{(0)} + \mu^{(s)} < A)$. La prima, che può essere scritta $\nu^{(r)} > A - \mu^{(0)}$ $(\nu^{(r)} < A - \mu^{(0)})$, siccome l'indice $\nu^{(r)}$ deve, in ogni caso, appartenere ad un gruppo ellittico (iperbolico), mostra che ve ne ha al più un certo numero finito, i quali fanno al caso nostro; così la seconda $\mu^{(s)} > A - \nu^{(0)}$ $(\mu^{(s)} > A - \nu^{(0)})$, rispetto a μ. Combinando due a due, in ogni maniera, questi valori possibili, resta pur sempre finito il numero di coppie distinte $\nu^{(r)}$ e $\mu^{(s)}$, per cui può essere verificata la disuguaglianza $\nu^{(r)} + \mu^{(s)} > A$ $(\nu^{(r)} + \mu^{(s)} < A)$. Dovrà dunque essere finito il numero delle

$$c_\varrho = a^{(r)}_{\nu^{(r)}} b^{(s)}_{\mu^{(s)}}$$

per cui è $\varrho > A$ $(\varrho < A)$. Come corollario si ha che è del pari finito il numero dei monosemii c_ϱ, ottenuti nello stesso modo, pei quali invece ϱ è eguale ad un numero prefissato ν.

Coi due gruppi ellittici (iperbolici) G_1 e G_2 si può costruirne un terzo Π, i cui elementi sieno dati dal prodotto di un monosemio qualunque $a^{(r)}_{\nu^{(r)}}$ di G per un altro qualsiasi $b^{(s)}_{\mu^{(s)}}$ di G_2, colla solita avvertenza (cfr. n. 8) di considerare come elemento unico, relativo ad un dato indice ν, la somma algebrica di tutti quelli (per il corollario della proposizione precedente sono certo in numero finito), cui compete lo stesso indice ν.

Il nuovo gruppo, così ottenuto, per la dimostrazione data qui sopra, è esso pure ellittico (iperbolico). Si vede poi subito che il monosemio di indice massimo (minimo) si ottiene moltiplicando fra loro

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}} \quad \text{e} \quad b^{(0)}_{\mu^{(0)}},$$

che hanno rispettivamente l'indice massimo (minimo) in G_1 e G_2.

12. – Per *prodotto* di due numeri ellittici (iperbolici) a e b, che corrispondono rispettivamente ai gruppi G_1 e G_2, si intende quel terzo numero ellittico (iperbolico) c, che viene definito dal gruppo Π prodotto di G_1 per G_2.

Se si tien presente l'algoritmo, col quale si è costituito il gruppo Π, si conclude facilmente che la moltiplicazione è commutativa, associativa e distributiva. Se ne estende subito la definizione al caso di un numero qualunque n di fattori.

Abbiamo (n. 6-II, 11):

$$[a]_E[b]_E = [ab]_E\,, \qquad ([a]_I[b]_I = [ab]_I)\,.$$

Il prodotto di due numeri generali, così definito, coincide col semplice prodotto di due monosemii, caso mai i fattori fossero entrambi monosemii. Se uno dei fattori è monosemio, le integranti del prodotto si han subito, moltiplicando il fattore monosemio per le singole integranti dell'altro fattore.

Si intende che, se k è intero e positivo: $a^k = \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{k \text{ volte}}$; di più, se a è monosemio d'indice ν: $(a_\nu)^k = (a^k)_{k\nu}$ L'osservazione fatta or ora che il valore principale del prodotto è il prodotto dei valori principali, si estende naturalmente alle potenze e porge: $[a^k]_E = \{[a]_E\}^k$ $([a^k]_I = \{[a]_I\}^k)$, da cui si desume che, se a appartiene all'indice ν, la sua k-esima potenza appartiene all'indice $k\nu$.

Limiti e serie.

13. – Sia S una successione di numeri ellittici (iperbolici) $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$. Diciamo che un certo numero l è il *limite ellittico* (*iperbolico*) *di quella successione* e scriviamo

$$E\lim_{n=\infty} y^{(n)} = l\,, \qquad (I\lim_{n=\infty} y^{(n)} = l)$$

quando, per ogni quantità positiva σ, comunque piccola (grande), previamente assegnata, si può determinare un elemento della successione $y^{(N)}$, tale che, per tutti gli y ad esso successivi, cioè per $n > N$, si abbia costantemente: $|l - y^{(n)}| < \sigma$ $(|l - y^{(n)}| > \sigma)$.

Rispetto al sistema ellittico, si può osservare che la definizione precedente è analoga a quella, che si dà nel caso delle successioni ordinarie, con questa differenza che il nostro σ non è vincolato ad essere uno dei soliti numeri reali, ma può supporsi appartenente ad un indice algebricamente piccolo quanto si vuole ([6]).

([6]) Questo si potrebbe anche esprimere dicendo che, nelle successioni di numeri ellittici sopra considerate, l'elemento variabile finisce col differire dal proprio limite meno di ogni prefissato infinitesimo, per quanto d'ordine elevato.

14. – Per i limiti definiti nel paragrafo precedente, malgrado i caratteri, che li distinguono dagli ordinari (anzi gli iperbolici non hanno con essi alcuna analogia), valgono gli stessi teoremi, che si danno abitualmente. Ci accontenteremo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite, poichè tutte le altre proprietà discendono in modo affatto evidente.

Mostriamo dunque che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione S di numeri ellittici (*iperbolici*) *ammetta un limite ellittico* (*iperbolico*) l, *si è, che per ogni σ arbitrariamente piccolo* (*grande*) *e positivo, si possa determinare un elemento $y^{(N)}$ della successione, tale che, per due $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$ qualisivogliano ad esso successivi, cioè per $n, m > N$, si abbia costantemente*: $|y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma$ ($|y^{(n)} - y^{(m)}| > \sigma$).

La condizione è necessaria. Infatti, se l è il limite di S, dato σ (di cui porremo in evidenza l'indice principale ν, scrivendo $\sigma_{(\nu)}$), scegliamo una caratteristica positiva ζ ad arbitrio ed un indice $\nu' < \nu$ ($\nu' > \nu$); per ipotesi, esisterà un N tale che per $n, m > N$, ma del resto qualisivogliano, sono verificate ad un tempo le disuguaglianze:

$$(1)\quad |l - y^{(n)}| < \zeta_{\nu'}, \qquad (2)\quad |l - y^{(m)}| < \zeta_{\nu'},$$
$$((1)\quad |l - y^{(n)}| > \zeta_{\nu'}, \qquad (2)\quad |l - y^{(m)}| > \zeta_{\nu'}).$$

La (1) ci dice che $l - y^{(n)}$ appartiene al più all'indice ν', cioè non contiene alcuna integrante di indice maggiore (minore) di ν', e quindi le integranti di l, il cui indice è maggiore (minore) di ν', dovranno anche essere integranti di $y^{(n)}$ e reciprocamente, poichè in caso diverso, comparirebbero nella differenza fra l ed $y^{(n)}$ (n. 9) integranti coll'indice maggiore (minore) di ν', ciò, che per la (1), non può avvenire. Lo stesso dicasi di $y^{(m)}$, sicchè gli $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$ hanno, fino a quella d'indice $\nu' < \nu$ ($\nu' > \nu$), le stesse integranti; la loro differenza appartiene dunque tutt'al più all'indice ν' e, in ogni caso, qualunque sieno n ed m, purchè maggiori di N, si ha:

$$(3)\qquad |y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma_{(\nu)} \qquad ((3)\quad |y^{(n)} - y^{(m)}| > \sigma_{(\nu)}).$$

La condizione (3) è anche sufficiente. Mostreremo infatti come, supponendola soddisfatta, si può determinare un numero l, che si riconosce essere limite della successione.

Per definire l, gioverà costruire un gruppo G, il quale si dimostrerà poi essere ellittico (iperbolico). A tale scopo, scelto un indice ν, si prenda $\nu' < \nu$ ($\nu' > \nu$) e si osservi che, per ipotesi, essendo σ una caratteristica positiva arbitraria, si può determinare un $y^{(N)}$ tale che, per ogni coppia di elementi successivi $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$, si abbia:

$$|y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma_{(\nu')} \qquad (|y^{(n)} - y^{(m)}| > \sigma_{(\nu')}) .$$

Come precedentemente, si desume da questa diseguaglianza che $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$, cioè insomma tutte le y posteriori ad $y^{(N)}$, hanno, fino all'indice $\nu' < \nu$ $(\nu' > \nu)$ e quindi certo fino all'indice ν incluso, le stesse integranti. Per ogni valore dell'indice ν, esiste adunque un $y^{(N)}$ tale che tutte le y ad essa successive hanno la stessa integrante d'indice ν, con che si comprende anche il caso che nessuna di tali y abbia integrante d'indice ν. Si può quindi costruire un gruppo G di monosemii, convenendo attribuire come caratteristica a ciascun indice ν quella stessa, che spetta a ν in tutte le y, successive al detto $y^{(N)}$. Il gruppo G è ellittico (iperbolico), ossia, scelto un numero qualunque ϱ, i monosemii di G con indice maggiore (minore) di ϱ sono in numero finito, perchè essi appartengono anche, per definizione, ad una qualunque fra le y, che seguono un certo $y^{(N)}$, e queste y sono numeri ellittici (iperbolici).

Al gruppo G corrisponde adunque un numero ellittico (iperbolico) l, e questo, per il modo con cui sono costruite le sue integranti, è tale che, scelto un numero positivo comunque piccolo (grande) $\sigma_{(\nu)}$, esiste un $y^{(N)}$ tale che, per $n > N$, ogni $y^{(n)}$ ammette, fino a quella d'indice ν inclusa, le stesse integranti di l. Ne segue che: $|l - y^{(n)}| < \sigma_{(\nu)}$ $(|l - y^{(n)}| > \sigma_{(\nu)})$ per tutti i valori di $n > N$, cioè l è il limite ellittico (iperbolico) di S.

15. – Diciamo una parola anche delle serie, i cui termini sieno numeri generali di seconda specie, applicando queste nozioni sui limiti.

Se si indicano i termini, che in generale saranno numeri ellittici (iperbolici), con $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$ e si pone

$$S^{(r)} = \sum_{0}^{r}{}_{k}\, u^{(k)} ,$$

diremo che la serie proposta è *ellitticamente* (*iperbolicamente*) *convergente*, quando esiste il limite ellittico (iperbolico) S della successione $S^{(r)}$. Questo limite si chiamerà *somma della serie*.

Per stabilire la convergenza di una serie, gioverà spesso ricorrere al seguente teorema:

Una serie è convergente, se la successione di numeri reali, costituita cogli indici principali $\nu^{(0)}{}_0, \nu^{(1)}{}_0, \ldots, \nu^{(n)}{}_0, \ldots$ *dei suoi termini* $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$, *ha, in senso ordinario, per limite* $-\infty$ $(+\infty)$ *ed inversamente.*

Infatti, per la prima parte, si osservi che la successione S ammette limite, se (n. 14), per ogni assegnato $\sigma_{(\nu)}$, esiste un $S_{(N)}$, tale che due $S^{(n)}$ ed $S^{(m)}$ qualisivogliono, ad esso successivi, differiscano fra loro in valore assoluto meno (più) di $\sigma_{(\nu)}$. Ora l'ipotesi fatta sugli indici principali $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots$, permette di determinare un certo $\nu^{(N)_0}$, a partire dal quale, tutti i successivi sono minori (maggiori) di ν. Conseguentemente per $n > m > N$ ogni differenza,

$$S^{(n)} - S^{(m)} = \sum_{n+1}^{m}{}_k\, u^{(k)}$$

apparterrà ad un indice minore (maggiore) di ν (n. 9), avvenendo ciò per ciascuno degli addendi $u^{(m+1)}, u^{(m+2)}, \ldots, u^{(n)}$, di cui essa differenza $S^{(n)} - S^{(m)}$ è la somma. Sarà pertanto: $|S^{(n} - S^{(m)}| < \sigma_{(\nu)}$, $(|S^{(n)} - S^{(m)}| > \sigma_{(\nu)})$, da cui si conclude l'esistenza del limite e la convergenza della serie. Ammesso invece che esista

$$E \lim_{n=\infty} S^{(n)} = S \qquad (I \lim_{n=\infty} S^{(n)} = S)\,,$$

per quanto piccolo (grande) si fissi A, dico che esiste, fra gli indici prinpali $\nu^{(k)_0}$ dei termini $u^{(k)}$ della serie, un certo $\nu^{(N)_0}$ tale che, per $n > N$, $\nu^{(n)_0} < A$ $(\nu^{(n)_0} > A)$. Infatti, dacchè la serie è convergente, a partire da un certo $S^{(N)}$, la differenza fra due S successive qualisivogliono e quindi in particolare fra due S consecutive, cioè un qualunque $u^{(n)}$ per $n > N$, appartiene ad un indice minore (maggiore) di A. Questo mostra appunto che la successione $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots$, costituita cogli indici principali dei termini della serie, ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$.

Per le serie ellittiche, il teorema precedente si può anche enunciare in modo diverso, osservando che, se la successione degli indici principali ha per limite $-\infty$, quella dei termini corrispondenti, come si può verificare facilmente, ha per limite 0, e quindi: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie a termini ellittici converga, è che la successione dei suoi termini abbia per limite ellittico* 0.

Va notato che, per le serie a termini reali o complessi ordinarii, la condizione analoga alla precedente, quantunque necessaria, in generale non basta a stabilire la convergenza.

Si può ora dimostrare che *la somma di una serie ellitticamente* (*iperbolicamente*) *convergente appartiene al massimo* (*minimo*) *fra gli indici principali dei suoi termini o ad un indice minore* (*maggiore*).

Infatti, siccome la successione $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots$, ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$, così, fra gli indici principali $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots$, o ve ne ha uno $\nu^{(p)_0}$ più grande (piccolo) degli altri, o ve ne ha un certo numero finito m, $\nu^{(p(1))_0}, \nu^{(p(2))_0}, \ldots, \nu^{(p(m))_0}, \ldots$, cui compete lo stesso valore massimo (minimo) $\nu^{(p)_0}$. In ogni caso a costituire gli elementi $S^{(r)}$ della successione S, non entrano integranti d'indice superiore (inferiore) a un certo $\nu^{(p)_0}$; lo stesso avviene adunque per il limite S della successione, cioè per la somma della serie.

Se i termini $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}, \dots$ *hanno indici principali fra loro distinti, la somma della serie appartiene effettivamente al massimo (minimo) di quelli* $\nu^{(p)_0}$ e ciò perchè $S^{(p)}$, gli S successivi e quindi il loro limite appartengono in questo caso proprio all'indice $\nu^{(p)_0}$ e non ad un indice minore (maggiore), la qual cosa invece è possibile, quando vi sono più termini $u^{(p(1))}, u^{(p(2))}, \dots, u^{(p(m))}$ collo stesso indice principale massimo (minimo), poichè allora la somma delle corrispondenti integranti potrebbe anche essere nulla: *Di più il valor principale della somma della serie coincide col valor principale di quel suo unico termine, cui spetta l'indice massimo (minimo)* $\nu^{(p)_0}$.

Osserviamo, poichè in seguito si dovrà farne uso, che valgono, rispetto alle serie convergenti di seconda specie, teoremi analoghi a quelli, che si danno nel campo ordinario. Così, per esempio, applicando il teorema che il limite della somma è eguale alla somma dei limiti (per questo rimandiamo all'avvertenza fatta in principio del paragrafo 14), si trova:

$$\sum_0^\infty{}_k u^{(k)} = u^{(p(1))} + u^{(p(2))} + \dots + u^{(p(m))} + \sum_0^\infty{}_{\bar{k}} u^{(\bar{k})},$$

dove $\bar{k}$ prende tutti i valori interi da 0 ad ∞, esclusi $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}$.

Inoltre, e anche di questo dovremo tener conto (n. 20), si può eseguire il prodotto di due serie convergenti di seconda specie in modo del tutto analogo a quello, con cui si ottiene il prodotto di serie ordinarie a termini reali o complessi assolutamente convergenti.

16. – Presenta qualche interesse il caso, in cui i termini $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}, \dots$, di una serie S sieno ordinatamente le integranti

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}}, \quad a^{(1)}_{\nu^{(1)}}, \quad \dots, \quad a^{(n)}_{\nu^{(n)}}, \quad \dots$$

di uno stesso numero ellittico (iperbolico) a, supposto al solito

$$\nu^{(0)} > \nu^{(1)} > \dots > \nu^{(n)} > \dots \qquad (\nu^{(0)} < \nu^{(1)} < \dots < \nu^{(n)} < \dots).$$

La successione degli indici principali relativi ai termini di S è qui costituita dagli indici $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n)}, \dots$ delle integranti di a; ma una tale successione, restando, per ipotesi, escluso che sia costituita da un numero finito di elementi (n. 6, III) ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$, dunque (n. 15) la serie S è convergente e l'algoritmo (n. 14), con cui si definiscono le integranti successive del limite, mostra la loro coincidenza colle integranti di a.

D'altronde due numeri di seconda specie sono eguali quando lo sieno (n. 7) le loro integranti monosemie, sicchè:

$$E \lim_{\nu=\infty} S^{(r)} = a \qquad (I \lim_{\nu=\infty} S^{(r)} = a)$$

cioè ogni numero ellittico (iperbolico) è la somma della serie avente per termini, nell'ordine decrescente (crescente) degli indici, le sue integranti monosemie.

In ciò sta adunque (n. 6, III; 9) la giustificazione dell'uguaglianza simbolica:

$$a = \sum_k^{\infty}{}_0 \, a_{\nu(k)}^{(k)} .$$

Si ha inoltre (n. 15) che ogni numero di seconda specie a è eguale alla somma di m qualunque tra le sue integranti, col numero definito dalle integranti rimanenti, cioè:

$$a = a_{\nu(p^{(1)})}^{(p^{(1)})} + a_{\nu(p^{(2)})}^{(p^{(2)})} + \ldots + a_{\nu(p^{(m)})}^{(p^{(m)})} + \sum_{\bar{k}}^{\infty}{}_0 \, a_{\nu(\bar{k})}^{(\bar{k})} ,$$

dove $\bar{k}$ prende tutti i valori da 0 ad ∞, eccettuati

$$p^{(1)}, \quad p^{(2)}, \quad \ldots, \quad p^{(m)} .$$

17. – Alle considerazioni istituite (n. 13 e 14) sui limiti ellittici, si collega naturalmente il concetto di una successione $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$, i cui elementi possono divenire e mantenersi discosti da un certo numero l meno di ogni quantità σ_ν di caratteristica σ arbitrariamente piccola, ma di indice determinato ν. Il numero l si dice allora *limite della successione rispetto all'indice* ν.

Riguardo alle proposizioni di questo paragrafo, ci converrà notare che non esistono le corrispondenti del sistema iperbolico, quantunque si tratti di una generalizzazione di concetti ordinarî. Veramente la definizione analoga a questa di limite, rispetto ad un determinato indice, si potrebbe dare nell'altro sistema, ma essa non soddisfa più a quelle condizioni, che valgono invece pei numeri ellittici.

Rispetto a queste, cominciamo coll'osservare che, posto $\nu = 0$, si ritrova il concetto ordinario di limite. Mentre una successione $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$, non può ammettere due limiti ellittici distinti (n. 14, Avvertenza) è facile invece riconoscere che, se essa ammette un limite l rispetto all'indice ν, ne ammette infiniti altri, cioè tutti i numeri della forma $l + \alpha$, essendo α un numero qualsiasi, purchè appartenente ad un indice $\nu' < \nu$.

In primo luogo, se $|l - y^{(n)}| < \sigma_\nu$, la differenza fra l ed $y^{(n)}$ appartiene ad un indice $< \nu$ ovvero, pur appartenendo all'indice ν, ha per caratteristica principale un numero minore di σ; lo stesso avviene evidentemente per la differenza fra $l + \alpha$ ed $y^{(n)}$, di guisa che, insieme con $|l - y^{(n)}| < \sigma_\nu$, sarà sempre anche $|l + \alpha - y^{(n)}| < \sigma_\nu$, ossia $l + \alpha$ potrà dirsi esso pure limite di y rispetto all'indice ν. Inoltre si vede subito che, se un certo L è limite di y rispetto all'indice ν, la differenza fra L e l non può appartenere all'indice ν; posto quindi:

$$L = l + \alpha\,, \qquad \text{dovrà essere:} \quad \operatorname*{Val}_{E=\nu} \alpha = 0\,.$$

Segue da ciò che:

$$\operatorname*{Val}_{E=\nu} L = \operatorname*{Val}_{E=\nu} l\,,$$

cioè, considerati rispetto all'indice ν, tutti i limiti della successione proposta sono coincidenti.

Se si risguarda come limite di una successione, rispetto ad un indice determinato, soltanto il valore comune di tutti i suoi limiti, rispetto a quell'indice, si può ancora asserire che il limite di una successione è unico; questo è appunto il caso dei limiti ordinari.

Si possono dimostrare con facilità i due teoremi seguenti:

Perchè la successione $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$, ammetta limite rispetto all'indice ν, è necessario e basta che ciò avvenga per la successione:

$$\operatorname*{Val}_{E=\nu} y^{(1)}\,, \quad \operatorname*{Val}_{E=\nu} y^{(2)}\,, \quad \ldots\,, \quad \operatorname*{Val}_{E=\nu} y^{(n)}\,, \quad \ldots$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè una data successione $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ ammetta limite, rispetto all'indice ν, si è che, per ogni σ_ν di caratteristica σ arbitrariamente piccola e positiva, esista un $y^{(N)}$ tale che, per $n, m > N$, si abbia costantemente: $|y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma_\nu$.

Divisione.

18. – Ritornando a proprietà dei numeri di seconda specie, le quali si corrispondono nei due sistemi ellittico ed iperbolico, ci riferiremo d'ora innanzi per brevità, meno qualche caso speciale (n. 21), al solo sistema ellittico, riuscendo ormai manifesto quali saranno le proposizioni corrispondenti pei numeri iperbolici. E veniamo alla operazione inversa della moltiplicazione, trovando, innanzi a tutto, il quoziente di due monosemii a_ν e b_μ, cioè quel terzo numero, se esiste, che, moltiplicato per b_μ, riproduce a_ν. Apparisce immediatamente che codesto numero esiste ed è il monosemio

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\nu-\mu},$$

quando però la caratteristica b del divisore e quindi il divisore stesso sia diverso da 0. Del resto basta fare il prodotto di

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\nu-\mu},$$

per b_μ, che si ha per risultato il monosemio a_ν.

19. – Dati ora due numeri ellittici a e b, di cui almeno il secondo b e quindi $[b]_E$ diverso da 0, si tratta di fissare l'algoritmo determinativo di un terzo numero c tale che $bc = a$.

Sia

$$a = a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \ldots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}} + \ldots, \qquad b = b^{(0)}_{\mu^{(0)}} + b^{(1)}_{\mu^{(1)}} + \ldots + b^{(n)}_{\mu^{(n)}} + \ldots$$

dove si suppongono al solito gli indici delle integranti disposti in ordine decrescente.

Facciamo

$$u_0 = \frac{[a]_E}{[b]_E} = \frac{a^{(0)}_{\nu^{(0)}}}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}} = \left(\frac{a^{(0)}}{b^{(0)}}\right)_{\nu^{(0)}\mu^{(0)}}, \quad u^{(1)} = \frac{[a - u^{(0)}b]_E}{[b]_E} = \frac{[a - u^{(1)}b]_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}},$$

e, in generale, posto $S^{(r-1)} = \sum_k\limits_{0}^{r-1} u^{(k)}$:

$$u^{(r)} = \frac{[a - S^{(r-1)}b]_E}{[b]_E} = \frac{(a - S^{(r-1)}b)_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}}.$$

Come quozienti di due monosemii, di cui il divisore $[b]_E$ è, per ipotesi, diverso da 0, le u (n. 18) sono esse pure monosemie e si può osservare, in primo luogo, che, succedendosi come vengono definite, riescono disposte secondo l'ordine decrescente dei loro indici, cioè qualunque sia r, l'indice di $u^{(r+1)}$ è minore dell'indice di $u^{(r)}$. Infatti, nella espressione

$$\frac{[a - S^{(r)}b]_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}},$$

di $u^{(r+1)}$, si può mettere $S^{(r)}$ sotto la forma: $S^{(r-1)} + u^{(r)}$, e sarà allora:

$$u^{(r+1)} = \frac{[(a - S^{(r-1)}b) - u^{(r)}b]_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}}.$$

D'altra parte per definizione: $u^{(r)}[b]_E = [a - S^{(r-1)}b]_E$, e, siccome il monosemio $u^{(r)}$ è anche il suo valor principale, si avrà $u^{(r)}[b]_E = [u^{(r)}]_E[b]_E$, cioè (n. 12) eguale a $[u^{(r)}b]_E$, e quindi: $[u^{(r)}b]_E = [a - S^{(r-1)}b]_E$ la quale, mostrando la coincidenza dei valori principali di $a - S^{(r-1)}$ e di $u^{(r)}b$, permette di asserire che la loro differenza $(a - S^{(r-1)}b) - u^{(r)}b$ appartiene ad un indice minore dell'indice principale comune. Ne segue che l'indice del dividendo $[(a - S^{(r-1)}b) - u^{(r)}b]_E$, nell'espressione di $u^{(r+1)}$, si trova inferiore all'indice del dividendo $[a - S^{(r-1)}b]_E$, che spetta invece ad $u^{(r)}$; il medesimo avviene pei quozienti, essendovi in entrambi i casi lo stesso divisore $b^{(0)}_{\mu^{(0)}}$. Riesce così dimostrato che gli indici delle u costituiscono una successione decrescente e di ciò avremo bisogno più innanzi. Prescindendo per ora da questo fatto, veniamo alla parte essenziale della nostra ricerca, occupandoci di stabilire che il gruppo G costituito dai monosemi u è ellittico.

A tale scopo, osserviamo dapprima come ogni indice, che spetta ad un monosemio u, abbia la forma:

$$F = \nu^{(\tau)} - \mu^{(0)} - s\mu^{(0)} + \mu(p^{(1)}) + \mu(p^{(2)}) + \dots + \mu(p^{(s)}),$$

essendo $\nu^{(\tau)}$ uno qualunque fra gli indici delle integranti di a; $\mu^{(p^{(1)})}$, $\mu^{(p^{(2)})}, \dots, \mu^{(p^{(s)})}$, s qualisivogliono indici spettanti a monosemii di b sucsivi, si intende, a μ_0. In caso diverso infatti basterebbe diminuire s di una unità. Ciò avviene effettivamente per il primo monosemio $u^{(0)}$, il cui indice $\nu^{(0)} = \mu^{(0)}$ si desume dal tipo indicato, supponendo $\nu^{(\tau)} = \nu^{(0)}$ ed $s = 0$. Di più è facile riconoscere che, se i primi r monosemii u, cioè $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(r-1)}$ hanno i loro indici della forma F, anche l'$(r+1)$-esimo $u^{(r)}$ riesce dello stesso tipo. Infatti, $S^{(r-1)}$ essendo costituito di termini di indice F, il prodotto $S^{(r-1)}b$ (n. 12) avrà le sue integranti con indici tutti della forma $F + \mu^{(p^{(s+1)})}$ e l'indice principale di $a - S^{(r-1)}b$, ossia l'indice del monosemio $[a - S^{(r-1)}b]_E$ sarà del tipo $\nu^{(\tau)}$ o $F + \mu^{(p^{(s+1)})}$, secondo che esso proviene da integranti di a o da integranti di $S^{(r-1)}b$. La divisione per $b^{(0)}_{\mu^{(0)}}$ dà poi, per l'indice di $u^{(r)}$, le espressioni $\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)}$ ovvero $F + \mu^{(p^{(s+1)})} - \mu^{(0)}$, che sono, in ogni caso, del tipo F.

Ricordiamo ora che il nostro scopo si è di provare finito il numero dei monosemii u, il cui indice supera un numero qualsiasi prefissato A, ossia, per quanto si è visto, che è limitato il numero delle espressioni della forma:

$$F = \nu^{(\tau)} - \mu^{(0)} - s\mu^{(0)} + \mu^{(p^{(1)})} + \mu^{(p^{(2)})} + \dots + \mu^{(p^{(s)})} > A.$$

Perciò cominciamo dall'osservare che, quando sia:

$$\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)} - s\mu^{(0)} + \mu^{(p^{(1)})} + \mu^{(p^{(2)})} + \ldots + \mu^{(p^{(s)})} > A \,,$$

dovrà a più forte ragione essere soddisfatta la disuguaglianza:

$$\nu^{(0)} - \mu^{(0)} - s(\mu^{(0)} - \mu^{(1)}) > A \,,$$

poichè in ogni caso:

$$\nu^{(\tau)} \leqslant \nu^{(0)} \,, \quad \mu^{(p^{(1)})} \,, \quad \mu^{(p^{(2)})} \,, \quad \ldots \,, \quad \mu^{(p^{(s)})} \leqslant \mu^{(1)} \,;$$

ossia dovremo avere:

$$s < \frac{\nu^{(0)} - \mu^{(0)} - A}{\mu^{(0)} - \mu^{(1)}}$$

e quindi s, che è per sua natura intero e positivo, o nullo, lo potremo dire, in ogni eventualità, minore del massimo intero contenuto in

$$\left| \frac{\nu^{(0)} - \mu^{(0)} - A}{\mu^{(0)} - \mu^{(1)}} \right|$$

aumentato di una unità; e questo, per brevità, chiameremo n.

Ritornando alla nostra condizione:

$$\nu^{(\tau)} - s\mu^{(0)} + \mu^{(p^{(1)})} + \mu^{(p^{(2)})} + \ldots + \mu^{(p^{(s)})} > A + \mu^{(0)} \,,$$

vediamo che essa non può essere soddisfatta, se per $\nu^{(\tau)}$ si prenda un numero $\leqslant A + \mu^{(0)}$, poichè la parte rimanente $-s\mu^{(0)} + \mu^{(p^{(1)})} + \mu^{(p^{(2)})} + \ldots + \mu^{(p^{(s)})}$ è essenzialmente negativa. Di più, se indichiamo genericamente con μ uno degli s indici $\mu^{(p^{(1)})}$, $\mu^{(p^{(2)})}$, ..., $\mu^{(p^{(s)})}$, sarà pure, per le ragioni accennate, $\nu^{(0)} - 2\mu^{(0)} + \mu > A$, di guisa che ciascuna μ deve soddisfare alla disuguaglianza $\mu > A + 2\mu^{(0)} - \nu^{(0)}$. Ora sappiamo che a possiede al più un certo numero finito e determinato N di integranti, il cui indice è maggiore di $A + \mu^{(0)}$, b d'altra parte contiene al più un certo numero pure finito M di integranti, il cui indice è superiore ad $A + 2\mu^{(0)} - \nu^{(0)}$. Perciò, con ciascun $\nu^{(\tau)}$ potremo al massimo costituire P indici F distinti, che possono spettare a monosemii u del gruppo G e sieno maggiori di A, indicando P la somma delle combinazioni con ripetizione di M elementi (1 a 1), (2 a 2), ..., (n a n). Ma di indici $\nu^{(\tau)}$ ve ne ha al più N compatibili collo scopo prefissoci, potremo dunque asserire che il numero delle u, il cui indice supera un numero prefissato A, è certamente inferiore a NP, quindi in ogni caso finito.

Per conseguenza il gruppo G è ellittico e definisce un numero c; siccome abbiamo visto precedentemente che le u, come vengono definite, riescono disposte secondo l'ordine decrescente degli indici, lo stesso c è (n. 16) la somma della serie

$$\sum_0^\infty{}_k\, u^{(k)}, \qquad \text{ossia} \qquad c = E \lim_{r=\infty} S^{(1)}.$$

D'altra parte, sempre per essere ellittico il gruppo G, la successione, costituita cogli indici u, non solo è decrescente, come abbiamo visto fin da principio, ma è anche indefinitamente decrescente oppure costituita da un numero finito di termini; lo stesso vale per gli indici dei monosemii $[a - S^{(r)}b]_E$, i quali differiscono per la costante $\mu^{(0)}$ dagli indici delle u corrispondenti; quindi, se per un certo valore finito di r, non è già $[a - S^{(r)}b]_E = 0$, da cui si desume $a - bc = 0$, al crescere indefinito di r, l'indice principale di $a - S^{(r)}b$ ha (in senso ordinario) per limite $-\infty$ e conseguentemente $E \lim_{r=\infty} \{a - S^{(r)}b\} = a - b\, E \lim_{r=\infty} S^{(r)} = 0$, cioè come precedentemente $a - bc = 0$, la quale eguaglianza esprime appunto la caratteristica del quoziente. Ciò stabilito, le proprietà tutte della divisione scaturiscono immediatamente da quelle dell'operazione diretta. Per esempio:

$$\left[\frac{a}{b}\right]_E = \frac{[a]_E}{[b]_E}, \qquad \text{ecc.}$$

Se si considera il modo, col quale si sono definite le u, se ne trae una regola comoda per l'effettivo calcolo del quoziente di due numeri a e b, le cui integranti sieno disposte in ordine decrescente. Basta infatti adottare lo stesso procedimento, che vale per la divisione di due polinomii ordinati secondo potenze decrescenti di una stessa variabile. Come ivi gli esponenti, così, nel caso nostro, gli indici decrescono da termine a termine. Le considerazioni precedenti sono però necessarie per stabilire:

1°) che i monosemii così ottenuti costituiscono le integranti di un numero ellittico;

2°) che questo numero, moltiplicato per il divisore, riproduce il dividendo.

Funzioni esponenziali e trigonometriche.

20. – Facciamo qualche considerazione sulle tre serie:

$$(\alpha) = \sum_0^\infty{}_r \frac{x^r}{r!}, \quad (\beta) = \sum_0^\infty{}_r (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!}, \quad (\gamma) = \sum_0^\infty{}_r -1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

i cui termini generali sono rispettivamente:

$$u^{(r)} = \frac{x^r}{r!}, \quad v^{(r)} = (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!}, \quad w^{(r)} = (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}.$$

Se x è un numero ellittico (iperbolico) e appartiene ad un indice negativo (positivo) ν, cioè $\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, x = 0$, $(\underset{I=0}{\mathrm{Val}}\, x = 0)$, i termini generali $u^{(r)}$ di (α), $v^{(r)}$ di (β) e $(w^{(r)})$ di (γ) apparterranno rispettivamente (n. 12) agli indici $r\nu$, $2r\nu$, $(2r+1)\nu$, e la loro forma mostra senz'altro che, in ciascun caso, per r crescente indefinitamente, la successione degli indici ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$. Le tre serie (n. 15) sono dunque ellitticamente (iperbolicamente) convergenti e definiscono ciascuna un numero ellittico (iperbolico).

Per questi valori di x, come si fa, quando esso è monosemio d'indice 0, possiamo denotare la somma delle serie sopra indicate coi simboli e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ rispettivamente.

Si può osservare che, *se x appartiene all'indice $\nu < 0$ $(\nu > 0)$, lo stesso avviene per* $\operatorname{sen} x$; *invece e^x e* $\cos x$ *appartengono all'indice* 0. Ed infatti i termini generali delle tre serie hanno rispettivamente per indici principali $(2r+1)\nu$, $r\nu$, $2r\nu$ e il massimo (minimo) loro valore, che corrisponde ad $r = 0$, sarà ordinatamente ν, 0, 0. Da ciò, ricordando il paragrado 15, si conclude giusta l'enunciato. Anzi si può aggiungere che $\operatorname{sen} x$ *ha lo stesso valore principale di* x; e^x *e* $\cos x$ *hanno invece per valore principale l'unità.*

Vediamo ora di studiare un po' più da vicino queste tre funzioni, riferendoci da principio alla esponenziale.

La moltiplicazione delle serie, che, nel caso della convergenza ellittica (iperbolica), si effettua (n. 15) come d'ordinario, ci permette intanto di asserire che, se:

$$\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, x = \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, y = 0 \qquad (\underset{I=0}{\mathrm{Val}}\, x = \underset{I=0}{\mathrm{Val}}\, y = 0),$$

$e^x e^y = e^{x+y}$.

Ora, supposto che z sia un numero ellittico (iperbolico), appartenente all'indice 0, si faccia $z = x + \xi$ (n. 16), essendo x l'integrante d'indice 0 e ξ il numero definito dalle successive e quindi tale che $\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, \xi = 0$ $(\underset{I=0}{\mathrm{Val}}\, \xi = 0)$.

Il simbolo e^z sarà ora definito, a mezzo della eguaglianza seguente $e^z = e^{x+\xi} = e^x e^\xi$, dove i due fattori e^x ed e^ξ sono completamente determinati. Se si pone:

$$z^{(1)} = x^{(1)} + \xi^{(1)}, \qquad z^{(2)} = x^{(2)} + \xi^{(2)},$$

si avrà:

$$e^{z(1)}e^{z(2)} = e^{x(1)}e^{\xi(1)}e^{x(2)}e^{x\xi(2)},$$

per definizione; e, permutando i fattori, si troverà:

$$e^{z(1)}e^{z(2)} = e^{x(1)}e^{x(2)}e^{\xi(1)}e^{\xi(2)} = e^{x(1)+x(2)}e^{\xi(1)+\xi(2)} = e^{z(1)+z(2)}.$$

Così pertanto rimane definita la funzione esponenziale *per tutti i valori dell'argomento, che appartengono ad un indice negativo (positivo) o nullo* [7]: *essa mantiene la sua proprietà caratteristica*: $e^a e^b = e^{a+b}$.

21. – È intuitivo il modo, con cui si possono introdurre nel sistema ellittico i numeri complessi, della forma cioè $a + ib$, essendo a e b due numeri ellittici e $i = \sqrt{-1}$.

Avuto riguardo ad alcune ovvie modificazioni nella forma, si riconosce che *i risultati ottenuti precedentemente pei numeri reali, si possono riferire a tutto il campo dei numeri ellittici complessi.* Questa osservazione era necessaria per poter, ciò che ora particolarmente interessa, estendere la relazione di Euler fra le tre serie (α), (β), (γ) e quindi fra le funzioni trigonometriche e la esponenziale, a tutti i valori ellittici di x, pei quali (n. 21) è stata definita la esponenziale stessa. Applicando infatti qualche teorema (n. 13-16) sui limiti e sulle serie, si mostra $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \,\mathrm{sen}\, x$ collo stesso procedimento, che viene impiegato nel campo ordinario. Ciò

---

(7) Limiteremo a questo campo di variabilità la definizione di e^x: tuttavia, rispetto alla serie corrispondente,

$$\sum_0^\infty {}_r \frac{x^r}{r!},$$

gioverà considerare il caso, in cui il numero ellittico (iperbolico) x *contenga esclusivamente integranti d'indice* > 0 (< 0). Il loro numero (n. 4 [E_3] o [I_3]) sarà certamente finito trattandosi di integranti di un numero ellittico (iperbolico) coll'indice maggiore (minore) di un valore prefissato (0 nel nostro caso). Al gruppo limitato, costituito da questi monosemii, corrisponderà, in pari tempo, un numero iperbolico (ellittico), che, per l'ipotesi fatta apparterrà ad un indice > 0 (< 0). In tale condizione adunque (n. 20) la serie

$$\sum^\infty {}_r \frac{x^r}{r!}$$

è *iperbolicamente* (*ellitticamente*) convergente ed ha quindi per somma un numero iperbolico (ellittico).

Questo esempio fa vedere come un'operazione (però trascendente) eseguita su numeri ellittici, possa anche dare per risultato un numero iperbolico e reciprocamente; tuttavia non possiamo qui entrare in particolari e ci accontentiamo di accennare che un'ulteriore estensione della esponenziale condurrebbe a stabilire delle relazioni analitiche fra i due sistemi ellittico ed iperbolico, comprendendoli entrambi in un sistema di numerazione più generale.

risparmia ogni ulteriore considerazione sulle funzioni circolari, poichè, stabilite le espressioni di $\operatorname{sen} x$ e di $\cos x$, per mezzo di e^{ix}, tutte le loro proprietà scaturiscono immediatamente e, quando se ne presenti l'occasione, *le potremo senz'altro ritenere dimostrate*. Così per esempio, si potrà valersene, per stabilire che la integrante di indice 0 d'una funzione trigonometrica dipende solo dalla corrispondente dell'argomento z. Questo numero z si deve supporre appartenente all'indice 0, ovvero ad un indice minore di 0, poichè, solo per tali valori (n. 20), furono definite le funzioni trigonometriche. Si potrà dunque porre $z = x + \xi$, dove (n. 16) x è la integrante d'indice 0 (che potrebbe anche mancare e allora si sostituisce collo 0) e ξ, che appartiene ad un indice $\nu < 0$, è il numero definito dalle integranti successive di z.

Ora, riferendoci per esempio al $\cos z$, noi mostreremo che la sua integrante d'indice 0 si esprime esclusivamente per x. Ed invero: $\cos z = \cos(x + \xi) = \cos x \cos \xi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \xi$. Ricordando che ξ appartiene ad un indice $\nu < 0$, si ha (n. 20) che il valore principale di $\cos \xi$ è l'unità, mentre $\operatorname{sen} \xi$ appartiene all'indice ν.

Per conseguenza $\cos x$ è l'integrante d'indice 0 di $\cos x \cos \xi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \xi$ cioè di $\cos z$. Segue da ciò che, a due valori dell'argomento, i quali hanno la stessa integrante principale d'indice 0, corrispondono due valori del coseno, che hanno pure la stessa integrante principale di indice 0, cioè, se $\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, y$, sarà anche:

$$\underset{E=0}{\mathrm{Val}} \cos z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}} \cos y \,.$$

In particolare si avrà: $\cos \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}} \cos z$ ed analogamente: $\operatorname{sen} \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}} \operatorname{sen} z$.

22. – Mostriamo ora che, per ogni valore di x appartenente all'indice 0, si può determinare un numero l tale che $e^l = x$. Siccome, per brevità, ci limitiamo a considerare le funzioni reali, così supporremo $x > 0$. Del resto una ulteriore estensione del risultato, che otterremo, al campo dei numeri negativi e complessi non presenterebbe alcuna difficoltà e si farebbe al solito, secondo perfetta analogia coi procedimenti ordinari.

Sia pertanto x un numero positivo, che appartiene all'indice 0 e si osservi (n. 16) che esso può mettersi sotto forma $x_0 + \xi$, essendo x_0 il suo valor principale, e ξ il numero definito dalle integranti successive. In virtù delle ipotesi fatte, dovrà x_0 essere un monosemio positivo d'indice 0 e quindi esiste, fra i numeri reali, il suo logaritmo; ξ apparterrà ad un certo indice $\nu < 0$. Ciò premesso si ponga $y^{(0)} = \log x_0$ e si costituisca la successione $y^{(0)}$, $y^{(1)}, \ldots, y^{(r-1)}, y^{(r)}, \ldots$, facendo generalmente:

$$(1) \qquad y^{(r)} = y^{(r-1)} + \frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}} \, .$$

$$(2) \qquad R^{(r-1)} = x - e^{y(r-1)} \, .$$

Le formule ricorrenti (1) e (2) definiscono il termine $y^{(r)}$ della successione, per mezzo del suo antecedente $y^{(r-1)}$, quando però $y^{(r-1)}$ appartenga all'indice 0 o ad un indice minore di 0, poichè, in caso diverso, la esponenziale $e^{y(r-1)}$ non ha per noi alcun significato.

Le posizioni precedenti hanno quindi bisogno di una ulteriore giustificazione. A tale scopo, cominciamo coll'osservare che il primo termine della successione $y^{(0)}$ è monosemio d'indice 0 o nullo, (caso mai fosse $x_0 = 1$) e quindi si può determinare $R^{(0)}$, facendo $R^{(0)} = x - e^{y(0)} = x - x_0 = \xi$, che appartiene all'indice $\nu < 0$.

In generale noi dimostreremo ora che $y^{(r)}$ *non appartiene ad un indice maggiore di* 0 e, in pari tempo, che $R^{(r)}$ appartiene all'indice $2^r \nu$, quando si supponga che $y^{(r-1)}$ non appartenga ad un indice maggiore di 0 e $R^{(r-1)}$ invece all'indice $2^{r-1}\nu$.

Siccome, per $r = 1$, ciò si verifica effettivamente, così, provata la nostra asserzione, pel passaggio da $r-1$ ad r, essa si troverà stabilita in generale. Supposto adunque che $y^{(r-1)}$ vi soddisfaccia, $e^{y(r-1)}$ appartiene all'indice 0 e quindi il quoziente $R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}$, come il dividendo per ipotesi, all'indice $2^{r-1}\nu$. Essendo ora, per la (1), $y^{(r)} = y^{(-1)} + R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}$, esso avrà, fino a quella d'ordine $2^{r-1}\nu$, le stesse integranti di $y^{(r-1)}$, nè può quindi appartenere ad un indice > 0. Stabilita questa prima parte, si potrà porre $R^{(r)} = x - e^{y(r)}$ e dovremo provare che il suo indice principale è $2^r\nu$. Sostituendo ad $y^{(r)}$ il suo valore $y^{(r-1)} + R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}$, per la proprietà caratteristica dell'esponenziale, si avrà:

$$R^{(r)} = x - e^{y(r-1) + R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}} = x - e^{y(r-1)} \sum_0^\infty {}_k \frac{1}{k!} \left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}} \right)^k =$$

$$= x - e^{y(r-1)} \left\{ 1 + \frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}} + \sum_2^\infty {}_k \frac{1}{k!} \left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}} \right)^k \right\} =$$

$$= x - e^{y(r-1)} - R^{(r-1)} - e^{y(r-1)} \sum_2^\infty {}_k \frac{1}{k!} \left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}} \right)^k .$$

Ricordando che, per la (2),

$$x - e^{y(r-1)} - R^{(r-1)} = 0\,, \quad \text{sarà} \quad R^{(r)} = - e^{y(r-1)} \sum_2^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k;$$

il primo fattore $e^{y(r-1)}$ appartiene, come si ebbe ad osservare, all'indice 0, il secondo, cioè la somma della serie

$$\sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k,$$

all'indice $2^r\nu$, che è l'indice principale del suo primo termine

$$\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^2;$$

quindi il prodotto $R^{(r)}$ appartiene effettivamente all'indice $2^r\nu$, come avevamo annunciato.

Ciò premesso, io dico che la successione y ammette un limite determinato l. Infatti, sommando membro a membro s relazioni (1), da $r+1$ ad $r+s$, si ha:

$$y^{(r+s)} - y^r = \frac{R^{(r)}}{e^{y(r)}} + \frac{R^{(r+1)}}{e^{y(r+1)}} + \dots + \frac{R^{(r+s-1)}}{e^{y(r+s-1)}} = \delta\,,$$

e si vede che δ appartiene, qualunque sia s, all'indice $2^r\nu$, il quale, prendendo r sufficientemente grande, può essere reso minore di ogni λ assegnato ad arbitrio; perciò δ può divenire e mantenersi minore di ogni σ_ϱ prefissato ed è questa appunto condizione necessaria e sufficiente (n. 14), affinchè la successione y ammetta un limite determinato l. Di più vogliamo mostrare che $e^l = x$. Proviamo infatti a supporre e^l diverso da x, di guisa che sia $x - e^l = \theta$, essendo θ un numero non nullo, che appartenga ad un certo indice ϱ. Siccome l è il limite della successione y, scelto un indice $\varrho' < \varrho$, possiamo determinare un $y^{(N)}$ tale che, per tutti gli y successivi, sia $|l - y| < \sigma_\varrho$, cioè: o $l = y$, o $l = y + \tau_{\varrho''}$, essendo ϱ'' l'indice principale di τ, (minore od eguale a ϱ'), minore di ϱ. In conformità la differenza $e^l - e^y$ o è nulla, oppure eguale a

$$e^y\{e^{\tau_{\varrho''}} - 1\} = e^y \sum_1^\infty \frac{\tau_{\varrho''}^k}{k!}\,,$$

che appartiene all'indice ϱ''.

D'altra parte la differenza $x - e^{y^{(M)}} = R^{(M)}$ appartiene, l'abbiamo visto precedentemente, all'indice $2^M \nu$ e quindi, siccome $\nu < 0$, al crescere di M, $2^M \nu$ decresce indefinitamente. Si può adunque, prendendo M sufficientemente grande, determinare un $y^{(M)}$ tale che, per tutti gli y ad esso successivi, la differenza $x - e^y$ appartenga sempre ad un indice $< \varrho$.

Così, per uno qualunque tra gli y, che seguono sia $y^{(M)}$, sia $y^{(N)}$, si può porre contemporaneamente:

$$e^l - e^y = d\,, \qquad x - e^y = R\,,$$

dove tanto d (che può anche essere nullo) come R appartengono ad un indice $< \varrho$. Lo stesso avverrà per la loro differenza $x - e^l$, cioè θ, contro la ipotesi, la quale ci siamo provati ad assumere, che θ stessa appartenga propriamente all'indice ϱ.

Si ricava adunque essere l quel numero, di cui volevamo stabilire l'esistenza, da darsi come esponente ad e per riprodurre x, ossia, *per ogni valore di* x, *che appartiene all'indice* 0, *esiste il* $\log x$.

Anche qui, come per il quoziente (n. 19), le proprietà dei logaritmi si deducono con somma facilità da quelle della esponenziale.

Il simbolo a^x finora ha per noi significato solo quando x è un numero ordinario intero e positivo. Servendosi dei logaritmi, si può adesso, *per tutti i valori di* a, *che appartengono all'indice* 0, *e per tutti i valori di* x, *che appartengono ad un indice non maggiore di* 0, definire a^x, ponendo:

$$a^x = e^{x \log a}, \tag{3}$$

di cui il secondo membro ha un senso perfettamente determinato. La (3) è verificata quando, essendo x intero e positivo,

$$a^x = \overbrace{a \ldots a}^{x \text{ volte}}\,,$$

ed è verificata altresì nel campo dei numeri reali. Si ha poi immediatamente dalla (3) stessa, $a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$, ecc.

Cenno sulle funzioni in generale.

23. – Veniamo ora a considerare in generale una funzione $f(x)$ di una variabile reale x, supponendo x suscettibile di prendere tutti i valori ellittici o almeno quelli compresi in un determinato intervallo (m, n), cioè maggiori di m e minori di n. Veramente sarebbe qui opportuno di far vedere come un intervallo, oltre che per mezzo dei suoi estremi, può essere definito in modo diverso. Si avverta però che noi non ci proponiamo affatto di trattare completamente i principî della teoria delle funzioni nel sistema ellittico e nemmeno di riassumere quei risultati, che si presentano come una immediata generalizzazione degli ordinarî. Perciò si trovano qui esposte appena alcune definizioni, in quanto vengono in uso nel successivo paragrafo 24.

Ritenuto questo, potremo limitarci alle nozioni seguenti.

Una funzione $f(x)$ della variabile indipendente x dicesi *continua* in un punto [8] a, se, per ogni assegnato σ_ν arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di a, per tutti i punti x del quale sia

$$(1) \qquad |f(x) - f(a)| < \sigma_\nu .$$

Notiamo, senza insistervi, che si potrebbero distinguere varie specie di continuità, secondo le relazioni che, al decrescere indefinito di σ_ν (cioè quando il suo indice ν si prende negativo e si fa crescere indefinitamente) passano fra ν stesso e l'indice, relativo all'ampiezza del corrispondente intorno di a.

Accenniamo ancora che una funzione $f(x)$ si dirà continua in un punto a, *rispetto ad un indice determinato* ν, quando, senza verificare la precedente condizione di continuità, sia però tale che, per ogni σ_ν, di caratteristica σ arbitrariamente piccola, ma di indice ν prefissato, esiste un intorno di a, di ampiezza c, per tutti i punti x del quale $|f(x) - f(a)| < \sigma_\nu$. Anche in questo caso si dovrebbero esaminare particolarmente i rapporti fra le oscillazioni σ e gli intorni corrispondenti c.

Si dice che l è *limite di* $f(x)$, *per* x *convergente ad* a, quando, per ogni assegnato σ_ν arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di a, per tutti i punti x del quale:

$$|l - f(x)| < \sigma_\nu .$$

Anche rispetto ai limiti di una funzione, determinati dal convergere di un'altra quantità variabile verso un dato valore, si possono considerare alcuni casi speciali. Si può supporre, per esempio, o che x converga ad a, passando solo pei punti di un certo gruppo, ovvero, che, fissato un certo indice ν, la funzione ammetta limite solo rispetto a quell'indice.

Le derivate delle funzioni nel campo ordinario si trovano precisamente nelle due circostanze accennate. Infatti si tratta sempre di elementi di un certo gruppo, cioè di valori monosemii d'indice zero, e si esige che la differenza fra il rapporto incrementale e il suo limite divenga e

(8) S'intende che tali locuzioni geometriche hanno un senso puramente analitico e valgono come comode abbreviazioni; del resto esse conservano lo stesso significato, che loro si attribuisce nella teoria delle funzioni di variabile reale.

resti più piccola d'ogni numero di caratteristica piccola ad arbitrio, ma sempre d'indice 0.

Se, per h convergente a 0, esiste il limite di

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

esso si dirà *derivata di seconda specie* della funzione $f(x)$, relativa al punto x.

24. – Per le funzioni $f(x)$ che, considerate in un punto x monosemio d'indice 0, ammettono in quel punto derivata ordinaria $f'(x)$ e sono tali oltre a ciò che lo stesso $f'(x)$ è la derivata di seconda specie ([9]), si ha la relazione:

$$f'(x) = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

per tutti i valori di h, che appartengono ad un certo intorno c del punto 0. Ed infatti, dacchè $f'(x)$ è limite dell'espressione

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

per h convergente a 0, scelto σ_ν ad arbitrio (a noi converrà di prendere

([9]) Non sempre però, come si riconosce agevolmente, la derivata ordinaria coincide colla derivata di seconda specie; si possono anzi costruire delle funzioni, che ammettono derivata di seconda specie, ma non la derivata in senso ordinario e reciprocamente. Come esempio del primo caso si consideri, in un intervallo compreso fra due qualunque valori monosemii di indice zero, una funzione $f(x)$ tale che, per ogni valore di ξ_0 di x monosemio di indice 0, sia

$$f(\xi_0) = \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{31^n} \cos(31^n \xi),$$

e, per ogni valore di $x = \xi_0 + h$ ($\operatorname*{Val}_{E=10} h = 0$, $h \lesseqgtr 0$), $f(\xi_0 + h) = f(\xi_0) + h$. La funzione $f(\xi_0)$ (veggasi: DINI, *Fond. per la teoria delle funz. di var. reali*, Pisa, Nistri, 1878; p. 163) si è scelta a bello studio in modo che in nessun punto ammetta derivata ordinaria determinata e finita; esiste invece, come è manifesto, la derivata di seconda specie, il cui valore è costante per tutti i punti dell'intervallo ed eguale all'unità.

Ancora più semplice riescirà un esempio del secondo caso. Consideriamo infatti, tanto per fissar le idee, nell'intervallo da -1 a $+1$, una funzione $f(x)$, i cui valori, per $x - \operatorname*{Val}_{E=10} x = 0$, si calcolino dalla relazione $f(x) = \operatorname{sen} x$ e, per $x - \operatorname*{Val}_{E=10} x \lesseqgtr 0$, sia costantemente $f(x) = 0$. Siccome, fra i valori di x, pei quali $x - \operatorname*{Val}_{E=10} x = 0$, sono compresi i monosemii di indice zero, così, per tali punti, in tutto l'intervallo $(-1, +1)$, la $f(x)$ coincide con $\operatorname{sen} x$ e quindi la derivata ordinaria è $\cos x$. Manca invece la derivata di seconda specie, (eccezion fatta pel punto zero), poichè la funzione $f(x)$ è discontinua. Nel punto $x = 0$ esiste la derivata di seconda specie, ma è nulla, mentre la derivata ordinaria ha per valore l'unità.

$\nu < 0$), esiste certamente un intorno c dello zero, per tutti i punti h del quale sia

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \sigma_\nu .$$

Segue da una tale disuguaglianza che $f'(x)$ e

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

differiscono al più per un numero, che appartiene all'indice ν, e quindi, considerati rispetto all'indice 0, che è maggiore di ν, saranno necessariamente eguali. D'altra parte $f'(x)$, essendo una derivata ordinaria, è un monosemio d'indice 0 e quindi coincide con $\operatorname*{Val}_{E=0} f'(x)$, sicchè si conclude per questi valori di h compresi nell'intorno c:

$$f'(x) = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ (^{10}).$$

Applicazione geometrica.

25. – Veniamo ora ad una applicazione geometrica delle cose esposte, cioè a dire cerchiamo di rilevare il significato, che, colla scorta di alcune definizioni fondamentali, si può attribuire ad una conseguenza delle considerazioni precedenti.

A tal uopo si osservi dapprima che la geometria della retta, intesa in senso puramente astratto, al pari di quella d'ogni altro sistema ad

(10) Questa relazione in fondo significa che, per le funzioni, le quali soddisfano alle ipotesi precedenti, *la derivata si esprime come valore del rapporto di due infinitesimi attuali.* Sarebbe facile riconoscere che le funzioni algebriche, circolari, esponenziali e loro combinazioni, per il modo, col quale vennero estese al campo dei numeri ellittici, verificano effettivamente tali condizioni in tutti quei punti, in cui ammettono derivata ordinaria, e l'incremento h, pel quale $f'(x) = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ è, in questo caso, vincolato alla sola restrizione di appartenere ad un indice minore di 0; così, tanto per dare un esempio, posto $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} x + x \log\cos x$, la derivata $f'(x)$ in un punto generico x, cioè $3x^2 + \cos x + \log\cos x - \operatorname{tg} x$ è anche espressa da:

$$\operatorname*{Val}_{E=0} \frac{(x+h)^3 + \operatorname{sen}(x+h) + (x+h)\log\cos(x+h) - x^3 - \operatorname{sen} x - x\log\cos x}{h}$$

purchè $\operatorname*{Val}_{E=0} h = 0$

una dimensione, può dirsi l'enunciato delle proprietà spettanti al continuo numerico, usando convenienti denominazioni geometriche.

Nello stesso modo, coll'introdurre notazioni analoghe, si può definire la geometria di una retta più generale, atta cioè a rappresentare non i soli numeri ordinarii, ma tutti i numeri ellittici o tutti quelli, almeno, che appartengono ad un dato intervallo. Senza considerare separatamente questi due casi, si può osservare che le disuguaglianze fondamentali, l'operazione dell'unire e la sua inversa, ecc., conservano, rispetto ai numeri ellittici, le loro caratteristiche e conseguentemente si interpreteranno sulla retta in modo conforme all'ordinario. Ciò avverrà per tutti i numeri ellittici, se si suppone che la retta ne rappresenti l'intero sistema; se invece essa, sia per semplice definizione (sistema aperto), sia coll'aggiunta di convenzioni ulteriori (sistema chiuso), si risguarda corrispondentemente ad una parte soltanto, allora avranno diretto significato geometrico appena le relazioni, che si riferiscono a numeri di quell'intervallo ([11]).

Lasciando impregiudicata tale questione, rileveremo tuttavia che vi ha in ogni caso una classe di proprietà, la quale non trova riscontro nella geometria elementare, quella cioè, che si riferisce alle relazioni dei nuovi segmenti cogli ordinari (rappresentati cioè dai consueti numeri reali). Tali proprietà sono la traduzione in linguaggio geometrico delle proposizioni riferentisi ai concetti di indice principale, di valore rispetto ad un indice dato, ecc.; esse riposano sulle definizioni seguenti.

Un segmento dicesi d'ordine ν, quando il numero, che lo rappresenta appartiene all'indice ν.

Il segmento rappresentato dal numero 1_ν o, più brevemente, il segmento 1_ν dicesi *unità dell'ordine* ν. L'unità dell'ordine 0 chiamasi *unità fondamentale.*

Un segmento a *dicesi infinito, finito od infinitesimo* secondochè l'indice, cui appartiene a, è maggiore, eguale o minore di 0. *Un segmento* a *dicesi infinito, finito od infinitesimo rispetto ad un numero o segmento dato* k, secondochè il rapporto a/k appartiene ad un indice maggiore, eguale o minore di zero.

L'insieme dei segmenti infinitesimi costituisce il *campo infinitesimo*, rispetto all'unità fondamentale; l'insieme dei segmenti infiniti il *campo all'infinito.*

Considerare una relazione geometrica rispetto all'unità fondamentale

---

([11]) Queste distinzioni avrebbero grande importanza dal punto di vista geometrico, poichè oltre a riferirsi alla retta in sè, sono intimamente collegate colla natura della forma spaziale, cui la retta stessa appartiene. Tuttavia noi qui abbandoniamo tale argomento, avendo in vista una sola applicazione, che, se presenta forse qualche interesse per sè stessa, ha però appena lo scopo di mostrare in qual modo si adoperino i risultati antecedenti.

significa considerare la corrispondente relazione numerica (n. 6) rispetto all'indice 0.

I risultati, ottenuti col metodo puro del prof. VERONESE per la sua forma fondamentale, corrispondono, nelle linee generali, a quelli, cui si perverrebbe, dando forma geometrica ai paragrafi antecedenti, col mezzo delle definizioni ora indicate ([12]).

26. – Riferendoci per un momento all'ordinario sistema di numerazione, ricordiamo che, in senso astratto, il concetto della forma angolare è anch'esso una interpretazione del continuo numerico, quando però si convenga di risguardare coincidenti o meglio di far corrispondere ad uno stesso elemento del fascio due numeri a e b, che differiscono per un multiplo intero di 2π.

Ogni relazione fra numeri si potrà dunque interpretare come relazione fra segmenti, o fra angoli, o fra questi e quelli. In particolare si dirà che a, b, c, sono i lati, α β, γ gli angoli di uno stesso triangolo rettilineo, quando, fra a, b, c, α, β, γ, passino tre qualunque fra le relazioni seguenti della trigonometria generale ([13]) (poichè ogni altra è conseguenza

---

([12]) Che ciò debba avvenire appare evidente, purchè si abbia riguardo al carattere essenziale, comune tanto alla forma fondamentale del Prof. VERONESE, quanto alla retta, che rappresenta il sistema ellittico, di conservare cioè la loro omogeneità nei campi infiniti ed infinitesimi. Tuttavia bisogna avvertire che gli elementi infiniti ed infinitesimi, che noi consideriamo, sono sempre di un ordine (indice) finito ν, mentre la forma fondamentale del Prof. VERONESE è così costituita che, data l'esistenza di un certo gruppo di segmenti, essa contiene anche tutti quelli, i cui ordini vengono rappresentati dai numeri corrispondenti a quel gruppo.

Nell'opera più volte citata del Prof. VERONESE (Intr. n. 93, *m*) si dimostra però che l'insieme dei segmenti infiniti ed infinitesimi, i cui ordini sono finiti con un ordine dato μ, costituisce un gruppo, il quale si trasforma in sè medesimo, per effetto delle operazioni fondamentali eseguite un numero finito di volte. Ora i segmenti, che corrispondono ai numeri del sistema ellittico, formano appunto un gruppo di tale natura e quindi, in certo modo, *il sistema ellittico corrisponde ad una parte soltanto della forma fondamentale del Prof. Veronese, ma è, nel proprio campo, più generale*, poichè gli ordini di infinità dei suoi elementi non sono costretti ad essere numeri interi, ma possono assumere qualunque valore reale ordinario.

Osserviamo da ultimo che noi ci siamo limitati al sistema ellittico, essendoci proposti soltanto di dare un saggio del calcolo aritmetico con elementi infiniti ed infinitesimi. Se si volesse protrarre ulteriormente l'introduzione di nuovi enti, in modo, per esempio, da esaurire la forma fondamentale, si presenterebbe spontanea l'idea di ripetere sui numeri ellittici, formando dei nuovi monosemii con indici e caratteristiche ellittiche, l'operazione fatta da prima sui numeri reali ordinari; ottenuto così un nuovo campo, si potrebbe ancora applicare ad esso tale procedimento e così per ciascuno dei successivi.

Però non tutte le proprietà dei numeri ellittici si potrebbero estendere nello stesso modo agli enti di questo sistema. Una generalizzazione, invece, conforme a tutti i principii dell'aritmetica si avrebbe, introducendo come nuovo elemento analitico un monosemio con caratteristica ellittica, ma indice ordinario. Basterebbe poi ripetere passo passo le convenzioni e i procedimenti adottati per i numeri ellittici.

([13]) Per queste relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettilineo indipendenti dalla natura della forma spaziale, nella quale il triangolo si suppone contenuto, si cfr. per esempio:

FLYE S. MARIE, *Etudes analitiques sur la théorie des parallèles*, Paris, Gauthier-Villars, 1871.

W. KILLING, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig, Teubner, 1885.

di quelle tre):

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sen}\frac{a}{k} : \operatorname{sen}\frac{b}{k} : \operatorname{sen}\frac{c}{k} = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma$$

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{k} \\ \cos\beta &= -\cos\gamma\cos\alpha + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{b}{k} \\ \cos\gamma &= -\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\frac{c}{k} \end{aligned} \right.$$

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Noi prenderemo in particolare le (1) e la prima delle (2). Secondochè la quantità $1/k^2$, che si dice *curvatura totale* o *riemanniana*, è maggiore o minore di zero, il triangolo si dirà conforme *all'ipotesi di Riemann* o *di Lobatscheffsky*. Se si considera il caso limite, in cui sia $1/k^2 = 0$ (che si risguarda proveniente dagli antecedenti al crescere indefinito di k), applicando la regola dell'Hôpital, si ha, per le relazioni (1), (2), ..., la forma seguente:

$$\text{(1')} \qquad a : b : c = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma$$

$$\text{(2')} \qquad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\text{(3')} \qquad \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

che si dirà legare fra loro gli angoli e i lati nel *sistema Euclideo*.

Ci siamo studiati di dare a questi concetti ben noti forma pretta-

---

A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Zweiten Bandes, erster Teil; Leipzig, 1891, S. 480, 525.

Gli stessi risultati, da un punto di vista più generale, si hanno per la trigonometria dei triangoli geodetici nelle varietà a curvatura costante; veggasi per esempio:

L. Bianchi, *Geometria Differenziale*, Cap. VIII [*Lez. di Geom. diff.*, 2ª ed., Pisa, Spoerri, 1902-03; Cap. XII]; dove però tali ricerche sono limitate alle varietà a due dimensioni.

mente astratta ([14]), per poterli trasportare senza alcuna modificazione al caso di elementi, rappresentati in generale da numeri ellittici.

Infatti le (1), (2), ..., ovvero le (1′), (2′), ..., si potranno definire come equazioni di condizione per gli elementi di un triangolo, anche quando non si imponga ai segmenti rettilinei, agli angoli e alla curvatura la restrizione di essere misurati da numeri reali ordinarî, ma si risguardino in generale come corrispondenti a *numeri ellittici qualunque*, purchè, si intende, compatibili colle equazioni di condizione ([15]) e quindi certamente tali che gli argomenti delle funzioni trigonometriche, le quali compariscono nelle (1), (2), ..., (1′), (2′), ..., non appartengano ad un indice superiore a zero (n. 22).

27. – Ciò premesso, noi vogliamo dimostrare che, se i lati di un triangolo, dato nel sistema di RIEMANN o di LOBATSCHEFFSKI, *sono infinitesimi rapporto alla radice quadrata della curvatura*, la somma degli angoli, *rispetto all'unità fondamentale*, è eguale a due retti, come se si trattasse di un triangolo euclideo. Di più, oltre alla (2′), nell'ipotesi accennata, intercedono, fra gli elementi del triangolo, *alcune* ([16]) fra le relazioni (1′), (3′), ..., in quanto si considerino rispetto all'unità fondamentale.

([14]) Nei citati lavori di FLYE S. MARIE, di KILLING e di CLEBSCH viene impiegato bensì il metodo analitico, ma si stabilisce tuttavia effettivamente in qual modo queste relazioni fra gli elementi di un triangolo discendono da concetti geometrici. Anche nel caso nostro, ciò sarebbe stato possibile, ma si sarebbero allora rese necessarie molte considerazioni di geometria pura, evitate invece con uno svolgimento formale. D'altra parte poi, pur rimanendo nel campo strettamente analitico, non potevamo senz'altro risguardare le (1), (2), (3), ... quali relazioni fra gli elementi di un triangolo geodetico in una varietà a curvatura costante, poichè questi risultati di geometria differenziale hanno a base una espressione analitica dell'elemento lineare, che è limitata *al campo dei numeri ordinarii*, mentre noi vogliamo poi riferire le (1), (2), (3), ... a tutto il sistema ellittico. È indubitato però, e spero di poterlo mostrare in altra occazione, che, stabiliti con generalità, per il sistema ellittico, i principii del metodo differenziale (cui si accennò soltanto alla sfuggita nei n. 24 e 25) si potranno costruire le medesime teorie e darne quelle stesse interpretazioni geometriche, che si applicano al continuo ordinario.

([15]) Usando considerazioni di questo genere, secondo che, per gli elementi di un triangolo, si adotta l'uno o l'altro degli accennati sistemi di relazioni, si può determinare la natura della retta nella forma spaziale corrispondente (n. 25). Così per esempio si troverebbe: *La retta è aperta nei due sistemi di Euclide e di Lobatscheffski, chiusa nel sistema riemanniano. Nei due sistemi di Riemann e di Lobatscheffski non esistono segmenti infiniti, rispetto alla radice quadrata della curvatura. La forma angolare è chiusa e non contiene settori infiniti, ecc.*

([16]) Diciamo alcune fra le relazioni, che spettano ai triangoli euclidei e non tutte, quantunque si possano stabilire le fondamentali (1′) e (2′), perchè le eguaglianze, rispetto ad un indice determinato, non godono di tutte le proprietà valevoli per la eguaglianza in senso assoluto. Così per es., se si possono sommare o sottrarre membro a membro le eguaglianze rispetto ad un indice determinato, non è lecito in generale moltiplicarle, o dividerle, o elevarle a potenza, ecc. Quindi, riferendoci alle relazioni (1′) fra gli elementi di un triangolo, noi troveremo che esiste certamente una forma, sotto la quale esse, considerate rispetto all'indice 0, valgono per un triangolo infinitesimo qualunque, ma ciò non è incondizionatamente vero, quando si scrivano in modo diverso, o si combinino comunque fra loro.

Ci occuperemo dapprima delle equazioni (1), mostrando appunto che, per lati infinitesimi rapporto a k, esse assumono, rispetto all'indice zero una delle forme (1'). Cioè per esempio, se sia, dalle (1),

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}, \quad \text{e si sappia che} \quad \operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{k} = \operatorname*{Val}_{E=0}\frac{b}{k} = 0,$$

si può concludere, rispetto all'indice 0, ossia rispetto all'unità fondamentale, l'eguaglianza dei due rapporti a/b e $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta$, ovvero quella dei loro inversi.

Per dimostrarlo, cominciamo coll'osservare che, siccome per ipotesi

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{k} = \operatorname*{Val}_{E=0}\frac{b}{k} = 0,$$

le integranti principali delle funzioni

$$\operatorname{sen}\frac{a}{k} \text{ e } \operatorname{sen}\frac{b}{k},$$

saranno date (n. 20) dai valori principali dei loro argomenti. D'altra parte il valore principale del quoziente è il quoziente dei valori principali (n. 19) e quindi:

$$\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}\right]_E = \left[\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}\right]_E = \left[\frac{a}{b}\right]_E.$$

Indicando ora con $a^{(0)}_{\nu(0)}$ il valore principale di a, con $b^{(0)}_{\mu(0)}$ quello di b, giova considerare separatamente i due casi $\nu^{(0)} = \mu^{(0)}$ e $\nu^{(0)} \gtrless \mu^{(0)}$. Nella prima ipotesi, dividendo a per b, l'integrante principale

$$\left[\frac{a}{b}\right]_E,$$

del quoziente è

$$\left(\frac{a^{(0)}}{b^{(0)}}\right)_{\nu(0)-\nu(0)},$$

cioè il numero reale $a^{(0)}/b^{(0)}$, da cui si deduce che, considerando il quoziente a/b, rispetto all'indice zero, si ha per risultato la sua integrante principale $a^{(0)}/b^{(0)}$.

La equazione

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{ci dà} \quad \left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E=\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}\right]_E=\frac{a_0}{b_0}$$

e, come precedentemente, essendo 0 l'indice principale di $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta$ sarà

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E.$$

Riassumendo adunque:

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{b} \quad \text{cioè} \quad \frac{a}{b}\underset{E=0}{=}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Se invece $\nu^{(0)}$ è diverso da $\mu^{(0)}$, potremo sempre supporre $\nu^{(0)}<\mu^{(0)}$ (altrimenti basterebbe scambiare a con b) e allora, dividendo a per b, il quoziente appartiene all'indice $\nu^{(0)}-\mu^{(0)}<0$, sicchè $\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{b}=0$. D'altra parte si è visto or ora:

$$\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E=\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}\right]_E=\left[\frac{a}{b}\right]_E \quad \text{e quindi} \quad \left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E=\left[\frac{a^{(0)}}{b^{(0)}}\right]_{\nu^{(0)}-\mu^{(0)}}$$

da cui apparisce che $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta$ appartiene all'indice $\nu^{(0)}-\mu^{(0)}<0$, cioè

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=0.$$

Così, anche in questo caso, è lecito porre:

$$\frac{a}{b}\underset{E=0}{=}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Avremmo invece trovato

$$\frac{b}{a}\underset{E=0}{=}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha},$$

se, per $\nu^{(0)} > \mu^{(0)}$, si fossero dovuti scambiare a e b. Analogamente si dimostrebbe l'eguaglianza, rispetto all'indice 0, delle altre due coppie di rapporti

$$\frac{b}{c} \text{ e } \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}, \quad \frac{c}{a} \text{ e } \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha},$$

ovvero quella dei loro inversi.

Ora, per le (2), partiamoci dalla relazione:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{k}$$

e suppongasi $a = a^{(0)}_{\nu(0)} + a^{(1)}_{\nu(1)} + \ldots$, essendo, per ipotesi,

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{k} = 0.$$

Ricavando

$$\cos\frac{a}{k} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma},$$

si ha pure

$$\left[\cos\frac{a}{k}\right]_E = \left[\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}\right]_E,$$

e, siccome (n. 20) il valor principale di $\cos a/k$ è l'unità, otteniamo:

$$[\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma]_E = [\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma]_E\,.$$

Ora le funzioni trigonometriche di α, di β e di γ, che compariscono in questa relazione non appartengono certamente ad un indice maggior di zero, di guisa che l'eguaglianza dei loro valori principali porta per conseguenza necessaria la loro eguaglianza, rispetto all'indice 0, e sarà:

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma = \operatorname*{Val}_{E=0}(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)$$

od anche (n. 9 e 22),

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\cos\alpha = \operatorname*{Val}_{E=0}\cos(\pi - \beta - \gamma).$$

Si è anche visto al n. 22 che

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\cos x = \cos(\operatorname*{Val}_{E=0} x)\,,$$

e quindi l'eguaglianza precedente può essere scritta:

$$\cos(\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\,\alpha) = \cos(\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\,[\pi - \beta - \gamma]),$$

la quale mostra che $\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\,\alpha$ e $\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\,(\pi - \beta - \gamma)$ devono essere eguali, prescindendo sempre, per le convenzioni fatte sul continuo angolare, da multipli interi di 2π. Si ha dunque:

$$\alpha + \beta + \gamma \underset{E=0}{=} \pi .$$

Rimane così dimostrato che *a qualunque sistema, in senso assoluto, appartenga un triangolo, se, rapporto a k, i suoi lati sono infinitesimi, vale, rispetto alla somma degli angoli, l'ipotesi euclidea.*

Padova, Maggio 1893.