

Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie

z dnia 24 Maja 1917 r.

Rok X. № 5.

Obecni:

Za przewodniczącego Wydziału p. A. Sokołowski.
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: K. Białaszewicz, B. Dębiński, E. Flatau, Wł. Gorczyński, M. Jakowski, L. Kryński, J. Lewiński, St. Orłowski, M. Rejchman, St. Serkowski, W. Smosarski, J. Sosnowski, K. Stolyhwo.

Komunikaty.

1. R. Frankowski i K. Jabłczyński:

III. Szybkość tworzenia się osadów: chromian ołowiu.

Komunikat zgłoszony dn. 21 Kwietnia 1917 r.

Przedstawił St. J. Thugutt.

1. W poprzedniej pracy doświadczalnej¹⁾ badano szybkość strącania się AgCl, AgBr i AgJ wobec nadmiarów KCl, KBr

¹⁾ K. Jabłczyński i J. Lisiecki: „Szybkość strącania się osadów: sole srebra“.

i KJ oraz AgNO_3 . Wszystkie te sole są elektrolitami o jonach jednowartościowych. Wiadomo zaś z chemii koloidów, że takie jony o wiele słabiej strącają ciała koloidalne z ich roztworów, niż jony dwuwartościowe. O ileby więc zjawisko tworzenia się osadów polegać miało wyłącznie na koagulacji koloidu przez jony, należałoby oczekiwać, że nadmiar elektrolitu o jonie dwuwartościowym winien strącać osad prawie momentalnie. Tem się kierując, obraliśmy za cel badań: szybkość strącania się chromianu ołowiu wobec nadmiaru bądź to chromianu potasu, bądź też soli ołowiawej. Pomiaru tem większą jeszcze wzbudzały ciekawość, że sole ołowiawe, np. octan ołowiu, zalicza się do silnych środków koagulujących.

Rozpuszczalność chromianu ołowiu, PbCrO_4 , jest niewielka; według Kohlrausch'a¹⁾ w temp. 18°C wynosi 4×10^{-7} mola w litrze, czyli prawie równa się rozpuszczalności bromku srebra: $4,5 \times 10^{-7}$ mola AgBr w litrze. Hydroliza PbCrO_4 z utworzeniem soli zasadowej jest też nadzwyczajnie mała: C. O. x obliczył²⁾, że wystarcza obecność 2×10^{-5} mola CrO_3 w litrze, by powstrzymać przejście PbCrO_4 w sól zasadową $2 \text{PbO} \cdot \text{CrO}_3$.

2. Wykonywanie doświadczeń. Do pomiarów czasu, t, potrzebnego, by płyn doszedł do pewnego stopnia zmętnienia, stosowaliśmy sposób, opisany w doświadczeniach z solami srebra (loc. cit.) Epruwetki miały: wysokość 126 mm. i średnicę wewnętrzną 18,5 mm. Dla uniknięcia zmian w oświetleniu dziennem, pomiary wykonywano w miejscu zaciemnionem; lampka elektryczna, umieszczona zawsze w jednakowym położeniu względem epruwetek, oświetlała je.

Do strącania chromianu ołowiu użyliśmy: octanu i azotanu ołowiu oraz chromianu potasu, a w doświadczeniach z octanem Pb także i dwuchromianu potasowego. Ponieważ ilość osadu winna być we wszystkich pomiarach ta sama, jedną z soli strącającej braliśmy zawsze w stężeniu niezmiennem: 0,005 normalnem³⁾; 5 cm^3 takiego roztworu wlewaliśmy do 5 cm^3 roztworu drugiej soli o coraz to wzrastającym stężeniu; osad więc stale

¹⁾ Zeit. phys. Ch. **64**, 159 (1908)..

²⁾ Zeit. anorg. Ch. **50**, 232 (1906)..

³⁾ Roztworem 1-normalnym nazywamy tu roztwór $\frac{1}{2}$ gramocząsteczki $\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$, $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$, $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ i $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ w 1-litrze.

znajdował się wobec nadmiaru jednej z soli. Sposób wlewania jak się przytem okazało, ma duży wpływ na wynik; to też postępowaliśmy zawsze jednakowo, lejąc płyn z pipety nie po ściankach, lecz wprost do cieczy w epruwetce; koniec pipety znajdował się na możliwie jednakowej wysokości od powierzchni cieczy.

Wyniki, podane niżej, są to przeciętne z dwóch lub więcej pomiarów.

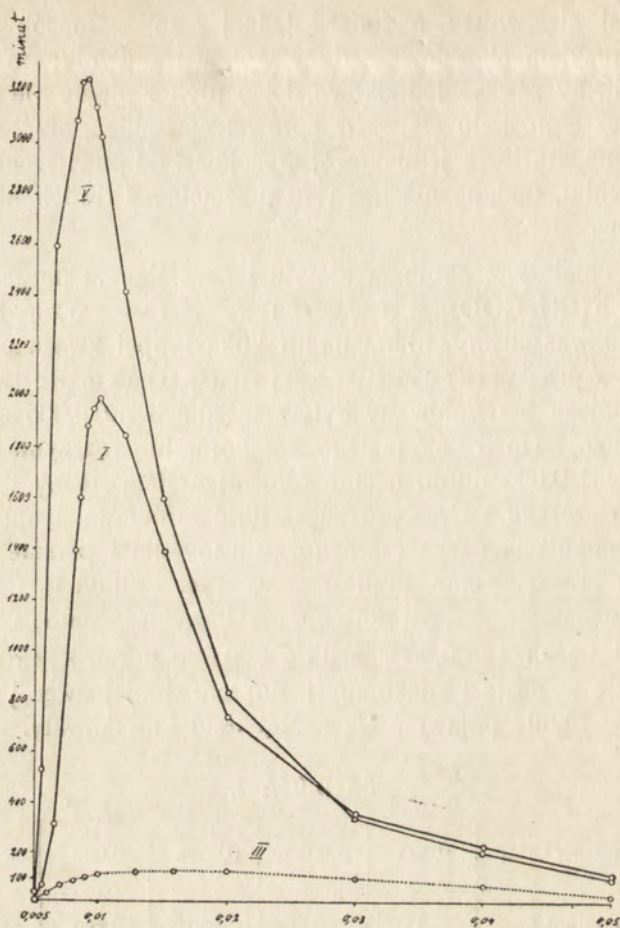
3. **Pomiary z octanem ołowiu i chromianem potasu.** Octan ołowiu $\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ rozpuszczaliśmy w wodzie, którą odrobinę zakwaszaliśmy, biorąc na litr kilka kropeł kwasu octowego.

a. **Z nadmiarem chromianu potasu.** Roztwór chromianu potasu przygotowany był w stężeniach od 0,005 aż do 4,0 normalnego. Do 5 cm^3 takiego z—normaln. roztworu wlewaliśmy 5 cm^3 0,005 norm. octanu ołowiu; wstrząsaliśmy i wstawialiśmy do szeregu. Czas t oznacza ilość minut, jaka upłynęła do chwili zaniknięcia paska czarnego. Liczby dla t podane są w tablicy I i przedstawione graficznie na rys. 1 (linia I), na którym odcięte oznaczają z czyli stężenia K_2CrO_4 , zaś rzędne czas t .

Od stężeń $z = 0,005$ aż do $z = 0,060$ norm. K_2CrO_4 koloid strącał się w postaci znakomitej; dopiero mniej więcej od tego punktu w płynie pojawiać się zaczął osad kłaczkowaty.

TABLICA I.

| | | | | | | |
|----------------------------------|-------|-------|--------|--------------------|-------|-------|
| z-norm. K_2CrO_4 | | 0,005 | 0,0055 | 0,0065 | 0,008 | 0,009 |
| t minut | | 4 | 662 | 300 | 1380 | 1870 |
| 0,0095 | 0,010 | 0,012 | 0,015 | 0,020 | 0,030 | 0,040 |
| 1930 | 1980 | 1830 | 11380 | 720 | 340 | 220 |
| 0,050 | 0,060 | 0,080 | 0,10 | do 4,0 | | |
| 90 | 19 | 6 | 3 | prawie momentalnie | | |



Rys. 1.

Wynik powyższy okazał się dla nas bardzo ciekawy; przebieg bowiem linii jest całkiem podobny do przebiegu linii dla Ag Cl, Ag Br, Ag J wobec nadmiaru K Cl, K Br wzgl. K J i stoi w najzupełniejszej zgodzie z przewidywaniami teoretycznymi jednego z nas. O ile reagują ze sobą cząsteczka K_2CrO_4 na cząsteczkę $Pb(CH_3COO)_2$, osad $PbCrO_4$ strąca się bardzo szybko: pasek czarny zanika już po 4 minutach. Wystarcza jednak małejki nadmiar chromianu potasu (0,005 norm. K_2CrO_4), by szybkość tę obniżyć dość znacznie: okres t zanikania czarnego paska = 62 minutom. Linia podnosi się stromo; wskutek bowiem nad-

miaru jonów CrO_4^{2-} stopień jonizacji i rozpuszczalność PbCrO_4 obniżają się; szybkość dyfuzji, a z nią i szybkość zgrubiania ziaren maleje: osad tworzy się powolniej; czas t wzrasta aż do swej najwyższości w punkcie ok $z = 0,010$ norm. K_2CrO_4 . Stąd linia zaczyna opadać; osad powstaje coraz to prędzej wskutek tworzenia się związku podwójnego $\text{PbCrO}_4 \cdot \text{K}_2\text{CrO}_4$, który w wodzie częściowo się rozpada; dyfuzyja przeto chromianu ołowiu znajduje nową drogę między ziarnami; jej szybkość ogólna wzrasta i osad szybciej się strąca. Że taki związek podwójny istnieje, dowodzą badania Gröger'a¹⁾; po zmieszaniu nasyconych na zimno roztworów octanu ołowiu i chromianu potasu wydziela się mianowicie żółty osad bezkształtny o składzie bardzo bliskim do $\text{K}_2\text{Pb}(\text{CrO}_4)_2$; woda rozkłada go, odciągając K_2CrO_4 . Podobnie z chromianem amonu Gröger²⁾ wytworzył sól podwójną $(\text{NH}_4)_2\text{Pb}(\text{CrO}_4)_2$ o postaci bezkształtnego, później ziarnistego osadu, rozpadającego się w dużej ilości wody.

Od $z = 0,060$ i wyżej w płynie zaczyna się zjawiać osad włóczkowaty; na czym polega to zjawisko, obserwowane we wszystkich doświadczeniach z chromianem ołowiu, odpowiedzieć na razie nie możemy.

b. Z nadmiarem octanu ołowiu. Do 5 cm^3 z — normalnego octanu ołowiu dolewano po 5 cm^3 $0,005$ norm. chromianu potasu i badano, jak zwykle. Liczby przeciętne podajemy w tablicy II, a odpowiadającą im linię na rys. 2 (lin. II).

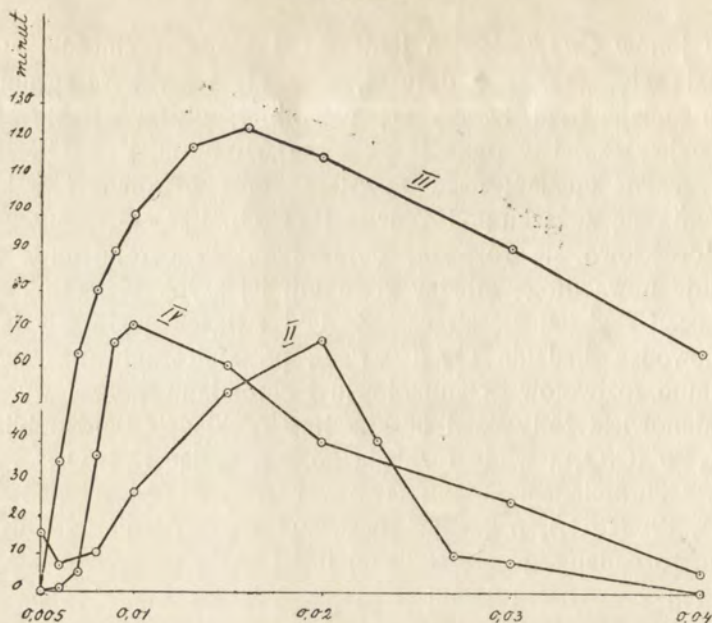
TABLICA II.

| z-norm. $\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| 0,005 | | | | | |
| 0,006 | | | | | |
| 0,008 | | | | | |
| 0,010 | | | | | |
| t minut | | | | | |
| 15 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 26 | | | | | |

| 0,015 | 0,020 | 0,023 | 0,027 | 0,030 | w stężeniach od 0,050 do 0,50 |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------------------------------|
| 53 | 67 | 40 | 10 | 8 | momentalnie |

¹⁾ Zeit. anorg. Ch. 54, 185 (1907).

²⁾ Zeit. anorg. Ch. 58, 412 (1908).



Rys. 2.

Bieg tej linii jest całkiem analogiczny do biegu poprzedniej i podobnie się tłumaczy; tylko linia sama jest o wiele niższa i nie tak stromo się wznosi. Pozatem kłaczki pojawiają się o wiele wcześniej, gdyż już w stężeniach ok. $z = 0,023$ norm; do tego zaś punktu osad ma postać najzupełniej koloidalną.

4. Z obu powyższych pomiarów wypływa szczególnie ważny wniosek, że nawet jony dwuwartościowe (CrO_4^{2-} i Pb^{2+}) zdolne są do utrzymywania osadu w stanie koloidalnym; wiemy natomiast z chemii koloidów, że takie jony, jak Pb^{2+} , już w nadzwyczaj drobnych stężeniach strącają koloidy. Chcąc pogodzić oba te spostrzeżenia, należy przyjąć, że ładunek cząstek Pb CrO_4 jest taki sam, jak i ładunek jonu Pb^{2+} , t. j. dodatni, jeżeli strącamy w nadmiarze octanu ołowiu i taki sam, jak jonu CrO_4^{2-} , t. j. ujemny, jeśli bierzemy nadmiar chromianu potasu; niema więc wtedy zobojętniania się ładunków i niema koagulacji.

Że osad może zmieniać swój ładunek zależnie od nadmiaru jednej lub drugiej soli strącającej, dowiódł Lottermoser¹⁾ na

¹⁾ Lottermoser. Journ. f. prakt. Ch. (2) 56, 247 (1897); 683, 41 (1903); 72, 39 (1905) i 73, 374 (1906).

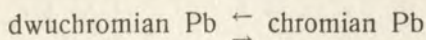
jodku srebra; koloidalne cząstki AgJ wobec nadmiaru jonów J' wędrują do anody, czyli są naładowane ujemnie; zaś wobec nadmiaru jonów Ag wędrują do katody, t. j. mają ładunek dodatni. Zjawisko to związane jest z tworzeniem się soli podwójnej; jodek srebra daje z KJ sól podwójną: $KAgJ_2$ o jonach $K^+ + AgJ_2^-$ oraz z $AgNO_3$ sól Ag_2JNO_3 o jonach $Ag_2J^+ + NO_3^-$. Do każdej więc cząstki koloidalnej AgJ przyłącza się w pierwszym razie jon J', ładując cząstkę ujemnie; w drugim razie jon Ag^+ , nadając jej ładunek dodatni.

To samo zupełnie mamy i w naszym przypadku; skutek tworzenia się soli podwójnej $K_2Pb(CrO_4)_2$ o jonach K^+ i $Pb(CrO_4)_2^-$ koloidalna cząstka $PbCrO_4$ ładuje się ujemnie wobec nadmiaru K_2CrO_4 , jon bowiem CrO_4^{2-} łączy się z nią. Podobnie należy przyjąć i dla nadmiaru octanu ołowiu; z nim cząstka koloidu $PbCrO_4$ łączy się na związek podwójny np. $PbCrO_4 \cdot Pb(CH_3COO)_2$, którego katjon $PbCrO_4$, $Pb(CH_3COO)^+$ lub $PbCrO_4 \cdot Pb^{2+}$ pozostaje na ziarnie, zaś anjon wędruje do roztworu.

Rozumując, jak wyżej, jasnym się staje, iż zjawiska koagulacji wskutek zubożenia ładunków koloidu przez jony możemy usunąć z kręgu naszych badań i oprzeć się jedynie na dyfuzji, jako na czynniku kierowniczym.

5. Pomiary z octanem ołowiu i dwuchromianem potasu.

Drugi szereg pomiarów wykonaliśmy, biorąc dwuchromian potasu zamiast chromianu. Powstający jednak $PbCr_2O_7$ rozpada się w wodzie na $PbCrO_4$ i CrO_3 ; zachodzi tu, według Co x'a¹⁾ równowaga:



ze znaczną przewagą po stronie chromianu. Ponieważ jon $Cr_2O_7^{2-}$ dwuchromianu potasowego nie wpływa na stopień jonizacji $PbCrO_4$, a zatem i na jego rozpuszczalność, lecz jedynie zmienia te czynniki dla $PbCr_2O_7$, przeto nadmiar $K_2Cr_2O_7$ nie powinien mieć tak silnego wpływu na szybkość strącania się $PbCrO_4$, co nadmiar K_2CrO_4 . I tak się też okazało, jak widać z poniższego pomiaru.

¹⁾ Zeit. anorg. Ch. 50, 232 (1906).

a. Z nadmiarem dwuchromianu potasu. Do 5 cm³ z - norm. dwuchromianu potasu dolewano po 5 cm³ 0,005 norm. octanu ołowiu. Normalność z doprowadzaliśmy od 0,005 aż do 1. Wyniki przedstawione są w tablicy III, a linia na rys. 2 (lin. III).

TABLICA III.

| | | | | | | |
|---|-------|------------------|-------|-------|-------|-------|
| z - norm. K ₂ Cr ₂ O ₇ | | 0,005 | 0,006 | 0,007 | 0,008 | 0,009 |
| t minut | | momen- talnie | 34 | 62 | 80 | 88 |
| | | | | | | |
| 0,010 | 0,013 | 0,016 | 0,020 | 0,030 | 0,040 | 0,060 |
| 100 | 118 | 122 | 116 | 92 | 64 | 26 |
| | | | | | | |
| 0,080 | 0,1 | do 1 norm. | | | | |
| 13 | 4 | momentalnie | | | | |

Osady do $z = 0,060$ wypadały jako typowe koloidy; od tego punktu pojawiać się zaczął osad kłaczkowaty. Linia powoli się podnosi do najwyższości (122 minuty), która jest o wiele niższa, niż dla nadmiaru K₂CrO₄ (1980 min.). Celem porównania umieściliśmy ją także na rys. 1 (linia III). Tak znaczna różnica w przebiegu może mieć tylko przyczynę w wyrażonym powyżej poglądzie.

b. Z nadmiarem octanu ołowiu. W reakcji tej, jak i poprzedniej, wytwarza się nieco wolnego kwasu octowego. Pomiary wykonywaliśmy, wlewając 5 cm³ 0,005 norm. dwuchromianu potasu do 5 cm³ z - norm. octanu ołowiu. Wyniki podane są w tabl. IV, a linia na rys. 2 (linia IV).

TABLICA IV.

| | | | | | | | |
|--|--|--|--|------------------|-------|-------|-------|
| z - norm. Pb (CH ₃ COO) ₂ · 3 H ₂ O | | | | 0,005 | 0,006 | 0,007 | 0,008 |
| t minut | | | | momen- talnie | 0,5 | 5 | 36 |

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|------|------|------|-------------|
| 0,009 | 0,010 | 0,015 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | do 0,20 |
| 66 | 71 | 60 | 40 | 24 | 5 | momentalnie |

Do punktu mniej więcej $z = 0,03$ norm. osady są koloidalne; odtąd zaczynają się strącać osady kłaczkowate. Przebieg linii jest naogół normalny, podobny do biegu linii III; w obu sposobach strzegamy bardzo łagodny spadek od punktu najwyższego.

Linie II i IV, obie z nadmiarem octanu ołowiu, biegną początkowo dość blisko osi odciętych, a nawet w II widzimy małe zagięcie ku dołowi. Być może, iż ujawnia się tu wpływ wolnego kwasu octowego, jaki powstaje w reakcyi.

W każdym bądź razie wynik powyższy również stwierdza, że jony Pb^{..} nie tylko nie koagulują koloidu, ale go jeszcze utrzymują w tym stanie.

6. Pomiary z azotanem ołowiu i chromianem potasu. Zamiast octanu ołowiu wzięliśmy azotan; należałoby oczekiwać, iż wyniki będą takie same, jak z octanem; ku naszemu zdziwieniu wystąpiły na jaw bardzo wybitne różnice.

a. Z nadmiarem chromianu potasu. Rozczyn azotanu ołowiu był 0,005 normalny, czyli zawierał $\frac{5}{2000}$ mola Pb (NO₃)₂ w litrze. Roztwór chromianu potasu braliśmy ten sam, co i do doświadczenia I. Do 5 cm³ roztworu z - norm. K₂CrO₄ wlewaliśmy 5 cm³ 0,005 norm. azotanu ołowiu. Wyniki umieszczone są w tablicy V, a linia na rys. I (linia V).

TABLICA V.

| | | | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------------|
| z norm. K_2CrO_4 | 0,005 | 0,0055 | 0,0065 | 0,0080 | 0,0085 | |
| t minut | 51 | 520 | 2580 | 3070 | 3220 | |
| 0,0090 | 0,0095 | 0,010 | 0,012 | 0,015 | 0,020 | 0,030 |
| 3240 | 3130 | 3010 | 2400 | 1590 | 830 | 330 |
| 0,040 | 0,050 | 0,060 | 0,080 | 0,100 | 0,20 | 0,5—4,0 |
| 195 | 105 | 36 | 29 | 27 | 24 | prawie momentalnie |

Do stężeń ok $z = 0,060$ norm. tworzył się znakomity kolid; od tego punktu pojawiać się zaczął osad kłaczkowaty. Przebieg linii jest wprost idealny; od stanu początkowego linia wznosi się nadzwyczaj stromo; prawdopodobnie w punkcie, w którym na I cząsteczkę chromianu potasu przypadająby ściśle 1 cząsteczka azotanu ołowiu, osad powstawałby prawie momentalnie; dla tego punktu otrzymaliśmy 51 minut; wobec stromości linii zwykłe błędy, np. w odmierzaniu cieczy pipetą, muszą powodować tu poważne różnice w ilości minut. W punkcie $z = 0,009$ linia dosięga swej najwyższości, której odpowiada duży okres czasu ($t = 3240$ minut); stąd dość szybko spada i dochodzi prawie do osi poziomej. Tłómaczenie linii jest takie same, co i linii № I. Porównajmy je ze sobą: powyższą (№ V) z azotanem ołowiu i linią (№ I) z octanem ołowiu; obie z nadmiarem K_2CrO_4 . Bieg ich jest prawie identyczny; tylko druga jest niższa. Różnica zaś w obu doświadczeniach polega na tworzeniu się w pierwszym razie azotanu potasu, w drugim octanu potasu. Czyżby i te obojętne sole, powstające z wymiany wzajemnej, miały wpływać na bieg linii?

Jak widać z powyższego, wysokość linii, ale nie jej kształt, zależy w pewnej mierze od tworzącej się soli. Bliższe określenie tego wpływu (poza doświadczeniami w us. 7) musimy pozostawić na uboczu, by nie wikłać głównego celu.

Podobnie, jak to mieliśmy w doświadczeniach z AgCl, AgBr, AgJ (loc. cit.), obie linie przecinają się (w punktach $z = 0,028$ i $z = 0,046$).

b. Z nadmiarem azotanu ołowiu. Do 5 cm^3 z-norm. azotanu ołowiu dodawano po 5 cm^3 0,005 norm. chromianu potasu. Ku naszemu zdziwieniu osady tworzyły się momentalnie: strącał się osad kłaczkowaty. Jest to tem charakterystyczniejsze, iż nadmiar octanu ołowiu (tablica II) daje linię dość normalną (rys. 2 linia II). Różnic tych możnaby dopatrywać się, np. w rozmaitym stopniu jonizacji azotanu i octanu ołowiu lub w większej hydrolizie octanu.

Negatywny wynik powyższy, jakkolwiek nie daje się na razie wyjaśnić, wobec innych wyników pozytywnych nie obala bynajmniej poglądu o dyfuzyjnym charakterze zjawiska tworzenia się osadu.

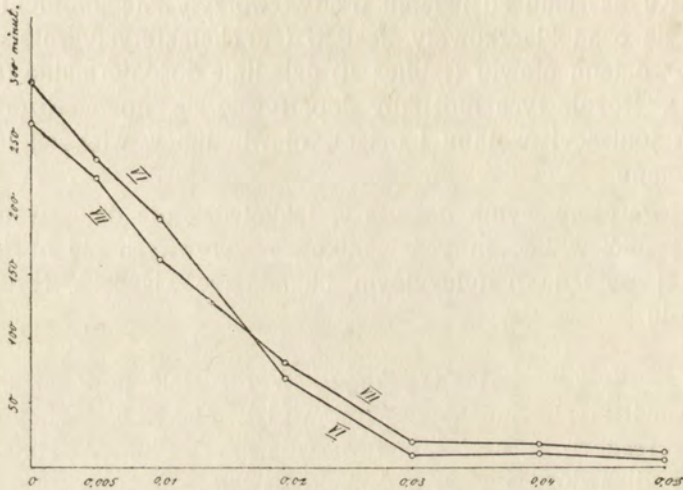
7. Wpływ azotanu potasu. W rozdziale poprzedzającym wspomnieliśmy, iż możliwym jest wpływ soli obojętnej, powstającej w reakcyi, na szybkość tworzenia się osadu. Wykonaliśmy jedynie kilka doświadczeń z dodatkiem azotanu potasu dla przekonania się, czy pogląd podobny jest słuszny. W tym celu do 5 cm^3 0,03 norm K_2CrO_4 + z - norm KNO_3 dolewaliśmy po 5 cm^3 0,005 norm. octanu ołowiu — tablica VI, rys. 3 (linia V) — wzgl. po 5 cm^3 0,005 norm. azotanu ołowiu — tablica VII, rys. 3 (linia VI). W nadmiarze był zawsze K_2CrO_4 .

TABLICA VI.

| dodatek z - norm. KNO_3 | 0 | 0,005 | 0,010 | 0,020 |
|-------------------------------------|-----|-------|-------|-------|
| t minut | 303 | 243 | 196 | 70 |

TABLICA VII.

| dodatek z - norm. KNO_3 | 0 | 0,005 | 0,010 | 0,020 |
|-------------------------------------|-----|-------|-------|-------|
| t minut | 270 | 226 | 173 | 83 |



Rys. 3.

Do $z = 0,020$ norm. KNO_3 koloid był bardzo dobry; w większych stężeniach KNO_3 wypadał zwolna osad kłaczkowaty. Jak widać z obu tablic, azotan potasu przyspiesza dość znacznie szybkość strącania się chromianu ołowiu; zapewne, że i ta ilość, jaka się tworzy podczas reakcji ($= 0,005$ norm. KNO_3) nie pozostaje bez wpływu. Spadek obu linii jest prawie jednakowy. Nie chcąc zbaczać z drogi, jakąśmy sobie wytknęli, nie zagłębialiśmy się w szczególności, pozostawiając je do zebrania obszerniejszego materiału.

8. Celem pracy niniejszej było rozszerzenie i na jony dwuwartościowe ogólnych założeń, postawionych przez jednego z nas

w rozprawie teoretycznej¹⁾); oto elektrolity przez nadmiar jednego z jonów winny początkowo strącać się coraz to wolniej wskutek zmniejszonej rozpuszczalności, dochodzić do minimum szybkości i znów zwiększać ją z powodu powstawania soli podwójnej i powiększania przez to rozpuszczalności. Z tego planu ogólnego usuwaliśmy, o ile to było można, szczegóły drugorzędne, by nie zawikłać się w wyjaśnienia, których na razie udowodnić nie bylibyśmy w stanie. A takich szczegółów, np. stopniowość jonizacyi, hydroliza, tworzenie się wolnego kwasu octowego, wpływ soli obojętnej i t. d., nasuwało się sporo i utrudniało zadanie.

Wogóle jednak z doświadczeń tu wykonanych wnosimy w sposób stanowczy, iż strącanie się osadów o jonach dwuwartościowych podlega tej samej zasadzie dyfuzyjnej, co i strącanie się osadów o jonach jednowartościowych i ją potwierdza.

Warszawa. Uniwersytet. II Zakład chemiczny.

RÉSUMÉ.

R. Frankowski i K. Jabłczyński:

**III. La vitesse de formation des précipités:
chromate de plomb.**

Communication annoncée le 21. IV. 1917.

Présentée par St. J. Thugutt.

Le présent travail avait pour but d'élargir sur les ions bivalents les thèses générales, émises par l'un des auteurs dans un essai théorique. On a effectué les mesures de vitesse de précipitation du chromate de plomb en présence d'excès: soit de chromate ou bichromate de potassium, soit d'acétate ou azotate de plomb. Seul, l'excès d'azotate de plomb provoquait une formation immédiate du précipité. Toutes les autres expériences ont

¹⁾ K. Jabłczyński. „Szybkość strącania się osadów“. Spraw. Tow. Nauk. Warsz. Rok X. 1917. Zesz. 5.

donné des lignes normales qui montent d'abord plus ou moins rapidement jusqu'à un point maximum pour le temps t et qui descendent ensuite presque jusqu'à l'axe horizontal. Il en résulte indiscutablement que la formation d'un précipité aux ions bivalents est aussi un procès basé sur la diffusion et qu'il se soumet aux mêmes règles que la formation des précipités aux ions monovalents. Les ions bivalents CrO_4^{2-} et Pb^{2+} non seulement ne coagulent pas les colloïdes, mais au contraire, ils les conservent en cet état.

Varsovie. II-e Institut Chimique de l'Université.

2. K. Jabłczyński i W. Więckowski:

Reakcyje w układzie niejednolitym: ciecz - ciecz.

(Z dwoma rysunkami w tekście).

Komunikat zgłoszony dnia 21 kwietnia 1917 r.

Przedstawił St. Z. Thugutt.

1. Od czasu, kiedy Noyes i Whitney¹⁾ oparli na dyfuzji zjawisko rozpuszczania się ciał stałych w cieczach, ilość badań w tym kierunku wzrosła tak dalece i objęła tak rozmaite reakcyje w układzie niejednolitym: ciało stałe — ciecz, że dziś już wyjaśnienie Noyes'a i Whitney'a nie budzi najmniejszej wątpliwości. Dziwna rzecz, że tylko układy były wyłącznym tematem badań. Przed kilku laty jeden z nas wraz z p. S. Przemyskim²⁾ rozszerzył pogląd dwóch powyższych badaczy amerykańskich i na układy niejednolite: ciecz-faza gazowa, a specjalnie na zjawiska parowania wody w prądzie powietrza i pochłaniania dwutlenku węgla przez ług sodowy; wynik pomiarów tych potwierdził dyfuzyjny charakter zjawiska, na którego szybkość właściwa reakcyja chemiczna pozostaje bez wpływu.

Jak dotąd, prac nad szybkością reakcyj w układzie niejednolitym: ciecz-ciecz nie znaleźliśmy w literaturze. By uzupełnić całość i rozszerzyć pogląd dyfuzyjny i na te układy, wydawało się nam rzeczą ważną i ciekawą podjąć w tym kierunku badania. Jako temat pracy obraliśmy reakcyję między jodem, rozpuszczonym w chloroformie, i tiosiarczanem sodu, zawartym w roztworze wodnym.

2. *Podstawy teoretyczne.* Według poglądu Noyes'a i Whitney'a, rozwiniętego później przez Nernst'a³⁾, faza ciekła, równomiernie mieszana, tworzy przy fazie stałej cienką nieruchomą warstwę, przez którą odbywa się dyfuzya ciała stałego

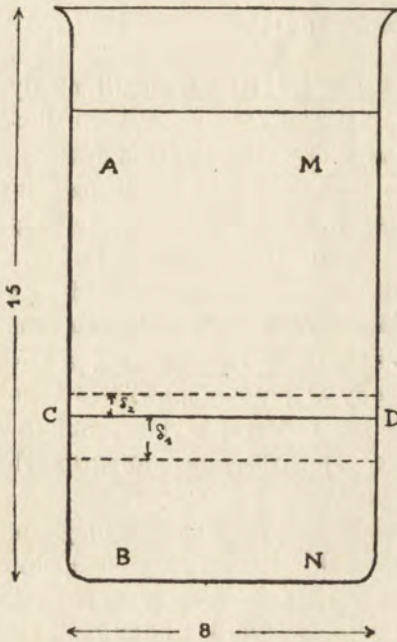
¹⁾ Zeit. phys. Ch. 23, 689 (1897).

²⁾ K. Jabłczyński i S. Przemyski. „Sur le processus des systèmes hétérogènes“. Journ. de Chim. Phys. T. X, 241 i 271 (1912).

³⁾ Zeit. phys. Ch. 47, 52 (1904).

do cieczy lub też odwrotnie, ciała rozpuszczonego np. kwasu do fazy stałej. Szybkość tej dyfuzji jest miarą szybkości całego procesu, gdyż reakcja chemiczna na granicy obu faz odbywa się bardzo prędko i na całość nie wpływa. Z tego poglądu wypływają liczne konsekwencje, potwierdzane już wielokrotnie.

Dla naszego przypadku: ciecz-ciecz teoria powyższa daje się rozwinąć w sposób następujący. Dwie cieczy A i B (rys. 1),



Rys. 1.

nie mieszające się z sobą, są mieszane niejednakowo, np. A silniej, B słabiej; warstwa styczna CD ma ruch wspólny; od niej warstwy ku górze wirują coraz to prędszej, ku dołowi coraz to wolniej. Zamiast całego szeregu warstw o ruchu, zmieniającym się w miarę oddalenia od CD, przyjmijmy w cieczy A warstwę CDEF o grubości δ_2 i o ruchu jednolitym w całej masie oraz w cieczy B taką warstwę CDGH o grubości δ_1 ; resztę zaś cieczy A wzgl. B uważamy za doskonale mieszaną, a więc wykazującą we wszystkich punktach jednokowe stężenie ciała rozpuszczonego. Powyższe rozumowanie ma naprawdę charakter fikcyjny, ale fikcyjny pomocniczej użytecznej,

ogromnie bowiem upraszcza zadanie; z jej to pomocą reakcje w układzie niejednorodnym: ciało stałe-ciecz opracowane zostały doskonale. I nam również ta fikcja ułatwi matematyczne ujęcie zjawiska.

Rozpuśćmy ciało M — tiosiarczan sodowy w cieczy A — wodzie, oraz ciało N — jod w cieczy B — chloroformie, a zacząć oba ciała dyfundować poprzez warstwy δ_1 i δ_2 , by w miejscu zetknięcia reagować na siebie. O ile ta reakcja przebiega momentalnie, szybkość całego procesu zależy jedynie od szybkości dyfuzji tych ciał. Stwierdze-

nie tego stanowi cel poniższych doświadczeń; ilość jednak możliwych przypadków jest tu znacznie większa, niż w układzie: ciało stałe-ciecz; weźmy ciało M wzgl. N w znacznym nadmiarze, a dyfuzya odbywać się będzie tylko w jednej fazie; jeśli nadmiary nie są tak wielkie, dyfuzya winna zachodzić w obu fazach.

Część I. Dyfuzya w jednej fazie: jodu w chloroformie.

3. *Równanie reakcyi.* Ponad rozcieńczonym roztworem jodu (N) w chloroformie (B) znajduje się stężony roztwór tiosiarczuanu sodu (M) w wodzie (A). W warstwie granicznej CD tiosiarczuan jest więc zawsze w nadmiarze, tak iż stężenie jodu staje się tu równem zeru, o ile reakcyja chemiczna między $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ i J_2 przebiega momentalnie. Szybkość całego procesu wyrazi się przeto szybkością dyfuzyi jodu z B do CD poprzez δ_1 :

$$\frac{dx}{dt} = -Kc \quad (1)$$

gdzie: dx oznacza ilość gramoatomów jodu, przedyfundowanych w czasie dt przez δ_1 ; c jest stężeniem (w normalnościach) jodu w chloroformie (B), zaś K —współczynnikiem wprost proporcjonalnym do powierzchni, P , zetknięcia się obu faz i do współczynnika dyfuzyi jodu w chloroformie, D_{chl} . oraz odwrotnie proporcjonalnym do grubości warstwy, δ_1 :

$$K = \frac{D_{\text{chl}} \cdot P}{\delta_1} \quad (2)$$

By zcałkować równanie (1), zastępujemy dx przez dc na podstawie relacyi:

$$\frac{dx}{v} = dc \quad (3)$$

gdzie v jest objętością chloroformu (fazy B); otrzymujemy po zcałkowaniu:

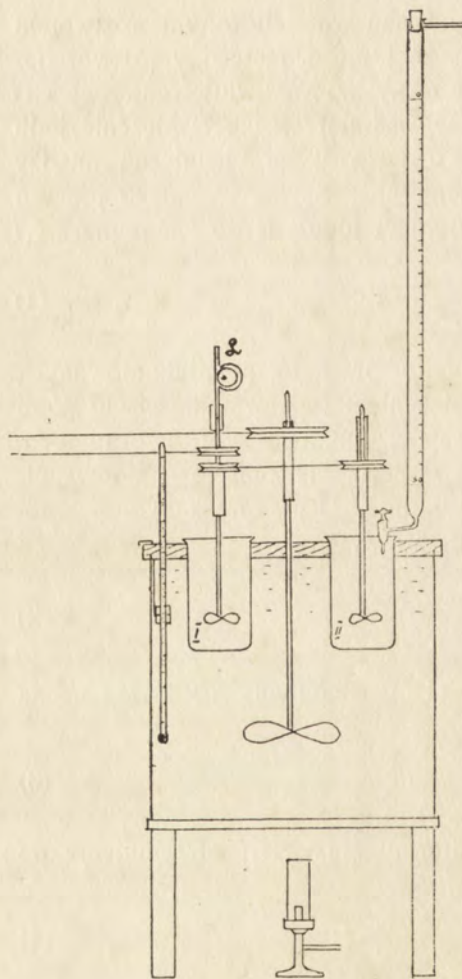
$$\ln \frac{c_0}{c} = \frac{K}{v} t; \quad (4)$$

c_0 oznacza stężenie jodu w chwili $t=0$, zaś c — w chwili t .
Stąd :

$$K = \frac{v}{0,4343 t} \log \frac{c_0}{c} \quad (5)$$

Równanie (5) daje się sprawdzić na drodze doświadczalnej.

4. *Przyrząd i sposób pomiaru.* W termostacie (rys. 2), na drewnianej deszczulce wiszą dwie duże zlewki I i II o średnicy wewnętrznej 7,8 cm. i o pojemności 700 cm.³. Dwa mieszadła, złączone ze sobą, mieszają tylko fazę górną (A), której ruch udziela się fazie dolnej (B). Do obliczania ilości obrotów służy licznik L, a do pędzenia mieszadełek — motor elektryczny.



Rys. 2.

Do zlewek wlewaliśmy po 100 cm.³ (= *v*) roztworu jodu w chloroformie o stężeniu od 0,02 do 0,06 norm. oraz 200 cm.³ (= *W*) roztworu tiosiarczanu sodowego o stężeniu cca 0,1 n. (ściślej 0,09728 norm. Na₂S₂O₃). W warstwie granicznej CD było więc w początku każdego doświadczenia 1½—5 razy więcej tiosiarczanu, niż go potrzeba do całkowitego związania jodu; w miarę, jak reakcja się posuwała, stosunek ten wzrastał jeszcze bardziej na korzyść Na₂S₂O₃. Możemy więc przyjąć całkiem stanowczo, iż stężenie jodu w warstwie CD, na granicy obu faz, równało się zawsze zeru.

Po puszczeniu w ruch mieszadełek braliśmy pipetą po 10 cm.³ roztworu tiosiarczuanu (cieczy A), notując przy tem czas t ; wlewaliśmy do roztworu jodu z jodkiem potasu (normalność tego roztworu jest do wyliczeń zbyt duża) i nadmiar jodu miareczkowaliśmy 0,0104 norm. Na₂S₂O₃ wobec skrobi; zużyte ilości cm.³ oznaczaliśmy w tablicach przez m cm.³. Wreszcie puszczaaliśmy mieszadełko w ruch szybszy, aż do odbarwienia się fazy B i miareczkowaliśmy, jak wyżej, biorąc kilkakrotnie po 10 cm.³ fazy A. Z liczb powyższych obliczaliśmy stężenie c jodu w B, zarówno początkowe c_0 , jak i w czasach t .

Podajemy jeden z takich przykładów.

Doświadczenie 1.

200 cm.³ ok 0,1 norm. Na₂S₂O₃ w wodzie + 100 cm.³ ok 0,06 norm. jodu w chloroformie.

Temperatura = 25°C. Ilość obrotów mieszadła $n = 130$ na minutę.

ZLEWKA I.

| t min. | W cm. ³ | m cm. ³ | $c \times 10^4$ norm. J. | K |
|----------|----------------------|----------------------|-----------------------------|------|
| 0 | 200 | 3,08 | 526,79 | — |
| 4,0 | 190 | 8,33 | 423,06 | 5,49 |
| 10,0 | 190 | 14,84 | 301,18 | 5,59 |
| 18,0 | 170 | 20,79 | 195,99 | 5,49 |
| 29,0 | 160 | 25,94 | 110,29 | 5,39 |
| ∞ | 150 | 33,01 | 0 | — |
| | | | | 5,49 |

t — ilość minut od chwili pierwszego pipetowania;

W — objętość cieczy A między jednym i drugim pipetowaniem;

m — ilość cm.³ 0,0104 norm. Na₂S₂O₃, zużytych do odmiareczkowania nadmiaru jodu (p. wyżej opis);

c — stężenia w normalnościach jodu w chloroformie;

K — stała, obliczona według równania (5), przyczem braliśmy objętość $v = 100 \text{ cm.}^3$; wymiary K są $\left[\frac{\text{cm.}^3}{\text{minuta}} \right]$.

Dla wyliczenia stężeń c dzielimy różnice między oddzielnymi miareczkowaniem: $m_1 - m_2$ przez 10 (brano do pomiaru po 10 cm.^3) i mnożymy przez objętość W w tymże okresie czasu; np. $\frac{(8,33 - 3,08) \times 190}{10} = 99,75 \text{ cm.}^3 \cdot 0,0104 \text{ norm Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$.

Liczba ta odpowiada spadkowi stężenia jodu w chloroformie w okresie od $t=0$ do $t=4$ minut. Suma wszystkich spadków w okresach następujących równa się $506,53 \text{ cm.}^3 \cdot 0,0104 \text{ norm. Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ i odpowiada całkowitemu spadkowi jodu w 100 cm.^3 chloroformu; stąd wyliczamy stężenie początkowe jodu:

$$c_0 = \frac{506,53 \times 0,0104}{100} = 526,79 \times 10^{-4} \text{ norm. J.}$$

Podobnie obliczamy stężenia c w innych czasach t .

ZLEWKA II.

| t min. | $W \text{ cm.}^3$ | $m \text{ cm.}^3$ | $c \times 10^4$ norm. J | K |
|----------|-------------------|-------------------|----------------------------|------|
| 0 | 200 | 3,53 | 524,48 | — |
| 4,0 | 190 | 8,55 | 429,29 | 5,24 |
| 10,0 | 180 | 15,31 | 298,74 | 5,63 |
| 18,0 | 170 | 21,02 | 197,79 | 5,36 |
| 29,0 | 160 | 25,95 | 115,75 | 5,21 |
| ∞ | 150 | 33,37 | 0 | — |
| | | | | 5,36 |

Ponieważ we wszystkich doświadczeniach części I spadek $W \text{ cm.}^3$ fazy A jest zawsze jednakowy, przeto w tablicach będziemy go pomijali, powołując się na powyższe dwa doświadczenia. Również, o ile to nie okaże się potrzebne, nie podajemy temperatury w termostacie, którą utrzymywaliśmy na wysokości 25°C , oraz szybkości obrotu mieszadła, która wynosiła normalnie $n = 130$ na minutę w granicach 5% błędu.

5. Sprawdzenie równania i zmiany w stężeniu jodu w chloroformie. W sposób, jak opisano wyżej, wykonaliśmy szereg doświadczeń najpierw ze stężeniami jodu cca 0,05 norm.

Doświadczenie 2.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 10,44 | 500,74 | — | 0 | 10,80 | 495,64 | — |
| 4,0 | 15,10 | 408,66 | 5,08 | 4,0 | 15,60 | 400,80 | 5,31 |
| 10,0 | 21,00 | 298,21 | 5,18 | 10,0 | 21,46 | 291,10 | 5,33 |
| 18,0 | 26,71 | 197,26 | 5,17 | 18,0 | 26,82 | 196,33 | 5,13 |
| 29,0 | 31,73 | 113,72 | 5,11 | 29,0 | 31,70 | 115,13 | 5,03 |
| ∞ | 39,02 | 0 | — | ∞ | 39,08 | 0 | — |
| | | | 5,14 | | | | 5,20 |

Doświadczenie 3.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 10,58 | 493,62 | — | 0 | 10,88 | 488,16 | — |
| 4,00 | 15,38 | 398,77 | 5,34 | 4,50 | 16,06 | 386,80 | 5,23 |
| 10,25 | 21,50 | 284,20 | 5,38 | 10,50 | 21,84 | 277,60 | 5,38 |
| 18,25 | 27,12 | 184,84 | 5,38 | 18,50 | 27,26 | 181,77 | 5,34 |
| 29,25 | 32,05 | 102,80 | 5,36 | 29,50 | 31,94 | 103,90 | 2,24 |
| ∞ | 38,64 | 0 | — | ∞ | 38,60 | 0 | — |
| | | | 5,36 | | | | 5,30 |

Doświadczenie 4.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 10,94 | 510,11 | — | 0 | 11,10 | 513,18 | — |
| 3,50 | 15,26 | 424,75 | 5,23 | 4,0 | 16,20 | 412,40 | 5,47 |
| 9,50 | 21,42 | 309,43 | 5,26 | 10,0 | 21,70 | 309,44 | 5,06 |
| 17,50 | 27,34 | 204,77 | 5,22 | 18,0 | 27,68 | 203,72 | 5,13 |
| 28,50 | 33,28 | 105,92 | 5,51 | 29,0 | 32,76 | 119,18 | 5,02 |
| ∞ | 40,07 | 0 | — | ∞ | 40,40 | 0 | — |
| | | | 5,31 | | | | 5,17 |

Doświadczenie 5.

I. $c_0 \times 10^4 = 524,92$
 $K = 5,36$

II. $c_0 \times 10^4 = 520,04$
 $K = 5,20$

Doświadczenie 6.

I. $c_0 \times 10^4 = 529,47$
 $K = 5,44$

II. $c_0 \times 10^4 = 523,61$
 $K = 5,22$

Jak widać z powyższych doświadczeń K jest stałą w każdym poszczególnym szeregu, i to w granicach, dochodzących do 80% całego jodu w chloroformie. Stosunek stężenia tiosiarczanu w A do stężenia jodu w B wynosi z początku doświadczenia około 0,1 : 0,5 czyli 2 : 1, zaś w końcu ok 0,08 : 0,01 czyli 8 : 1. Należy więc oczekiwać, że te same wartości dla K otrzymamy, jeżeli weźmiemy odrazu mniejsze stężenie jodu w chloroformie. Poniższe doświadczenia potwierdziły to, jakkolwiek musimy podkreślić, że z powodu mianowania jodu drogą pośrednią przez tak znaczny nadmiar tiosiarczanu w fazie A błędy mogą tu być poważniejsze.

Doświadczenie 7.

200 cm.³ ok. 0,1 norm. Na₂S₂O₃ w wodzie + 100 cm.³ ok. 0,025 norm. jodu w chloroformie. Inne warunki, jak przedtem.

| I. | | | | II. | | | |
|------|-------|---------------------|------|------|-------|---------------------|------|
| t | m | c × 10 ⁴ | K | t | m | c × 10 ⁴ | K |
| 0 | 2,50 | 238,01 | — | 0 | 2,52 | 263,71 | — |
| 5,0 | 5,27 | 183,28 | 5,23 | 5,0 | 6,04 | 194,16 | 6,12 |
| 12,0 | 8,19 | 128,62 | 5,13 | 12,0 | 9,10 | 136,87 | 5,46 |
| 22,0 | 11,30 | 73,63 | 5,33 | 22,0 | 12,30 | 80,30 | 5,41 |
| 35,0 | 14,00 | 28,70 | 6,04 | 35,0 | 14,81 | 38,53 | 5,48 |
| ∞ | 15,84 | 0 | — | ∞ | 17,28 | 0 | — |
| | | | 5,43 | | | | 5,62 |

Doświadczenie 8. (Jak 7).

| I. | | | | II. | | | |
|------|-------|---------------------|------|------|-------|---------------------|------|
| t | m | c × 10 ⁴ | K | t | m | c × 10 ⁴ | K |
| 0 | 2,82 | 295,96 | — | 0 | 3,20 | 292,61 | — |
| 5,0 | 5,98 | 233,52 | 4,74 | 5,0 | 6,50 | 227,41 | 5,04 |
| 14,0 | 10,62 | 146,66 | 5,01 | 14,0 | 10,98 | 143,54 | 5,08 |
| 26,0 | 14,36 | 80,54 | 5,00 | 26,0 | 14,60 | 79,54 | 5,01 |
| ∞ | 19,20 | 0 | — | ∞ | 19,38 | 0 | — |
| | | | 4,92 | | | | 5,04 |

Doświadczenie 9. (Jak 7).

| | | |
|---|--|--|
| I. $c_0 \times 10^4 = 256,82$ $K = 5,91$ | | II. $c_0 \times 10^4 = 258,34$ $K = 5,31$ |
|---|--|--|

Doświadczenie 10. (Jak 7).

$$\begin{array}{l} \text{I. } c_0 \times 10^4 = 291,03 \\ \quad K = 5,32 \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} \text{II. } c_0 \times 10^4 = 307,74 \\ \quad K = 4,87 \end{array}$$

Stosunek stężenia tiosiarczanu w A do stężenia jodu w B jest tu znacznie większy niż w doświadczeniach poprzednich: z początku np. doświadczenia № 7 wynosi ok. 0,1 : 0,05 czyli 4 : 1, w końcu zaś ok. 0,09 : 0,003 czyli 30 : 1. Mimo to K pozostaje stałe dla obu szeregów, jak to unaocznia poniższa tablica 1 z danymi przeciętnymi dla doświadczeń № 1—6 i № 7—10.

TABLICA I.

| № dośw. | Przeciętne początkowe stężenie jodu $c_0 \times 10^4$ | | K przeciętne | |
|---------|---|-----------|--------------|-----------|
| | I zlewka | II zlewka | I zlewka | II zlewka |
| 1 — 6 | 514,26 | 510,85 | 5,35 | 5,24 |
| 7 — 10 | 270,45 | 280,60 | 5,39 | 5,21 |

Mimo to, iż w drugim szeregu doświadczeń początkowe stężenie jodu jest prawie o połowę mniejsze, wielkość K pozostaje tą samą. Stąd, jak również ze stałości K w każdym poszczególnym doświadczeniu, wynika, że równanie 5 zupełnie odpowiada przebiegowi reakcji, podobnie jak w układach niejednorodnych ciało stałe — ciecz. Już ta zgodność wskazywałaby, iż i w naszym przypadku procesem kierowniczym jest tylko dyfuzja; szybkość jednak reakcji jednocząsteczkowych wyraża się także przez to samo równanie logarytmiczne, 5; by stwierdzić ostatecznie charakter dyfuzyjny zjawiska, mamy dwa jeszcze inne sprawdziany: 1) zależność od mieszania i 2) współczynnik temperatury. Temi zajmujemy się teraz.

6. *Wpływ mieszania.* Jeśli cieczę prędzej mieszać, grubość warstwy, δ_1 , zmniejsza się i stała K wzrasta w myśl równania (2); warstwa δ_2 jest w danym razie zbyt duża, gdyż tiosiarczanu mamy przy CD zawsze w nadmiarze. O ile by jednak równanie (5) miało wyrażać reakcję jednocząsteczkową, wpływ

mieszania na stałą K nie powinien się ujawnić. W tym celu wykonaliliśmy doświadczenia poniższe z różnemi szybkościami, n , obrotu mieszadła; inne warunki zachowaliśmy, jak w doświadczeniach № 1—6. Początkowe stężenie jodu w chloroformie wynosiło ok. 0,05 norm.

Doświadczenie 11, $n = 182$ obroty w 1'.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 4,10 | 592,79 | — | 0 | 4,50 | 586,80 | — |
| 3,0 | 10,56 | 465,14 | 8,06 | 3,0 | 10,38 | 470,61 | 7,35 |
| 7,0 | 16,86 | 347,20 | 7,64 | 7,0 | 16,36 | 358,66 | 7,03 |
| 13,0 | 24,52 | 211,78 | 7,92 | 13,0 | 23,50 | 232,43 | 7,12 |
| 22,0 | 31,80 | 90,64 | 8,54 | 22,0 | 30,84 | 110,29 | 7,60 |
| ∞ | 37,61 | 0 | — | ∞ | 37,91 | 0 | — |
| | | | 8,04 | | | | 7,29 |

Doświadczenie 12, $n = 80$ obrotów w 1'.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 2,43 | 544,01 | — | 0 | 2,58 | 538,19 | — |
| 6,50 | 9,13 | 411,62 | 4,29 | 7,00 | 9,74 | 396,71 | 4,36 |
| 17,00 | 16,82 | 267,66 | 4,17 | 16,75 | 17,58 | 260,34 | 4,34 |
| 30,25 | 23,48 | 149,92 | 4,26 | 29,75 | 23,86 | 149,31 | 4,31 |
| 48,25 | 27,98 | 75,04 | 4,10 | 47,75 | 28,68 | 69,11 | 4,30 |
| ∞ | 32,79 | 0 | — | ∞ | 33,11 | 0 | — |
| | | | 4,21 | | | | 4,33 |

W doświadczeniu 12 widzimy nadzwyczajną stałość K w granicach od 0 aż do 87% całego jodu w chloroformie.

Dane powyższe wraz z danymi doświadczeń № 1 — 6, dla których $n = 132$ obroty na minutę, umieszczamy w tablicy II.

TABLICA II.

| № dośw. | n | K | | x | |
|---------|-----|------|------|------|------|
| | | I | II | I | II |
| 12 | 80 | 4,21 | 4,33 | — | — |
| 1 — 6 | 130 | 5,35 | 5,24 | 0,49 | 0,39 |
| 11 | 182 | 8,04 | 7,29 | 1,21 | 0,98 |

A więc stała K zależy, i to w stopniu wybitnym, od szybkości mieszania. Zależność tę wyrażamy, z braku innego równania, z pomocą:

$$\frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^x, \quad (6)$$

jak w układach: ciało stałe — ciecz. Liczbę stąd wyliczoną dla x podajemy w tablicy II.

7. *Zależność od temperatury.* Drugim ważnym wskaźnikiem dla procesu dyfuzyjnego jest współczynnik temperatury. Wiadomo, że reakcje czysto chemiczne zwiększają swą szybkość mniej więcej o 100% co 10° C; reakcje natomiast dyfuzyjne w roztworze wodnym (np. rozpuszczanie się marmuru, cynku i t. d. w kwasach) tylko o 27%. Co prawda, w naszym przypadku mamy do czynienia z dyfuzją jodu w chloroformie i współczynnika tej dyfuzji, D_{chl} , nie znamy; mimo to jednak powinny wystąpić podobne różnice w stałej K , jak w roztworach wodnych. W tym celu wykonaliśmy pomiary w temperaturach 15°C i 5°C. Wyżej ponad 25°C nie chcieliśmy pójść z obawy przed zbyt silnym parowaniem chloroformu.

Doświadczenie 13. (Jak dośw. № 1—6). Temperatura: 15°C.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 2,97 | 562,45 | — | 0 | 3,48 | 560,50 | — |
| 5,0 | 8,32 | 456,74 | 4,16 | 5,0 | 8,92 | 453,00 | 4,22 |
| 112,5 | 15,16 | 328,69 | 4,30 | 12,5 | 15,66 | 326,83 | 4,32 |
| 222,5 | 21,77 | 211,83 | 4,34 | 22,5 | 21,98 | 215,09 | 4,26 |
| 336,5 | 27,30 | 119,81 | 4,24 | 36,5 | 27,50 | 123,24 | 4,15 |
| ∞ | 34,98 | 0 | — | ∞ | 35,40 | 0 | — |
| | | | 4,26 | | | | 4,24 |

Doświadczenie 14. (Jak 13). Temperatura: 5°C.

| I. | | | | II. | | | |
|----------|-------|-----------------|------|----------|-------|-----------------|------|
| t | m | $c \times 10^4$ | K | t | m | $c \times 10^4$ | K |
| 0 | 5,12 | 622,97 | — | 0 | 6,32 | 611,89 | — |
| 6,0 | 10,92 | 508,36 | 3,39 | 6,0 | 11,90 | 501,63 | 3,31 |
| 114,5 | 17,92 | 377,32 | 3,54 | 14,5 | 18,82 | 372,09 | 3,51 |
| 225,5 | 25,06 | 251,09 | 3,57 | 25,5 | 25,26 | 258,23 | 3,38 |
| 440,5 | 31,14 | 149,92 | 3,52 | 40,5 | 32,06 | 145,08 | 3,55 |
| ∞ | 40,75 | 0 | — | ∞ | 41,36 | 0 | — |
| | | | 3,50 | | | | 3,44 |

Wyniki zestawiamy w poniższej tablicy III dla trzech temperatur: 25°C (z tablicy 1), 15° i 5° oraz wzrost stałej K w procentach.

TABLICA III.

| № dośw. | T°C | K | | Wzrost K w % co 10°C | |
|---------|-----|------|------|----------------------|-------|
| | | I | II | I | II |
| 14 | 5° | 3,50 | 3,44 | — | — |
| 13 | 15° | 4,26 | 4,24 | 21,7% | 23,2% |
| 1 — 6 | 25° | 5,35 | 5,24 | 25,6% | 23,6% |
| | | | | przeciętnie 23,5% | |

Wzrost stałej K co 10° C jest bardzo niewielki, bo zaledwie 23,5% czyli prawie tyleż, co i wzrost szybkości reakcyj w układach ciało stałe — ciecz (ok. 27%). Wraz z dowodami poprzednimi wykazuje to niezbicie, że jedynie dyfuzja kieruje szybkością badanego tu procesu i że sama reakcja chemiczna na granicy obu faz — w warstwie CD — odbywa się z szybkością, praktycznie wzięwszy, nieskończoną.

8. *Grubość warstwy δ_1 .* Udowodniwszy dyfuzyjność procesu, spróbujemy wyliczyć grubość warstwy δ_1 w fazie B z pomocą równania (2). Średnica zlewki I wynosi 7,80 cm., czyli promień = 3,9 cm.; stąd powierzchnia graniczna CD między obu fazami: $P = 47,76 \text{ cm.}^2$. Współczynnik dyfuzji jodu w chloroformie, D_{chl} , obliczymy na zasadzie równania ogólnego, postawionego przez Walden'a¹⁾ dla chlorowców:

$$D \eta \sqrt{M} = 0,146$$

i stosującego się do wszystkich cieczy; w równaniu tem D oznacza współczynnik dyfuzji, η — współczynnik tarcia wewnętrznego dla danego rozczynnika i M — ciężar cząsteczkowy chlorowca. W tablicach Landolt'a²⁾ znajdujemy dla chloroformu w 25° C:

$$\eta = 0,00539.$$

¹⁾ Walden. Zeitschr. für Elektr. 12, 77 (1906).

²⁾ Landolt's Tabellen, str. 285.

Ciężar cząsteczkowy jodu $M = 2 \times 126,92$. Wstawiając tę liczbę do powyższego równania, otrzymujemy:

$$D_{chl} = 1,702 \text{ cm.}^2/\text{dzień w } 25^{\circ} \text{ C.}$$

Ponieważ stałą K obliczaliśmy w $\text{cm.}^2/\text{minuta}$, musimy i współczynnik dyfuzji wyrazić w tej samej jednostce:

$$D_{chl} = \frac{1,702}{24 \times 60} \text{ cm.}^2/\text{minuta.}$$

Wprowadzając do równania (2) wielkości powyższe oraz stałą K z tablicy II (zlewka I) otrzymujemy dla różnych szybkości mieszania:

TABLICA IV.

| n | δ_1 |
|-----|------------|
| 80 | 0,0134 cm. |
| 130 | 0,0105 cm. |
| 182 | 0,0070 cm. |

Liczby te dla δ_1 w fazie chloroformowej przedstawiają się niezwykle ciekawie, gdyż są tylko nieco większe od grubości δ znalezionych dla układów: faza stała — woda; np. E. Brunner¹⁾ w procesie rozpuszczania się cynku w kwasie solnym znalazł $\delta = 0,007 \text{ cm.}$ ($n = 250$); jeden z nas²⁾ w rozkładzie chlorku chromowego przy blaszce platynowej obliczył $\delta = 0,005 \text{ cm.}$ ($n = 250$) i t. d.

Część II. Dyfuzja w jednej fazie: jodu w roztworze wodnym.

9. *Równanie reakcji.* W części I-ej mieliśmy do czynienia z dyfuzją jodu w fazie B t. j. w chloroformie. Tu rozpatrzemy proces, oparty na dyfuzji tegoż ciała w fazie A t. j.

¹⁾ E. Brunner. Zeit. phys. Ch. 51, 95 (1905).

²⁾ K. Jabłczyński. Rozpr. Akad. Um. w Krakowie. Tom XLVIII, str. 75 (1908).

w wodzie. W tym celu weźmiemy stężony roztwór jodoowy w chloroformie, tak aby stężenie c_0 jodu w B pozostawało niezmiennie podczas całego doświadczenia, ilości bowiem J_2 , jakie przechodzą do A, są stosunkowo drobne.

Oznaczamy współczynnik podziału J_2 pomiędzy A i B przez k czyli:

$$k = \frac{c_2}{c_0} \quad (7)$$

gdzie c_2 oznacza stężenie jodu w A przy CD i jest jak i c_0 wielkością stałą. Stąd dyfunduje jod poprzez warstwę δ_2 do A; utrzymujemy jego stężenie w A wciąż na zerze, a szybkość tej dyfuzji wyrazi się przez równanie:

$$\frac{dx}{dt} = K_1 c_2 = K_1 k c_0, \quad (8)$$

które po zcałkowaniu da:

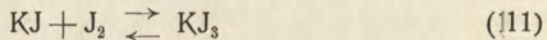
$$x_2 - x_1 = K_1 k c_0 (t_2 - t_1); \quad (9)$$

$(x_2 - x_1)$ oznacza ilość gramoatomów jodu, przefundowanych w czasie $(t_2 - t_1)$. Stąd:

$$K_1 k = \frac{1}{c_0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (10)$$

Równanie to, nadzwyczaj proste nie stosuje się do przypadków, w których faza A zawiera NaJ wzgl. KJ, wtedy bowiem stężenie jodu w A przy CD (rys. 1) jest inne, większe. Utwórzmy równanie reakcji i dla tego przypadku.

Współczynnik podziału jodu między fazami A i B pozostanie ten sam (równanie 7). Następnie, wędrujący do A jod łączy się z NaJ wzgl. KJ na związek:



o równowadze:

$$K_1 = \frac{c_3}{c_2 q}, \text{ wzgl. z (7) } k_1 = \frac{c_3}{kq c_0}, \quad (112)$$

gdzie c_3 oznacza stężenie KJ_3 , c_2 — stężenie jodu, oba przy CD; zaś q — stężenie KJ w fazie A. Dyfuzja jodu przez warstwę δ_2 odbywa się przeto dwiema drogami: wskutek różnic w stężeniu

J i KJ_3 . Jeśli stężenia tych ciał w A będziemy utrzymywali wcięż na zerze, szybkość obu dyfuzji wyrazi się przez równanie następujące: dla dyfuzji jodu, jak równanie 8:

$$\frac{dx_1}{dt} = K_1 c_2 = K_1 k c_0 \quad (13)$$

zaś; dla dyfuzji KJ_3 , z wprowadzeniem c_3 z równania 12:

$$\frac{dx_2}{dt} = K_2 c_3 = K_2 k_1 k q c_0. \quad (14)$$

Szybkość ogólna będzie sumą obu szybkości:

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx}{dt} = (K_1 k + K_2 k_1 k q) c_0. \quad (15)$$

Stąd przez zcałkowanie:

$$Q = K_1 k + K_2 k_1 k q = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (16)$$

Równanie to sprawdzone zostało na szeregu doświadczeń.

10. *Pomiary bez dodatku KJ do fazy A.* Doświadczenia wykonywaliśmy w tym samym przyrządzie, co w części pierwszej, ale tylko z jedną zlewką, nad którą ustawiliśmy biuretę z 0,0118 normalnym tiosiarczanem sodu. Do zlewki wlewaliśmy: 200 cm.³ wody ze skrobią oraz 100 cm.³ roztworu jodu w chloroformie o stężeniu c_0 , które oznaczaliśmy w oddzielnej próbce, biorąc 10 cm.³ roztworu chloroformowego i miareczkując tiosiarczanem. Po wprowadzeniu w ruch mieszadła wpuszczaliśmy w kilku porcjach w cm.³ (od 3 do 8) tiosiarczanu z biurety, tak by zawsze było go w A maleńki nadmiar i obserwowaliśmy chwilę ukazania się barwy niebieskawe; aby łatwiej było tę chwilę uchwycić, zlewkę pomalowaliśmy odzewnątrz białą farbą olejną.

Do wyliczeń poniższych, w równanie (10) zamiast $(x_2 - x_1)$ gramatomów przedyfundowanego jodu wprowadzaliśmy proporcjonalne do nich w cm.³ 0,0118 norm. $Na_2S_2O_3$, czyli stosowaliśmy równanie:

$$K_1' k = \frac{1}{c_0} \frac{w}{t_2 - t_1} \quad (17)$$

Doświadczenie 15.

100 cm.³ roztworu 3,879 g. jodu w choroformie t. j. o stężeniu $c_0 = 0,306$ norm. + 200 cm.³ wody z trochę skrobi. Temperatura 25° C. Szybkość obrotu mieszadła $n = 130$ w 1'.

| $t_2 - t_1$ | w cm. ³ 0,0118 n Na ₂ S ₂ O ₃ | $K_1' k = \frac{1}{c_0} \frac{w}{t_2 - t_1}$ |
|-------------|---|--|
| 2,25 | 3,00 | 4,37 |
| 2,17 | 3,00 | 4,52 |
| 2,17 | 3,00 | 4,52 |
| 1,42 | 2,04 | 4,69 |
| 2,50 | 3,66 | 4,78 |
| 1,92 | 2,92 | 4,97 |

Kilka innych jeszcze doświadczeń, podobnie wykonanych, wskazało, iż stała $K'k$ w rasta, jak to przewidywaliśmy, wskutek tworzenia się NaJ w reakcyi Na₂S₂O₃ na jod; przez to szybkość dyfuzyi, jakkolwiek pomału, ale stale się podnosi.

11. *Pomiary z dodatkiem KJ w fazie A.* By ten wpływ tworzącego się w reakcyi NaJ usunąć, a właściwie zmniejszyć poniżej błędu doświadczalnego, dodawaliśmy odrazu do fazy A od 5 do 25 cm.³ 0,1 norm. KJ¹⁾. Doświadczenia wykonywaliśmy jak № 15; do wyliczeń stosowaliśmy równanie 16, biorąc zamiast $(x_2 - x_1)$ gramoatomów jodu proporcjonalne do nich w cm.³ 0,0118 norm. N₂S₂O₃; wtedy:

$$Q' = K_1' k + K_2' k_1 kq = \frac{1}{c_0} \frac{w}{t_2 - t_1} \quad (18)$$

¹⁾ Ponieważ ogólna objętość fazy A równała się 200 cm.³, stężenie KJ wynosiło w niej od 0,0050 do 0,0125 norm; tiosiarczan zaś w biurecie był 0,0118 normalnym i dawał z jodem w A również 0,0118 norm. NaJ; zawartość więc KJ w fazie A prawie nie zmieniała się od dolewano wcióż roztworu Na₂S₂O₃; drobne zmiany nie wchodzą tu w rachubę.

Doświadczenie 16.

100 cm.³ roztworu 3,905 g. jodu w chloroformie t. j. o stężeniu $c_0 = 0,308$ norm. + 200 cm.³ wody z zawartością 5 cm.³ 0,1 norm. KJ t. j. o stężeniu $q = 0,0025$ norm. i z odrobiną skrobi.

| $t_2 - t_1$ | w cm. ³ 0,0118 n Na ₂ S ₂ O ₈ | Q' |
|-------------|---|------|
| 1,33 | 3,00 | 7,32 |
| 1,47 | 3,00 | 6,63 |
| 1,40 | 3,00 | 6,96 |
| 1,35 | 3,00 | 7,21 |
| 1,30 | 3,00 | 7,49 |
| 1,32 | 3,00 | 7,38 |
| 1,30 | 3,00 | 7,49 |
| | | 7,21 |

Doświadczenie 17.

W warunkach, jak 16. Stężenie jodu w chloroformie: $c_0 = 0,309$ norm. W fazie wodnej: 10 cm.³ 0,1 norm. KJ czyli $q = 0,0050$ norm.

| $t_2 - t_1$ | w cm. ³ | Q' |
|-------------|--------------------|-------|
| 1,97 | 6,00 | 9,86 |
| 1,98 | 6,00 | 9,81 |
| 1,95 | 6,00 | 9,95 |
| 1,95 | 6,00 | 9,95 |
| 1,85 | 6,00 | 10,50 |
| 1,95 | 6,00 | 9,95 |
| | | 10,00 |

Doświadczenie 18.

W warunkach jak 16 i 17. Stężenie jodu: $c_0 = 0,298$ norm.
W fazie wodnej: 15 cm.^3 0,1 n. KJ czyli $q = 0,0075$ norm.

| $t_2 - t_1$ | $w \text{ cm.}^3$ | Q' |
|-------------|-------------------|-------|
| 2,15 | 8,00 | 12,48 |
| 2,13 | 8,00 | 12,60 |
| 2,13 | 8,00 | 12,60 |
| 2,11 | 8,00 | 12,73 |
| 2,10 | 8,00 | 12,78 |
| | | 12,64 |

Doświadczenie 19.

W warunkach, jak poprzednie. Stężenie jodu: $c_0 = 0,294$ norm. W fazie wodnej: 25 cm.^3 0,1 KJ czyli $q = 0,0125$ norm.

| $t_2 - t_1$ | $w \text{ cm.}^3$ | Q' |
|-------------|-------------------|-------|
| 1,44 | 8,00 | 18,90 |
| 1,43 | 8,00 | 19,03 |
| 1,49 | 8,00 | 18,27 |
| 1,43 | 8,00 | 19,03 |
| | | 18,81 |

Stałość Q' jest widoczna i równanie 16 wzgl. 18 potwierdzone. Z tegoż równania wynika dalej:

$$Q' - K_1' k = K_2' k_1 k q \quad (19).$$

Odejmijmy od Q' wielkość $K_1' k$ z doświadczenia 15 (bez dodatku KJ), a różnice winny być proporcjonalne do stężeń q jodku potasu w fazie wodnej. Ponieważ w doświadczeniu 15 wielkość $K_1' k$ stale wzrasta, weźmiemy przeciętną z pierwszych

tylko trzech pomiarów t. j. $K_1'k = 4,47$. Obliczenie stosunków

$$N = \frac{Q_2' - K_1'k}{Q_1' - K_1'k}$$

zestawiamy w poniższej tabelicy V.

TABLICA V.

| № | q norm. KJ | Q' | $Q' - K_1'k$ | N | winno być $\frac{q_2}{q_1}$ |
|----|--------------|-------|--------------|------|-----------------------------|
| 16 | 0,0025 | 7,21 | 2,74 | | |
| 17 | 0,0050 | 10,00 | 5,53 | 2,02 | 2 |
| 18 | 0,0075 | 12,64 | 8,17 | 2,98 | 3 |
| 19 | 0,0125 | 18,81 | 14,34 | 5,23 | 5 |

Jak wymaga tego równanie 19, proporcjonalność ($Q' - K_1'k$) do stężenia q zostaje dowiedziona; wielkość N jest prawie identyczna z $\frac{q_2}{q_1}$; służy to zarazem za dowód dyfuzyjności procesu.

12. *Wpływ szybkości mieszania.* Zrobiliśmy kilka doświadczeń z dodatkiem 10 cm.³ 0,1 n KJ w fazie A, jak w dośw. 17, ale z rozmaitemi szybkościami obrotu mieszadła.

Doświadczenie 20.

$n = 80$ obrotów w 1'. Jak dośw. 17. Stężenie jodu w chloroformie: $c_0 = 0,306$ norm.; w fazie wodnej: 10 cm.³ 0,1 n KJ.

| $t_2 - t_1$ | w cm. ³ | Q' |
|-------------|----------------------|------|
| 2,78 | 6,00 | 7,06 |
| 2,75 | 6,00 | 7,13 |
| 2,84 | 6,00 | 6,90 |
| 2,75 | 6,00 | 7,13 |
| | | 7,05 |

Doświadczenie 21.

$n = 182$ obroty w 1'. Jak 20. Stężenie jodu w chloroformie: $c_0 = 0,307 n$; w fazie wodnej: $10 \text{ cm.}^3 0,1 n \text{ KJ}$.

| $t_2 - t_1$ | $w \text{ cm.}^3$ | Q' |
|-------------|-------------------|-------|
| 1,66 | 6,00 | 11,78 |
| 1,63 | 6,00 | 11,99 |
| 1,62 | 6,00 | 12,07 |
| 1,55 | 6,00 | 12,61 |
| | | 12,11 |

Doświadczenie 22.

$n = 235$ obr. w 1'. Jak 20 i 21. Stężenie jodu w chloroformie: $c_0 = 0,298 \text{ norm.}$; w fazie wodnej: $10 \text{ cm.}^3 0,1 n \text{ KJ}$.

| $t_2 - t_1$ | $w \text{ cm.}^3$ | Q' |
|-------------|-------------------|-------|
| 1,80 | 8,00 | 14,91 |
| 1,99 | 8,00 | 14,33 |
| 1,80 | 8,00 | 14,91 |
| 1,72 | 8,00 | 15,61 |
| | | 14,94 |

W poniższej tablicy VI zestawione są Q' i wyliczony wykładnik x w myśl równania 6.

TABLICA VI.

| N ^o | n | Q' | x |
|----------------|-----|-------|------|
| 20 | 80 | 7,05 | |
| 17 | 130 | 9,89 | 0,70 |
| 21 | 182 | 12,11 | 0,60 |
| 22 | 235 | 14,94 | 0,82 |

Jak we wszystkich reakcyach w układach niejednorodnych, tak i tu mieszanie ma wpływ wybitny na szybkość procesu, co jest jednym z dowodów jego charakteru dyfuzyjnego; wielkość x ma tę samą wartość, co i dla układów ciało stałe — ciecz; np. E. Brunner¹⁾ w rozpuszczaniu się kwasu benzoowego w wodzie, a także tlenku magnezu i metalicznego magnezu w kwasach znalazł $x=0,66$ lub cynku w kwasach $x=0,6$; L. Bruner i S. Tołłoczko²⁾ w rozpuszczaniu się gipsu w wodzie znaleźli $x=0,94$, $0,73$ i $0,93$; K. Jabłczyński³⁾ w katalizie chlorku chromowego przy blaszce platynowej otrzymał $x=0,95$, $0,89$, $0,78$ i $0,77$ oraz w rozpuszczaniu się marmuru w kwasie solnym $x=0,93$.

13. *Współczynnik temperatury.* Następujące doświadczenia wykonaliśmy w temp. 15°C , biorąc fazę wodną bez dodatku KJ oraz z dodatkiem 10 i 25 cm.³ 0,1 norm. KJ. Inne warunki zachowaliśmy, jak w doświadczeniach N^o 15, 17 i 19.

Doświadczenie 23.

Stężenie jodu w fazie chloroformowej $c_0 = 0,294$ norm; faza wodna bez dodatku KJ. Temperatura 15°C . Szybkość mieszania $n = 130$.

¹⁾ Zeit. phys. Ch. 47, 56 (1904) i 51, 95 (1905).

²⁾ Bull. inter. de l'Ac. d. Sc. de Cracovie 1903, 555.

³⁾ Rozprawy Wydz. mat. przyr. Ak. Um. w Krakowie 1908, 75 i Bull. inter. de l'A. d. Sc. de Cracovie 1908, 620.

| $t_2 - t_1$ | $w \text{ cm.}^3$ | $K_1' k = \frac{1}{c_0} \frac{w}{t_2 - t_1}$ |
|-------------|-------------------|--|
| 3,29 | 3,00 | 3,10 |
| 3,12 | 3,00 | 3,27 |
| 3,00 | 3,00 | 3,40 |
| 2,80 | 3,00 | 3,64 |
| 2,75 | 3,00 | 3,71 |
| 2,73 | 3,00 | 3,74 |

Spostrzegamy tu podobny wzrost stopniowy wielkości $K_1' k$, co i w doświadczeniu № 15.

Doświadczenie 24.

Stężenie jodu $c_0 = 0,275 \text{ norm.}$ W fazie wodnej: 10 cm^3 $0,1 \text{ norm. KJ}$, czyli $q = 0,0050 \text{ n.}$ Temperatura 15°C. Szybkość mieszania $n = 130.$

| $t_2 - t$ | $w \text{ cm.}^3$ | Q' |
|-----------|-------------------|------|
| 2,28 | 6,00 | 9,57 |
| 2,28 | 6,00 | 9,57 |
| 2,36 | 6,00 | 9,25 |
| 2,34 | 6,00 | 9,33 |
| 3,07 | 8,00 | 9,48 |
| 2,28 | 6,00 | 9,57 |
| | | 9,46 |

Doświadczenie 25.

Stężenie jodu $c_0 = 0,298 \text{ n.}$ W fazie wodnej 25 cm.^3 $0,1 \text{ n}$ KJ , czyli $q = 0,0125 \text{ n.}$ Temperatura: 15°C. Szybkość mieszania $n = 130.$

| $t_2 - t$ | $w \text{ cm.}^3$ | Q' |
|-----------|-------------------|-------|
| 1,66 | 8,00 | 16,17 |
| 1,67 | 8,00 | 16,08 |
| 1,66 | 8,00 | 16,17 |
| 1,68 | 8,00 | 15,98 |
| | | 16,10 |

Wyniki powyższe dla 15°C zestawiliśmy w tablicy VII z wynikami dla 25°C, przyczem z doświadczeń 15 i 23 (bez dodatku KJ) weźmiemy przeciętne tylko z trzech pierwszych pomiarów.

TABLICA VII.

| N ^o | Temperatura | q norm. KJ w fazie A | $K_1'k$ wzgl. Q' | Przyrost w % co 10°C. |
|----------------|-------------|---------------------------|--------------------|--------------------------|
| 23 | 15° C | 0 | 3,26 | 37,1% |
| 15 | 25° C | 0 | 4,47 | |
| 24 | 15° C | 0,0050 | 9,46 | 4,55% |
| 17 | 25° C | 0,0050 | 9,89 | |
| 25 | 15° C | 0,0125 | 16,10 | 16,34% |
| 19 | 25° C | 0,0125 | 18,73 | |

Widzimy w tablicy powyższej, iż proces zwiększa się szybkość w miarę podwyższania się temperatury, lecz przyrost nie jest jednakowy; bez dodatku KJ do fazy A wynosi on 37,1% co 10°C, gdy dla układów niejednorodnych: faza stała — ciecz oraz

dla szybkości dyfuzji ciał, rozpuszczonych w wodzie znaleziono przeciętnie 26%. W naszym przypadku na przyrost 37,1% składają się dwa czynniki, wyrażone w stałej $K_1'k$ równania 10 wzgl. 17; jeden z nich K_1' zwiększa się wskutek wzrostu szybkości dyfuzji jodu od temperatury; drugi k — współczynnik podziału J między H_2O i $CHCl_3$ także wznosi się z temperaturą. Oba się więc równocześnie podnoszą i stąd przyrost 37,1% zamiast oczekiwanego, normalnego 26%.

Natomiast zadziwiająco małym jest przyrost wobec dodatku KJ do fazy A, bo zaledwie 4,88 i 16,04%; ma to swą całkiem naturalną przyczynę w rozpadaniu się KJ_3 wraz z podnoszeniem się temperatury, co wynika z pomiarów, dokonanych przez Dawson¹⁾, stałej k równowagi (12):

| Temperatura | k_1 |
|-------------|-------|
| 15° C | 966,3 |
| 18° C | 867,4 |
| 25° C | 737,5 |

A więc stała k_1 spada o 24% w przejściu z 15°C do 25°C; w równaniu 18 stałe K_1' , K_2' i k wzrastają, zaś k_1 obniża się ze wzrostem temperatury; stąd tak mały przyrost Q' w tablicy 7. Wyjaśnienie powyższe jest poważnym argumentem, usuwającym zarzuty przeciw teorii dyfuzyjnej z powodu niskiego współczynnika temperatury.

14. *Grubość warstwy δ_2* . Podobnie jak obliczaliśmy grubość δ_1 dla fazy chloroformowej, tak teraz spróbujemy wyliczyć grubość δ_2 dla fazy wodnej. Skorzystamy z równania 10, a więc bez dodatku KJ do fazy A. Stała K_1 wyraża się przez podobne równanie 2, co i stała K :

¹⁾ Dawson. Journ. Chem. Soc. 79, 238 i 81, 1086 p. Abegg. Handbuch d. anorg. Chemie T. IV, str. 440. Dawson obliczył wartość stałej $\frac{1}{k_1}$; bierzemy przeto odwrotność jego liczb.

$$K_1 = \frac{D_{\text{woda}} \cdot P}{\delta_2}; \quad (20).$$

D_{woda} oznacza współczynnik dyfuzji jodu w wodzie i równa się $0,9 \text{ cm.}^2/\text{dni}$ w 20°C ¹⁾; biorąc zwykły przyrost dyfuzji 26% co 10°C , przeliczamy $D_{\text{woda}} = 1,02 \text{ cm.}^2/\text{dni}$ w 25°C czyli $= \frac{1,02}{24 \times 60} \text{ cm.}^2/\text{minuta}$. Wielkość k , t. j. współczynnik podziału jodu między H_2O i CHCl_3 , zmierzili doświadczalnie Herz i Kurzer²⁾ i znaleźli dla $0,309$ normalnego roztworu jodu w CHCl_3 :

$$k = \frac{1}{129,0} \text{ w } 25^\circ\text{C}$$

Wielkość $K_1 k$ bierzemy z trzech pierwszych pomiarów doświadczenia № 15 i mnożymy jeszcze przez $0,0118$ oraz dzielimy przez 1000 , by $w \text{ cm.}^3$ $0,0118 \text{ norm. Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 = J$ przeprowadzić w $(x_2 - x_1)$ gramoatomów jodu, a również mnożymy przez 1000 , aby stężenie c_0 z wymiarów gramocząsteczka — liter przeprowadzić w wymiary gramocząsteczka — centymetr. Stąd:

$$K_1 k = 4,47 \frac{0,0118 \times 1000}{1000} = 4,47 \times 0,0118;$$

po wprowadzeniu wartości dla k , otrzymujemy

$$K_1 = 4,47 \times 0,0118 \times 129,0.$$

Wreszcie powierzchnia, oddzielająca obie fazy, $P = 47,76 \text{ cm.}^2$.

Z powyższych danych wyliczamy δ_2 z pomocą równania (20):

$$\delta_2 = 0,0049 \text{ cm. } (n = 130).$$

Wynik ten jest dla nas niesłychanie ciekawy, gdyż takie same liczby otrzymano dla grubości δ warstwy t. zw. nieruchomej w układach niejednorodnych: ciało stałe — ciecz; poza liczbami przytoczonymi już w us 8, wymienimy jeszcze kilka innych; tak więc E. Brunner³⁾ obliczył dla reakcji rozpuszczania się:

1) p. Abegg. Handbuch d. anorg. Ch. Tom IV, str. 369.

2) W. Herz i A. Kurzer. Zeit. f. Elektr. 16,870 (1910).

3) E. Brunner. Zeit. f. phys. Ch. 47,99 (1904).

| | δ |
|--|--------------------------|
| kwasu benzoesowego w wodzie | 0,0025 cm. ($n = 150$) |
| tlenku magnezu w kwasie solnym | 0,0047 " " |
| marmuru w kwasie solnym | 0,0034 " " |
| magnezu " " | 0,0049 " " |

Podobnie L. Bruner i S. Tołłoczko¹⁾ dla reakcji rozpuszczania się:

| | |
|--|--------------------------|
| kryształów gipsu w wodzie | 0,0050 cm. ($n = 280$) |
| kryształów soli kuchennej w wodzie | 0,0077 " " |
| O. Sackur ²⁾ w procesie rozpuszczania się wodoru przy anodzie | 0,0065 " ($n = 120$) |
| F. Weigert ³⁾ wyliczył δ w reakcjach depalaryzatorów | 0,0042 " ($n = 250$) |

Ścisła łączność między procesami w układach: ciało stałe — ciecz i ciecz — ciecz jest więc aż nazbyt widoczna.

Część III. Dyfuzya w obu fazach: jodu w chloroformie i wodzie.

15. *Równanie.* Zawartość jodu w fazie chloroformowej znacznie zmniejszamy, a również, jak w części II, stężenie jodu w fazie wodnej utrzymujemy na zerze; dyfuzya odbywa się więc przez obie warstwy δ_1 i δ_2 (rys. 1). Oznaczmy stężenie jodu w B przez c , stężenie przy CD przez c_1 oraz przez dx_1 ilość gramoatomów J, jaka w czasie dt przepływa przez warstwę δ_1 ; szybkość tej dyfuzji będzie:

$$\frac{dx_1}{dt} = -K(c - c_1); \quad (21)$$

Stała K ma taką samą wartość, co stała K w równaniu 1 części I, gdyż stężenie jodu w B jak tu, tak i tam, bierzemy prawie jednakowe.

Przy CD następuje podział jodu między obie fazy, w myśl równania 7:

¹⁾ L. Brunner i S. Tołłoczko. Bull. In. de l'Ac. de Sc. de Cracovie 1903, 555 i 1907, 672.

²⁾ O. Sackur. Zeit. f. phys. Ch. 54,644 (1906).

³⁾ F. Weigert. Zeit. f. phys. Ch. 60,518.

$$k = \frac{c_2}{c_1}; \quad (22)$$

c_2 jest stężeniem jodu w fazie A przy CD. Od warstwy granicznej CD jod dyfunduje w wodzie do fazy A, gdzie jego stężenie utrzymujemy na zerze. Szybkość tej dyfuzji wyraża się przez równanie:

$$\frac{dx_2}{dt} = -K_1 c_2 = -K_1 k c_1, \quad (23)$$

w którym K_1 ma tę samą wartość, co i w równaniu 8.

Ponieważ do CD tyle jodu musi przyplýwać z fazy B, ile go wchodzi do fazy A, przeto obie szybkości 21 i 23 winny być sobie równe, czyli:

$$K(c - c_1) = K_1 k c_1 \quad (24)$$

a) stąd:

$$c_1 = \frac{K}{K + K_1 k} c \quad (25)$$

Wielkość c_1 z 25 wprowadzamy do 21 lub 23, pisząc przytem ogólnie dx zamiast dx_1 wzgl. dx_2 :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{K K_1 k}{K + K_1 k} c \quad (26).$$

Ponieważ:

$$\frac{dx}{v} = dc, \quad (27)$$

gdzie v oznacza objętość fazy B t. j. chloroformu, przeto:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{1}{v} \frac{K K_1 k}{K + K_1 k} c \quad (28)$$

Stąd przez całkowanie otrzymujemy:

$$\ln \frac{c_0}{c} = \frac{1}{v} \frac{K K_1 k}{K + K_1 k} t \quad (29)$$

z uwzględnieniem, że w czasie $t=0$ stężenie wynosi $c=c_0$. Z równania tego obliczamy stałą:

$$R = \frac{K K_1 k}{K + K_1 k} = \frac{v}{0,4343 t} \log \frac{c_0}{c} \quad (30).$$

Przy sprawdzaniu tego równania okazało się to samo, co w części drugiej, że R nie jest wielkością stałą, lecz wciąż wzrasta; powstający bowiem jodek sodowy z tiosiarczanu sodu i jodu, tworzy NaJ_3 , który również dyfunduje poprzez δ_2 i zwiększa ogólną szybkość reakcji. Dla tego to w następnych doświadczeniach dodawaliśmy odrazu dość znaczne ilości KJ do fazy A . Ogólna postać równania 30 pozostanie oczywiście ta sama; zmienni się jedynie wartość stałej R . By tę nową stałą wyprowadzić, pozostawiamy równania 21, 22 i 23 w niezmienionej postaci; wprowadzamy jedynie współczynnik równowagi k_1 w fazie wodnej między KJ , J_2 i KJ_3 w myśl równania 12. Dyfuzja jodu przez δ_2 odbywa się dwiema drogami: szybkość pierwszej, t. j. samego jodu, wyraża się przez 23, szybkość drugiej, t. j. trój-jodku potasu, przez równanie następujące, analogiczne do 14:

$$\frac{dx_3}{dt} = -K_2 c_3 = -K_2 k_1 k q c_1 \quad (31)$$

gdzie dx_3 oznacza ilości KJ_3 , przedyfundowane w czasie dt i gdzie na miejsce c_3 wprowadziliśmy jego wartość z 12. Szybkość obu dyfuzyj razem będzie:

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt} = -K_1 k c_1 - K_2 k_1 k q c_1 \quad (32)$$

Ponieważ do CD (rys. 1) winno tyle jodu przychodzić z B , ile go odplywa do A , szybkości przeto wyrażone w równaniach 23 i 31, muszą być sobie równe:

$$K(c - c_1) = K_1 k c_1 + K_2 k_1 k q c_1 \quad (33)$$

A stąd:

$$c_1 = \frac{K}{K + K_1 k + K_2 k_1 k q} c \quad (34)$$

Skoro c_1 z powyższego wprowadzimy do 21 lub 32, zastąpimy dx przez dc i zcałkujemy w granicach $t=0$, $c=0$, oraz t, c , otrzymamy:

$$S = \frac{KK_1 k + KK_2 k_1 k q}{K + K_1 k + K_2 k_1 k q} = \frac{v}{0,4343 t} \log \frac{c_0}{c} \quad (35)$$

16. *Pomiary.* Doświadczenia wykonywaliśmy, jak w części II: 100 cm.³ roztworu jodu w chloroformie + 200 cm.³ wody

czystej wzgl. z dodatkiem KJ i z odrobiną skrobi. Dyfundujący jod wciąż wiązano, wpuszczając porcyami 0,0106 norm. $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ z biurety ponad zlewka, tak że w wodzie był zawsze maleńki nadmiar tiosiarczanu; co pewien czas notowano chwilę niebieszczenia płynu i zarazem odczytywano poziom m cm.³ w biurecie. Ponieważ stężenie jodu w fazie A było prawie równem zeru, objętość tej fazy do wyliczeń nie wchodzi. Objętość fazy B wyrażamy w cm.³ czyli $v = 100$ cm.³, a stężenie c jodu w tej fazie — w normalnościach; stężenie to oznaczaliśmy, biorąc 10 cm.³ pierwotnego roztworu chloroformowego i miareczkując tym samym 0,0106 norm. tiosiarczanem; od tego początkowego stężenia odejmowaliśmy następnie ilości tiosiarczanu, wpuszczane do zlewki.

Doświadczenie 26. Bez dodatku KJ. 100 cm.³ roztworu chloroformowego o zawartości 0,642 g jodu, czyli o stężeniu = 0,05058 norm. + 200 cm.³ wody ze skrobią.

Temperatura 25°C. Szybkość mieszania $n = 130$ obrotów ma minutę.

| t minut | m cm. ³ | $c \times 10^4$ | R (z równania 30) |
|-----------|----------------------|-----------------|-------------------|
| zaczęto | 0,00 | 505,8 | — |
| 0 | 3,00 | 502,7 | — |
| 23,00 | 7,70 | 497,7 | 0,0433 |
| 46,08 | 13,00 | 492,2 | 0,0462 |
| 69,00 | 19,00 | 485,7 | 0,0497 |
| 86,83 | 24,50 | 479,8 | 0,0534 |
| 109,16 | 31,00 | 473,0 | 0,0576 |

Jak oczekiwaliśmy, wielkość R wzrasta dość szybko wskutek tworzenia się NaJ.

Na zasadzie równania 30 spróbujemy wyliczyć R z danych części I i II. Stała $K = 5,23$ (tablica 1, zlewka II). Stała $k = 4,47 \times 0,0118$ (p. Us. 14). Stąd:

$$R = 0,0522.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę odmiennosc warunków doświadczalnych w części II i III, zgodność wyliczonego R z otrzymanym w doświadczeniu 26 musimy uznać za nadzwyczaj dobrą.

Następne doświadczenia wykonaliśmy z dodatkiem KJ do fazy A.

Doświadczenie 27. Z dodatkiem 15 cm^3 $0,1 \text{ n. KJ}$, 100 cm^3 roztworu chloroformowego o zawartości $0,417 \text{ g. jiodu}$, czyli o stężeniu $0,03271 \text{ norm.} + 200 \text{ cm}^3$ roztworu $0,0075 \text{ norm. KJ}$ (t. j. 15 cm^3 $0,1 \text{ n. KJ}$ w 200 cm^3) z odrobiną skrobi. $\text{Temper.} = 25^\circ\text{C}$. Szybkość mieszania $n = 130$ w $1'$.

| t minut | $m \text{ cm}^3$ | $c \times 10^4$ | S (z równania 35) |
|-----------|------------------|-----------------|-------------------|
| zaczęto | 0,00 | 327,1 | — |
| 0 | 1,00 | 326,0 | — |
| 5,37 | 5,00 | 321,8 | 0,244 |
| 10,75 | 9,00 | 317,7 | 0,245 |
| 16,25 | 13,00 | 313,3 | 0,245 |
| 21,87 | 17,00 | 309,1 | 0,244 |
| 27,54 | 21,00 | 304,9 | 0,244 |
| 33,26 | 25,00 | 299,9 | 0,244 |
| 39,24 | 29,00 | 296,3 | 0,243 |
| 45,27 | 33,00 | 292,0 | 0,243 |
| 51,35 | 37,00 | 287,8 | 0,242 |
| 57,43 | 41,00 | 283,6 | 0,242 |
| 63,51 | 45,00 | 279,5 | 0,242 |
| 69,68 | 49,00 | 275,2 | 0,243 |
| | | | 0,243 |

Doświadczenie 28. Dodatek 25 cm.³ 0,1 norm. KJ. 100 cm.³ roztworu chloroformowego o zawartości 0,456 g. jodu czyli o stężeniu 0,03589 norm. + 200 cm.³ 0,0125 norm. KJ (t. j. 25 cm.³ 0,1 n. KJ w 200 cm.³) z odrobiną skrobi. Inne warunki, jak w dośw. 27.

| <i>t</i> minut | <i>m</i> cm. ³ | <i>c</i> × 10 ⁴ | S |
|----------------|---------------------------|----------------------------|-------|
| zaczęto | 0,00 | 358,9 | — |
| 0 | 4,00 | 354,6 | — |
| 3,58 | 8,00 | 350,4 | 0,336 |
| 7,16 | 12,00 | 346,1 | 0,338 |
| 10,79 | 16,00 | 342,0 | 0,339 |
| 14,49 | 20,00 | 337,7 | 0,338 |
| 18,32 | 24,00 | 333,4 | 0,336 |
| 22,19 | 28,00 | 329,3 | 0,336 |
| 26,07 | 32,00 | 325,0 | 0,335 |
| 29,99 | 36,00 | 320,7 | 0,335 |
| 33,91 | 40,00 | 316,5 | 0,336 |
| 37,91 | 44,00 | 312,3 | 0,336 |
| 41,99 | 48,00 | 308,0 | 0,386 |
| | | | 0,336 |

Doświadczenie 29. Dodatek 35 cm.³ 0,1 n. KJ. 100 cm.³ roztworu chloroformowego o zawartości 0,456 g. jodu czyli o stężeniu 0,03589 norm. + 200 cm.³ 0,0175 norm. KJ (t. j. 35 cm.³ 0,1 n. KJ w 200 cm.³) z odrobiną skrobi. Inne warunki, jak w dośw. 27 i 28.

| t minut | m cm. ³ | $c \times 10^4$ | S |
|-----------|----------------------|-----------------|-------|
| zaczęto | 0,00 | 358,9 | — |
| 0 | 4,00 | 354,6 | — |
| 2,68 | 8,00 | 350,4 | 0,449 |
| 5,36 | 12,00 | 346,1 | 0,452 |
| 8,06 | 16,00 | 342,0 | 0,452 |
| 10,78 | 20,00 | 337,7 | 0,455 |
| 13,50 | 24,00 | 333,4 | 0,457 |
| 16,30 | 28,00 | 329,3 | 0,457 |
| 19,18 | 32,00 | 325,0 | 0,456 |
| 22,10 | 36,00 | 320,7 | 0,455 |
| 25,03 | 40,00 | 316,5 | 0,455 |
| 28,03 | 44,00 | 312,3 | 0,454 |
| 31,13 | 48,00 | 308,0 | 0,453 |
| | | | 0,454 |

Nadzwyczajnie dobra stałość S potwierdza doskonale równanie 35. Dla uzupełnienia przeprowadziliśmy, jak i w częściach poprzednich, jeszcze pomiary ze zmienioną szybkością mieszania, oraz w różnych temperaturach.

17. *Wpływ szybkości mieszania.* Doświadczenia wykonywano w tych samych warunkach, co i № 27, a więc z dodatkiem 15 cm.³ 0,1 n. KJ do fazy A. Nie będziemy już podawali całości pomiarów, gdyż wielkość S okazała się jak w № 27, 28 i 29 wprost idealnie stałą.

Doświadczenie 30. 100 cm.³ roztworu chloroformowego o zawartości 0,426 g. jodu czyli o stężeniu 0,03356 norm. + 200 cm.³ 0,0075 norm. KJ (t. j. 15 cm.³ 0,1 n. KJ w 200 cm.³) z odrobiną skrobi. Szybkość mieszania $n = 80$ obrotów w minutę.

S przeciętna = 0,206.

Doświadczenie 31. Jak № 30, z tą samą zawartością jodu w chloroformie i jodku potasu w wodzie.

Szybkość mieszania: $n = 185$ obrotów w 1 minutę.

S przeciętna $= 0,306$.

Zależność między S i n przedstawia tablica VIII, w której x oznacza wykładnik, obliczony według równania 6.

TABLICA VIII.

| № | n | S | x |
|----|-----|-------|------|
| 30 | 80 | 0,206 | — |
| 27 | 130 | 0,243 | 0,34 |
| 31 | 185 | 0,306 | 0,66 |

A więc, podobnie jak w dwu pierwszych częściach tak i tu na szybkość procesu wpływa szybkość mieszania, co jest cechą charakterystyczną reakcji w układach niejednorodnych. Wielkość x waha się w tych samych granicach, co i w doświadczeniach poprzednich (patrz tablica II i VI).

18. *Wpływ temperatury.* Bardzo ciekawie dla nas przedstawiał się wpływ temperatury, gdyż w myśl wyjaśnień postawionych w us. 13, należało i tu oczekiwać małego współczynnika temperatury, o ile do fazy A doda się jodku potasu. Z jednej bowiem strony wpływ temperatury zwiększa szybkość dyfuzji i rozpuszczalność jodu w wodzie; z drugiej zaś, wskutek rozpadania się KJ_3 na KJ i J_2 w miarę wzrostu temperatury, następuje spadek tejże szybkości. Doświadczenia następujące, wykonane zostały jak № 27, ale w temp. 15° i 5° C.

Doświadczenie 32. Jak dośw. № 27, zawartość jodu w chloroformie: 0,463 g. czyli stężenie $= 0,03644$ norm. W fazie wodnej: 15 cm.^3 0,1 norm. KJ . Szybkość obrotu mieszadła $n = 130$.

Temperatura : 15° C.

S przeciętna $= 0,224$.

Doświadczenie 33. Jak 32 i z temi samemi stężeniami jodu i jodku potasu.

Temperatura: 5° C.

S przeciętna = 0,217.

W następującej tablicy № IX zestawiliśmy otrzymane liczby oraz przyrost S w procentach co 10° C.

TABLICA IX.

| № | Temperatura | S | Przyrost S w % co 10°C |
|----|-------------|-------|---------------------------|
| 33 | 5° C | 0,217 | — |
| 32 | 15° C | 0,224 | 3,23% |
| 27 | 25° C | 0,243 | 8,48% |

Tak jak przewidywaliśmy, współczynnik temperatury okazał się bardzo małym. Wynik ten jest doskonałym uzupełnieniem i zarazem potwierdzeniem wyjaśnienia w us. 13.

Praca powyższa, obejmująca po raz pierwszy dział układów niejednorodnych ciec — ciec, dowodzi niezbicie, że i te procesy opierają się wyłącznie na dyfuzji, jako na czynniku kierowniczym; przyczem właściwa reakcja chemiczna między jodem i tiosiarczanem zachodzi tak szybko (praktycznie wiańwszy momentalnie), iż na całość przebiegu nie wpływa. Temi wynikami uzupełniliśmy dział badań nad reakcjami w układach niejednorodnych, z których jedynie układy ciała: stałe — ciało stałe pozostają do opracowania, co jednak związane jest z nadzwyczaj wielkimi trudnościami doświadczalnemi. Ze wszystkich układów wydaje się nam najściślejszy w wynikach i najprostszy do przeprowadzenia układ z dwóch ciec; to też idąc w tym kierunku spodziewamy się w następstwie niejednego ważnego wyniku, osobliwie w dziedzinie pasywności metali.

Warszawa. Uniwersytet. II Zakład chemiczny.

K. Jabłczyński et W. Więckowski:

**Les réactions dans un système hétérogène:
liquide - liquide.**

Communication annoncée le 21. IV. 1917.

Présentée par St. J. Thugutt.

Nous avons entrepris d'élucider la question de vitesse de réaction dans un système de deux liquides, question, posée pour la première fois dans le domaine des systèmes hétérogènes. Nous avons dirigé nos travaux sur l'étude de la réaction entre l'iode dissous dans le chloroforme et l'hyposulphite de soude — dans une solution aqueuse. Notre travail avait pour but d'établir le caractère diffusif du phénomène. Nos études ont été divisées en trois parties, dont la première traite la diffusion d'iode dans la phase de chloroforme, la seconde — le même phénomène dans la phase aqueuse et la troisième — la diffusion d'iode dans les deux phases. Pour chacune de ces parties nous avons posé des équations et nous les avons vérifiées expérimentalement. Ensuite, nous avons étudié l'influence de vitesse d'agitation sur la vitesse de la réaction et déterminé le coefficient de la température.

L'ensemble du travail démontre que les réactions dans les systèmes liquide - liquide se basent exclusivement sur la diffusion, et que la réaction chimique entre l'iode et l'hyposulphite de soude se passe, en réalité, momentanément.

Par ces résultats nous avons complété le chapitre des recherches sur les réactions les systèmes hétérogènes et nous prétendons les appliquer à l'explication d'autres phénomènes chimiques, notamment de la passivité des métaux.

Varsovie. II Institut Chimique de l'Université.

3. E. Flatau i N. Zylberlastówna:

O oddziaływaniu opon mózgowych na gruźlicę.

Z Pracowni Neurobiologicznej Tow. Nauk. Warsz.

Komunikat zgłoszony dn. 20 Kwietnia 1917 r.

Opony mózgowe oddziałują znacznie częściej na gruźlicę innych narządów, aniżeli się to zwykle przypuszcza. Postaci klasyczne gruźlicy mózgu (*meningitis tuberculosa basilaris*, *tuberculum solitaire*) bynajmniej nie wyczerpują wszystkich obrazów, pod jakimi gruźlica mózgu może się przejawiać.

Na ogół biorąc, mózg reaguje na gruźlicę stanem zapalnym. Laseczniki gruźlicze lub ich toksyny wywołują w oponach stan podrażnienia, następnie zaś zapalenie. Zapalenie to może być natury nieswoistej i wtedy może przejść w wyleczenie (zapalenie wrzekome—*meningismus*, zapalenie surowicze—*meningitis serosa*). W innych przypadkach stan zapalny wprawdzie się wyczerpuje, lecz pozostawia po sobie pewne ślady, prowadzące, dzięki nawrotom, do stwardnienia w oponach (*meningitis chronica ex origine tuberculosa*), bez wyraźnych zmian swoistych lub z nieznaczną ich domieszką.

Wreszcie sprawa gruźlicza w oponach ogranicza się ściśle do pewnych tylko okolic mózgu (przeważnie na wypukłości półkul, w okolicy zawojów środkowych lub czołowych i skroniowych), pozostawiając inne okolice nietknięte (*meningitis tuberculosa circumscripta*, *méningite tuberculeuse en plaques*).

Obrazy kliniczne, odpowiadające tym postaciom, są z natury rzeczy bardzo rozmaite.

Tam, gdzie laseczniki gruźlicze lub ich toksyny wywołują przejściowe tylko podrażnienie opon, powstaną uporczywe bóle głowy wraz ze zniechęceniem i osłabieniem; niekiedy przyłączy się ból w karku przy nachyleniu głowy i występują dreszczyki oraz nieznaczne podskoki ciepłoty.

W przypadkach z większym nasileniem (zapalenie surowicze) stwierdza się niekiedy objaw obiektywny, a mianowicie tarczę zastoinową. I ten stan może przejść w wyleczenie.

W razie nawrotów tej sprawy, powstać może obraz powtarzających się okresowo, w ciągu lat wielu, bólów głowy z dresz-

czykami, podskokami ciepłoty, wreszcie napadami drgawek lub porażeń. Jad gruźliczy bywa unieszkodliwiony w oponach. Niekiedy jednak przyłączyć się może obraz klasyczny gruźlicy opon.

Podajemy następującą klasyfikację postaci rzadszych gruźlicy opon mózgowych.

I. Postacie słabego, przemijającego podrażnienia lub zapalenia opon mózgowych, przebiegające jako t. zw. zapalenie opon wrzekome (*meningismus*), lub zapalenie surowicze (*meningitis serosa*) na tle gruźlicy.

II. Postacie ogniskowe zapalenia gruźliczego opon mózgowych (*meningitis tuberculosa circumscripta*, *méningite tuberculeuse en plaques*), przyczem odróżniamy:

a) zapalenie ogniskowe gruźlicze opony twardej o przebiegu przeważnie przewlekłym (*pachymeningitis tuberculosa circumscripta*) i

b) zapalenie ogniskowe gruźlicze opon miękkich o przebiegu ostrym lub podostrym (*leptomeningitis tuberculosa circumscripta*).

III. Postacie przewlekłego rozlanego zapalenia gruźliczego opon (*meningitis tuberculosa diffusa chronica*).

I. Postaci słabego, przemijającego podrażnienia lub zapalenia opon mózgowych, przebiegające jako t. zw. zapalenie opon wrzekome (*meningismus*), lub zapalenie surowicze (*meningitis serosa*) na tle gruźlicy.

Obrazy kliniczne postaci tych są często mało plastyczne. Występują one u osobników, dotkniętych gruźlicą innych narządów, przeważnie płuc. Powstają uporczywe bóle głowy w okolicy czołowo-skroniowej lub ciemieniowej, przyłączają się do nich dreszczyki, nieznaczne podskoki ciepłoty, ból karku lub niezręczność przy nachylaniu głowy; w przypadkach dalej posuniętych rozwija się zastoina tarcz wzrokowych. Objawy te powstają na skutek inwazyi laseczników gruźlicy lub ich toksyn do mózgu, przyczem tolerancja opon zdrowych może być tak wielka, iż

twory te lub substancje zostają unieszkodliwione lub wyeliminowane.

Pogląd ten znajduje swe uzasadnienie teoretyczne w pracach doświadczalnych Renaud'a oraz w nieogłoszonych dotąd doświadczeniach Flatau a i Tarapaniówny. Renaud wykazał, iż nawet olbrzymia liczba laseczników gruźliczych, wprowadzonych do mózgu bywa bardzo szybko usuwana z tkanki. Flatau i Tarapaniówna wstrzykiwali psom i małpom do kanału kręgowego (za pomocą nakłucia lędźwiowego) ropę z gruczołów okołoskrzelowych świnki morskiej, zarażonej gruźlicą, oraz hodowle laseczników gruźliczych, otrzymanych od kol. Karwackiego. Badanie płynu mózgowo-rdzeniowego, dokonane dnia następnego, lub po upływie dni kilku, nie zdołało naogół wykryć laseczników gruźliczych, jakkolwiek pleocytoza dochodziła do rozmiarów olbrzymich.

Inne badania Flatau a i Tarapaniówny, dotyczące wrażliwości opon mózgowych, wykazały natomiast nadzwyczajną ich czułość na najłżejsze nawet zakłócenie płynu mózgowo-rdzeniowego. Dość powiedzieć, iż zastrzyknięcie do kanału kręgowego fizjologicznego roztworu soli wywołało wybitną pleocytozę.

Badania te wykazują, że opony mózgowe są z jednej strony niezmiernie czułe na najłżejsze zmiany, z drugiej zaś strony wykazywać one mogą dużą tolerancję względem laseczników gruźliczych.

Tem się też tłómaczy łagodność omawianych postaci podrażnienia lub zapalenia surowiczego opon.

Pogląd ten znajduje swe potwierdzenie w pracach Tinel'a i Gastinel'a, którzy również przypuszczają, że laseczniki Koch'a mogą wywołać zapalenie opon osłabione, przejściowe lub utajone.

Również i Brudziński omawia owe stany przejściowe w oponach, uważając je za czułą reakcję na odbywającą się sprawę w gruczolach oskrzelowych.

II. Postacie ogniskowego zapalenia gruźliczego opon mózgowych (*meningitis tuberculosa circumscripta, méningite tuberculeuse en plaques*).

a) Zapalenie ogniskowe gruźlicze opony twardej o przebiegu przeważnie przewlekłym (*parachymeningitis tuberculosa circumscripta*).

Jako rys najbardziej znamieny postaci tej uważać należy zogniskowanie sprawy gruźliczej głównie w oponie twardej pewnej tylko okolicy mózgu. Przebieg bywa przeważnie przewlekły. Występują tutaj te same objawy, co i w postaci I-ej. Cały zespół kliniczny nie wykazuje jednak skłonności do wyczerpywania się i znikania; przeciwnie, trwa on długie miesiące, a nawet lata, ze zwolnieniami i nasileniami. Przerwy trwać mogą czas dłuższy, nawet kilka miesięcy. Niekiedy sprawa ogranicza się do objawów ogólnych. W innych znowu przypadkach przyłączają się objawy ogniskowe, zależne od umiejscowienia sprawy.

Następujące spostrzeżenie własne przedstawia tę postać zachorzenia opon na tle gruźlicy¹⁾.

W przypadku tym mieliśmy do czynienia z osobnikiem młodym, gruźliczym. U osobnika tego pojawiają się bóle głowy, nader silne i uporczywe, trwające z rzędu kilka tygodni, lub nawet miesięcy. Słabną one, to znowu się nasilają. Towarzyszą im niekiedy wymioty. Na początku cierpienia powstają objawy wzrokowe (ściemnienia) i stwierdzano wtedy tarczę zastoinową. Ciepłota ciała była z początku normalna.

Po pewnej przerwie, w której bóle głowy znikły, zaś tarcze wzrokowe wykazywały li tylko zaczerwienienie, cierpienie wybucha z nową siłą. Tarcze są znowu obrzękłe, ciepłota ciała się podnosi, usposobienie chorej zmienia się zasadniczo. Staje się ona zniechęconą, apatyczną. Wtedy też płyn mózgowo-rdzeniowy wykazuje duże ciśnienie; stwierdza się w nim obecność białka przy braku pleocytozy.

Następuje nowa przerwa. Trwa ona kilka tygodni, lecz bóle głowy się ponawiają, przyłączają się drgawki ogólne z utratą przytomności i pianą na ustach. Wreszcie rozwija się stan ciężki z zamroczeniem przytomności, sennością. Ciepłota ciała jest podniesiona (37,6), przy tętnie słabem i zwolnionem. Stwierdza się oprócz tego wytrzeszcz, zastoinę tarcz. Chora wkrótce umiera. Cała choroba trwała przeszło rok jeden.

Badanie mózgu wykazało olbrzymie zgrubienie opon (do 6—7 mm. grub.), przeważnie opony twardej (fig. 1), w przedniej okolicy obu półkul, w zrazach czołowych, skroniowych i zawojach śród-

¹⁾ Opis dokładny przypadku tego będzie umieszczony w II tomie prac pracowni neurobiologicznej Tow. Nauk. Warsz.

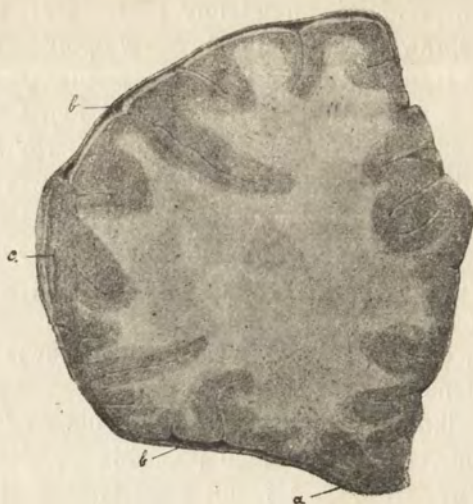


Fig. 1, *a* — opona twarda nieco zgrubiała i zrosnięta z oponami miękkimi; *b* — opona twarda nieco zgrubiała; *c* — opona twarda bardzo zgrubiała.

kowych. W oponach stwierdzono zmiany dawne, sklerotyczne; miejscami jednak występowały nacieczenia drobnokomórkowe. Na powierzchni wewnętrznej opony twardej, a właściwie w pajęczynówce, stwierdzono stare, stwardniałe gruzelki oraz pojedyncze, zniekształcone komórki olbrzymie (fig. 2, *nod.*). W korze mózgowej widać było objawy zwykłego zaniku; w niektórych miejscach występowała martwica tkanki mózgowej i niewielkie nacieczenie drobnokomórkowe. W naczyniach zmiany były bardzo nieznaczące; laseczników nie stwierdzono. W płatach ciemieniowych potylicznych, w całym pniu wraz z mózdzkiem nie spostrzeżono żadnych zmian.

Łącząc przebieg kliniczny przypadku tego ze zmianami patologiczno-anatomicznymi, można stworzyć obraz nawarstwiających się zmian w mózgu wraz z nasileniami i nawrotami cierpienia.

Przypuszczać należy, iż u chorej tej, obarczonej gruźlicą płuc, nastąpiła na początku choroby mózgowej inwazyja laseczników gruźliczych (lub ich toksyn) do opon mózgowych. Usadowiły się one w przedniej okolicy obu półkul. Naskutek tej inwazyji powstaje podrażnienie opon albo lekki stan surowiczo-zapalny. Stan ten początkowo się zatarł, pozostawił jednak we wskazanych miejscach pewne ślady w oponach. Miejsca te stanowić miały w przyszło-

ści *locus minoris resistentiae*. Podczas dalszych nasileń lub nawrotów następuje ponowne najście laseczników (lub ich toksyn) do mózgu. Znajdują one we wspomnianej okolicy opony mniej odporne, i na tle zmian dawniejszych powstaje tutaj świeży proces zapalny.



Fig. 2, *nod.* — gruzełek; *atr.* — zanik kory.

Wskutek kilkakrotnych zwolnień i nawrotów, sprawa w oponach to się jakby goiła i znikająca, to się ponawiała i wzmagala.

W rezultacie pozostało stwardnienie opon tak wybitne, że w niektórych miejscach dosięgało ono 6—7 mm. Charakter tych zmian był przeważnie przewlekły; stwierdzano głównie zmiany sklerotyczne. Oprócz tego, badanie drobnowidzowe wykryło jednak nacieczenie świeże.

W tych miejscach, w których opony przenikały do bruzd lub zmienione naczynia do tkanki mózgowej, spostrzegano i w tej ostatniej zmiany analogiczne, t. j. sklerotyczne, nekrotyczne i nacieczeniowe. Tam zaś, gdzie sprawa ograniczyła się do opon i wywołała znaczne zgrubienia, powstał pod wpływem ucisku prosty zanik kory mózgowej. On też górował w obrazach zmian, dotyczących istoty mózgowej.

Na tło gruźlicze wskazuje w przypadku tym zarówno cierpienie płuc, jak i gruźelki oraz pojedyncze komórki obrzymie. Obraz kliniczny w spostrzeżeniu tem przypominał w okresie początkowym zespół objawów, właściwy postaciom przemijającym (należącym do grupy I), z tą jednak różnicą, że sprawa nie uległa tutaj wyczerpaniu, lecz powróciła po miesiącach i od tego czasu cichła wprawdzie chwilowo, lecz stale powracała i doprowadziła do zejścia śmiertelnego.

b) Zapalenie ogniskowe gruźlicze opon miękkich o przebiegu przeważnie ostrym lub podostym (*leptomeningitis tuberculosa circumscripta*).

I w tej postaci rysem najbardziej znamionym jest umiejscowienie sprawy gruźliczej w pewnej tylko okolicy mózgu. Przebieg cierpienia bywa zwykle ostry lub podosty. Sprawa powstaje również u osobników gruźliczych. U osobników tych, dotąd nerwowo zdrowych, powstają zwykle objawy mózgowe, które od początku mają charakter ogniskowy. Występują mianowicie drgawki o typie Jackson'a, porażenie połowicze, lub ograniczone do jednej tylko kończyny. Objawy te mogą zniknąć bez śladu. Niekiedy jednak pozostaje w zajętych członkach osłabienie, które z czasem przejść może w porażenie stałe. Objawom ogniskowym inogą towarzyszyć objawy ogólne (uporczywe bóle głowy, wymioty, wzmożona ciepłota ciała, tętno nieregularne, sztywność karku). Niekiedy występują tarcze zastoinowe. Stan ten pogarsza się i prowadzi do śmierci.

Przytaczamy następujące spostrzeżenie własne ¹⁾.

Przypadek ten dotyczył osoby młodej, obarczonej gruźlicą (płuc?). Cierpienie rozpoczęło się od nagłych, przemijających osłabień prawej ręki. Napadom tym nie towarzyszyły bóle głowy. Dopiero po upływie kilku miesięcy chora zaczęła gorączkować, i pojawiły się bóle głowy wraz z wymiotami. Prawa ręka stawała się coraz bardziej bezwładną, mowa ulegała częstym zaburzeniom. Stwierdzono niedowład prawej połowy twarzy. Odczyn Pirquet'a był bardzo dodatni, odczyn Wassermann'a wypadł ujemnie. Płyn mózgowordzeniowy wykazał odczyn słabo dodatni Nonne'go-Apelt'a, przy braku pleocytozy.



Fig. 3, n — norma; o — ognisko.

Na podstawie tych objawów, przebiegu i etyologii, rozpoznano sprawę ogniskową gruźliczą w lewej półkuli mózgowej w okolicy odpowiednich zwojów środkowych.

Badanie pośmiertne wykazało w zawoju przedśrodkowym lewym, (fig. 3) w miejscu bardzo ograniczonym, ognisko chorobowe w postaci masy biało-żółtawej, o kształcie zewnętrznym, przypominającym mapę geograficzną. Ognisko to było widoczne z powierzchni mózgu, lecz przenikało włąb tkanki mózgowej.

¹⁾ Opis dokładny spostrzeżenia tego umieszczony będzie w II tomie prac z pracowni neurobiologicznej.

Badanie drobnowidzowe wykazało typowy obraz *meningo-encephalitis tuberculosa*. Stwierdzono w oponach, szczególnie w bruzdach, olbrzymie nacieczenie drobnokomórkowe, znaczną liczbę gruzełków z komórkami olbrzymimi, (fig. 4), miejscami rozpad tkanki zmartwiałej i początek sklerosy. Sprawa przechodziła w głąb tkanki mózgowej, wywołując tutaj również stan zapalny wraz ze zmianami swoistymi (gruzełkami) i rozmiękczeniem.

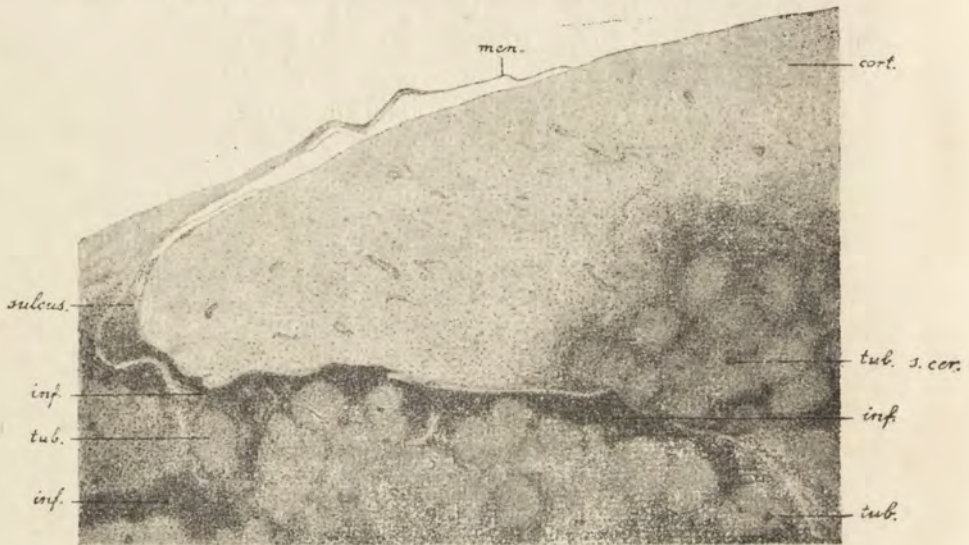


Fig. 4, *inf.* — nacieczenie; *tub.* — gruzełek; *tub. s. cer.* — gruzełek w istocie mózgowej.

Podkreślić należy fakt, że zmiany powyższe stwierdzono wyłącznie we wspomnianej okolicy przedśrodkowej lewej. Nawet w najbliższym sąsiedztwie tej okolicy, a mianowicie na 2 cent. powyżej i poniżej ogniska, stwierdzono przy powiększeniu imersyjnym nieznaczne tylko nacieczenie opon. W innych okolicach półkul zmian prawie nie spostrzegano, tylko tu i owdzie zauważono słabe ślady stanu zapalnego opon. Pień mózgowy wraz z mózdzkiem, okolica skrzyżowania nerwów wzrokowych były zupełnie wolne od zmian jakichkolwiek.

Przypadek ten wykazuje więc naocznie, że sprawa gruźlicza w mózgu może pozostać ściśle zlokalizowaną w pewnym ograniczonym miejscu. Jest to fakt pierwszorzędnej wagi. Na nim też dłużej się zatrzymamy.

Okazuje się, że sprawy zapalno-gruźlicze, zarówno ostra, podostra w oponach miękkich, jak i przewlekła w oponach twardych, mogą się ściśle ograniczać do pewnych tylko okolic mózgu. Wszystkie te przypadki odnieść należy do *meningitis tuberculosa circumscripta*, czyli do t. zw. *méningite tuberculeuse en plaques*.

Biorąc rzecz historycznie, dawno już zauważono, że sprawa gruźlicza w mózgu może być ściśle ograniczona (np. S e i t z w 1874). Nie wyodrębniano jednak tej postaci. Dopiero L a n d o u z y (1876), a za nim cały szereg innych badaczy odosobnili tę postać kliniczną (C h a n t e m e s s e, H i r s c h b e r g, C o m b e, R a y m o n d, O p p e n h e i m i in.). Liczba przypadków, dotąd ogłoszonych, wynosi, według naszego obliczenia 62, nie wszystkie jednak odpowiadają postulatowi głównemu, t. j. wyłącznej lokalizacji w pewnej tylko okolicy mózgu. Autorzy dotychczasowi nie wyodrębnili jednak owych 2 postaci, na które w pracy niniejszej zwracamy specjalną uwagę, t. j. zapalenia przewlekłego w oponach twardych i ostrego lub podostrego w oponach miękkich.

Zdaniem naszym, dwie te postaci różnią się od siebie zarówno przebiegiem klinicznym, jak i zmianami patologiczno-anatomicznymi. W *pachymeningitis tuberculosa circumscripta* opony twarde odpowiadają na podniety gruźlicze w ten sposób, że powstają w nich stany zapalne, zwykłe lub surowicze, podczas gdy zmiany swoiste są w nich słabo zaznaczone. Stopniowo rozwija się stwardnienie (nawarstwienie sklerotyczne błon opony twardej) i tylko tu i owdzie widać gruzelki stwardniałe ze zniekształconymi komórkami olbrzymimi. Opony wykazują słabą skłonność do przenikania włąb tkanki mózgowej, raczej uciskają korę mózgową, wywołując w niej zanik prosty.

Inaczej się rzecz przedstawia w *leptomeningitis tuberculosa circumscripta*. I tutaj sprawa bywa zogniskowana w oponach (miękkich), lecz wykazuje zmiany par excellence gruźlicze. Sprawa zagłębia się do tkanki mózgowej, wykazując w niej ten sam charakter swoisty i sprowadza głęboką destrukcję zarówno kory, jak i istoty białej.

Również i przebieg kliniczny jest rozmaity.

W *pachymeningitis tuberculosa circumscripta* występują zwykle na plan pierwszy objawy ogólne, jako to uporczywe bóle głowy, ból przy nachylaniu głowy, niekiedy wymioty, dreszczyki, nieznaczną gorączką. Czasami stwierdza się stan zapalny lub za-

stoinę tarcz wzrokowych. Bóle głowy trwają okresami, znikają i znowu się pojawiają. Płyn mózgowordzeniowy może wykazać ciśnienie wzmożone. Próba Nonne'go — Apelt'a może wypaść dodatnio, również jak i pleocytoza. Objawy ogniskowe (drgawki, porażenie jednostronne) występują zwykle w okresach późniejszych. W niektórych przypadkach sprawa może przycichnąć, lub się przerwać. Trepanacja czaszki daje wtedy wynik znakomity. Niekiedy do sprawy lokalnej przyłącza się ostry obrzęk lub rozmiękczenie dużej części mózgu, lub też powstaje podostre rozlane zapalenie opon, i wtedy następuje śmierć.

Inny przebieg kliniczny spostrzegać się daje w *leptomenigitis tuberculosa circumscripta*. Zaraz na początku wysuwają się na plan pierwszy objawy gruźlicze i drgawki jednostronne z utratą lub bez utraty przytomności, powtarzające się po pewnym czasie i pozostawiające wtedy po sobie pewne ślady w postaci osłabienia, lub porażenia kończyn. Czasami występują objawy zwiastunowe w postaci mrowienia lub drętwienia. W innych przypadkach drgawek niema, występuje natomiast osłabienie lub porażenie w w jednej kończynie lub połowicze. Prócz tego powstają zaburzenia mowy, niekiedy zaś — osłabienie czucia połowicze lub bezład. I tutaj widoczne są zwolnienia i nasilenia choroby. Sprawa jednak nie zatrzymuje się, lecz postępuje dalej: chorzy tracą przytomność, rozwija się zapaść, prowadząca do śmierci. Rzadko występuje wyzdrowienie (w przypadkach *Op pen he i m'a*, dotyczących dzieci). Objawy ogólne mogą towarzyszyć objawom ogniskowym, może ich jednak nie być, zwłaszcza na początku choroby. Później dopiero zjawiają się uporczywe bóle głowy, wymioty, sztywność karku, gorączka dosięga zwykle 37° — 38°. Dość często stwierdza się zapalenie lub obrzęk tarcz wzrokowych. Płyn mózgowordzeniowy może wykazywać dodatnią próbę Nonne'go-Apelt'a oraz pleocytozę. Niektórzy autorzy, jak np. Hirschberg, dzielą przypadki te na dwie kategorie, a mianowicie na te, w których na plan pierwszy występują objawy ruchowe, czuciowe, afazy, i na inne, w których górują drgawki. Raymond wprowadza znowu do klasyfikacji element rozprzestrzeniania się topograficznego objawów (postać wstępującą — *forme ascendante*, zstępującą *forme descendante* i promieniującą — *forme rayonnante*; w tej ostatniej pierwsze objawy powstają w kończynie górnej i stąd przechodzą z jednej strony na twarz, z drugiej zaś na nogę.

Bywają wreszcie przypadki, coprawda rzadkie, w których prawa nie umiejscawia się w półkulach mózgowych, lecz w mózgdzku (Nonne, Hauptmann).

Również rzadko mamy do czynienia z *hemispasmus faciei* (Troisier, Combe), ze szczękosciskiem (Boix), z ruchami, przypominającymi płasawicę (Boucarut).

Czas trwania choroby wynosi w *pachymeningitis tuberculosa circumscripta* rok lub kilka lat; w *leptomeningitis* — kilka dni, przeważnie jednak kilka tygodni lub miesięcy.

Zarówno *pachy-* jak i *leptomeningitis tuberculosa circumscripta* występują przeważnie u ludzi dorosłych. Z 62 zebranych przez nas przypadków, mogliśmy w 46 ustalić wiek chorych. Okazało się, jak to widać z tablicy, że cierpienie to występuje najczęściej między 21 a 30 rokiem życia.

| W i e k | Liczba przypadków |
|----------------|-------------------|
| od 1 do 5 roku | 6 |
| „ 6 — 10 „ | 2 |
| „ 11 — 15 „ | 4 |
| „ 16 — 20 „ | 3 |
| „ 21 — 25 „ | 9 |
| „ 26 — 30 „ | 10 |
| „ 31 — 35 „ | 5 |
| „ 36 — 40 „ | 1 |
| „ 41 — 45 „ | 2 |
| „ 46 — 50 „ | 1 |
| „ 51 — 55 „ | 2 |
| „ 66 — 70 „ | 1 |

Rozpoznanie ogniskowego zapalenia grążliczego opon (*pachy-leptomeningitis*) napotyka na znaczne trudności. Najtrudniej jest odróżnić je od guza mózgu. Za zapaleniem ogniskowym grążliczem przemawia usposobienie grążlicze osobnika, typ połowiczny objawów ogniskowych i ich charakter (drgawki lub zaburzenia ruchowe), przebieg cierpienia (zwolnienia i nasilenia, okresowość, przerwy i nawroty), brak ciężkich zaburzeń ogólnych (prostracyi i indolencyi, właściwej guzom), podskoki ciepłoty, dodatnia próba Pirquet'a, niekiedy objawy dodatnie w płynie mózgowo-rdzeniowym (próba Nonne'go-Apel'ta, pleocytoza). Oprócz tego pamiętać należy o przymocie mózgu (szczególniej o *meningitis gummosa fronto-parietalis*), o zapaleniu wybroczynowym opony twardej (zwykle u alkoholików lub starców), o ogniskowym zapaleniu surowiczem lub ropnem, wreszcie o dość rzadkich postaciach, przypominających paraliż postępowy i rozwijających się na tle grążlicy mózgu (Klippel, Cordes).

Anatomia patologiczna.

Ogniskowe zapalenie grążlicze (*pachy-et leptomeningitis*) usadawia się najczęściej w okolicy zawojów środkowych, przy- i przedśrodkowych; prócz tego w zrazach czołowych i znacznie rzadziej w sąsiadujących z nimi zawojach skroniowych i ciemieniowych. Zrazy potyliczne bywają zajęte wyjątkowo. Bardzo rzadko sprawę tę spostrzegano w mózdzku.

Niekiedy sprawa ogranicza się do nieznacznej tylko przetrzeni, np. wyłącznie do zawojów środkowych, lub do wyspy kreso-mózgowej, do jednej tylko bruzdy Sylwiusza i t. d. W innych przypadkach sprawa obejmuje dość znaczny obszar mózgu, a nawet napotyka się dwa ogniska, np. w zwoju środkowym i potylicznym, albo w F' i na wyspie Reil'a i t. d.

O zmianach histologicznych mówiono już wyżej.

III. Postacie przewlekłego rozlanego zapalenia grążliczego opon mózgowych (*meningitis tuberculosa diffusa chronica*).

Postacie te zdarzają się bardzo rzadko. Stwierdzili je sekcyjnie Busse, Czirer, Rössle, Orth, Strasmann i Simons-Merkel. Zwłaszcza prace Strasmanna i Simons'a-Merkel'a zawierają opis szczegółowy tych postaci. Przypadki

te są wielce podobne do opisanych powyżej postaci przewlekłego ogniskowego zapalenia gruczliczego opon mózgowych, z tą jednak różnicą, że w tych ostatnich sprawa bywa zlokalizowana w pewnej tylko okolicy mózgu. Oprócz tego, w *pachymeningitis tuberculosa circumscripta* sprawa dotyczy przeważnie opony twardej, podczas gdy w przewlekłej postaci rozlanej bywają również zajęte opony miękkie, i rozwija się w nich bądź sprawa ziarenkowata (Simons-Merkel), bądź występują zmiany włókniste z przymieszką nacieczenia świeżego (Strasmann), bądź też powstają zmiany wsteczne, serowate, a nawet wytwarza się guz serowaty (Busse, Czirer, Rössle).

Jest rzeczą zrozumiałą, że i tutaj powstać mogą postaci przejściowe, zarówno co do obszaru lokalizacyjnego, jak i co do form histopatologicznych.

Pragnęlibyśmy zwrócić jeszcze uwagę na sprawę dużego znaczenia, a mianowicie na możliwość odróżniania pod mikroskopem zmian gruczliczych w oponach mózgu od innych, do nich podobnych.

Właściwie jedynym, absolutnie pewnym probierzem jest wykrycie laseczników swoistych, lub też wynik szczepienia płynu mózgowordzeniowego na zwierzętach. Laseczników jednak nie udaje się często wykryć na skrawkach, albowiem mogą one być pochłonięte i usunięte ze zdrowych opon, jak tego dowiodły doświadczenia Renaud'a i Flatau-Tarapaniówny.

Pozostają więc gruzełki i komórki olbrzymie. Nie wdając się w szczegóły, to tylko powiedzieć można, iż twory te napotyka się zarówno w gruczlicy, jak i w przymiocie. Czem więc można się kierować w rozpoznawaniu sprawy gruczliczej lub przymiotowej?

Otóż wagę największą posiadają zmiany w innych okolicach mózgu, lub w innych narządach ciała. Prócz tego zwracać należy uwagę na wywiady i na przebieg kliniczny. Tylko całości kształt obrazu klinicznego i histopatologicznego może sprawę wyświecić.

Zachodzi jednak pytanie dalsze, ażali zmiany t. zw. swoiste, a więc gruzełki, komórki olbrzymie, zapalenie tętnicy zarostowe wyczerpują sprawę gruczliczą w oponach? Czy nie mogą przytem występować inne jeszcze zmiany?

Już na początku pracy tej zwrócono uwagę na przypadki słabego przemijającego podrażnienia lub zapalenia opon mózgowych na tle gruźlicy. W przypadkach tych rozwijają się zmiany naczyniowe lub zapalne, nie swoiste (surowicze, sklerotyczne). Oprócz tego powstać mogą w oponach na tle gruźlicy stany zapalne krwotokowe lub zwykłe (Raymond-Cestan, Alquier-Baudoin, Gangitano-Bombici). W r. 1909 Gougerot zwrócił uwagę szczególną na przypadki gruźlicy mózgu, w których powstać mogą stany zapalne w oponach i tkance mózgowej bez gruzełków, bez komórek olbrzymich, lecz tylko z lasecznikami (*encéphalite aigüe bacillaire non folliculaire*). W dwa lata później Eschbach i Baur potwierdzają wyniki badań Gougerot'a, utrzymują jednak, że nawet obecność laseczników nie jest niezbędną, aby stwierdzić pochodzenie tej sprawy zapalnej, bezgruzełkowej. Ta różnorodność zmian histopatologicznych, występujących w oponach pod wpływem gruźlicy, tłumaczy dostatecznie różnaitość obrazów klinicznych i przebiegu cierpienia.

Leczenie gruźlicy opon mózgowych dało, jak dotąd, rezultat smutny. Zajście postaci klasycznej (*meningitis tuberculosa basilaris*) bywa prawie zawsze śmiertelne. Znane są wprawdzie przypadki wyleczenia (Freyhan, Henkel, Barth, Riebold, Rumpel i in.), są to jednak przypadki wyjątkowe. Pomimo materiału obfitego, który nam przyniosła wojna, nie stwierdziliśmy dotąd ani jednego przypadku wyleczonego.

Przechodząc do tych postaci, które rozpatrzyliśmy w pracy niniejszej, sądzimy, iż o nich może być wydany sąd pomyślniejszy. W postaciach, odnoszących się do grupy I, rokowanie jest naogół pomyślne. Jeżeli zważyć, iż mamy tutaj do czynienia z reakcją nie swoistą, lecz zwykłą ze strony opon, to fakt ten stanie się zrozumiały. Co do leczenia, to w przypadkach odnośnych zalecać należy przede wszystkim wyjazd na wieś lub w góry, odżywianie forsowne, kąpiele słoneczne i środki chemiczne arsenikowe, fosforowe i inne. Spostrzegaliśmy wyleczenie nawet tam, gdzie już wystąpiły objawy zastoinowe ze strony tarcz wzrokowych. Na leczenie to zwrócił również uwagę Brudziński, który mówi, że gdyby w przypadkach odnośnych można było mieć wskazówki ostrzegające o grożącym niebezpieczeństwie, wtedy możeby się udało, przez ustrzeżenie dziecka od szkodliwości zewnętrznych, przez wzmocnienie organizmu ogólne, przez syste-

matyczne nakłucia lędźwiowe powstrzymać rozwój sprawy w oponach.

Co się tyczy leczenia ogniskowych zapaleń gruźliczych opon, to tutaj należy oddzielić sprawy przewlekłe od ostrych. W zasadzie jednak sądzić należy, że przypadki ogniskowe zapalenia gruźliczego opon mogą ulec przemianie wstecznej i zabiżnić się (Oppenheim, Landois i in.). Wskazują na to również badania patologiczno-anatomiczne, w których stwierdzono w kilka lat po chorobie wyleczone ogniska gruźlicze w mózgu (Bäumler). Tinel i Gastinel spostrzegali w przypadkach odnośnych zmiany dawniejsze w oponach w postaci sklerozy, torbieli pod oponą twardą, surowicze zapalenie opon z torbielą i gruzelki sklerotyczne.

Sądzymy, że lepsze wyniki otrzymać można w przypadkach przewlekłych, aniżeli w ostrych, a to z tej prostej przyczyny, że w pierwszych sprawa od początku ma raczej charakter zapalenia zwykłego z nieznaczną domieszką gruźliczej, podczas gdy w przypadkach ostrych charakter procesu jest wybitnie swoisty. Oprócz tego w przypadkach przewlekłych organizm zdołał uporać się ze sprawą, zogniskowaną w oponach, podczas gdy w przypadkach ostrych sprawa może stać się źródłem infekcji rozległej.

Cała więc rzecz polega na tem, aby przypadki odnośne właściwie rozpoznać, co bynajmniej nie należy do zadań łatwych. Tam, gdzie się to zdołało uczynić, zabieg leczniczy chirurgiczny dał wynik pomyślny. W r. 1900 Lunz opisał dwa przypadki gruźlicy ogniskowej mózgu, przyczem w jednym z nich sprawa była przewlekła (*meningitis tuberculosa chronica circumscripta*). Wynik operacji był pomyślny. Foerster (1911 r.) stosował zabieg operacyjny w 9-iu przypadkach *meningitidis tuberculosa circumscriptae*. Dwaj chorzy zmarli w związku z operacją (naskutek gruźlicy opon); w dwóch przypadkach znikły po zabiegu operacyjnym objawy ogólne, jednakowoż po upływie kilku miesięcy rozwinął się obraz zapalenia gruźliczego opon; chorzy zmarli. W 5-iu przypadkach nastąpiło zupełne wyleczenie, lub wybitne polepszenie, przyczem czas trwania obserwacji wynosił od $\frac{3}{4}$ do $2\frac{1}{2}$ lat.

Oprócz tego, jeden przypadek odnośny opisał Prince; w przypadku tym nastąpiło wyleczenie. Valkenburg stosował zabieg ten w dwóch przypadkach z wynikiem pomyślnym. Ostatnio opisał Hasselt przypadek *meningo-encephalitis tu-*

berculosae circumscriptae u 4¹/₂-letniego dziecka, u którego zastował zabieg operacyjny. Początkowo nastąpiła poprawa, lecz po 3¹/₂ miesiącach powtórzyły się napady drgawek, ciepłota ciała podniosła się, w płynie mózgowo-rdzeniowym stwierdzono pleocytozę, i dziecko zmarło.

Jak widać z powyższej, dość skąpej jeszcze kazuistyki, leczenie ogniskowego zapalenia gruźliczego opon znajduje się dopiero w okresie początkowym. Sądzić należy, że do zabiegów operacyjnych nadają się szczególnie przypadki zapalenia przewlekłego opony twardej na tle gruźliczem, jakkolwiek jest możliwe, że i sprawy ostre, lub podostre w oponach miękkich, zogniskowane w pewnej tylko okolicy mózgu, mogą być leczone chirurgicznie. W każdym bądź razie nie należy uważać spraw gruźliczych, rozwijających się w oponach mózgowych, za absolutnie nieuleczalne. Samo leczenie tych spraw spoczywać winno na tych samych podstawach, co i leczenie gruźlicy innych narządów.

RÉSUMÉ.

E. Flatau et N. Zylberlast:

La réaction des méninges contre la tuberculose.

Travail du Laboratoire de Neurobiologie de la Société des Sciences de Varsovie.

Communication annoncée le 20. IV. 1917.

Les méninges sont beaucoup plus souvent irritées par la lésion tuberculeuse de différents organes de l'organisme que nous ne le croyons d'ordinaire. Les formes classiques de la tuberculose cérébrale (méningite tuberculeuse de la base du cerveau, tubercule solitaire) n'épuisent point la liste des affections cérébrales tuberculeuses.

En général, le cerveau réagit contre la lésion tuberculeuse par un état inflammatoire. Les bacilles tuberculeux ou leurs toxines provoquent un état d'irritation des méninges, auquel suit l'état d'inflammation. Ce dernier peut ne pas être spécifique et

alors il guérit (l'état connu sous le nom de méningisme; méningite séreuse). Dans d'autres cas, quoique l'état inflammatoire guérit, les traces qu'il a laissées — persistent et, en se répétant, créent une induration des méninges (méningite chronique d'origine tuberculeuse), sans ou avec peu de traits caractéristiques pour la tuberculose.

Il peut aussi arriver que la lésion tuberculeuse des méninges se localise exclusivement dans certaines régions (surtout sur la convexité des hémisphères, autour des circonvolutions centrales frontales ou temporales) sans toucher d'autres (méningite tuberculeuse circonscrite, méningite tuberculeuse en plaques).

Les tableaux cliniques correspondants sont naturellement bien différents.

Là où les bacilles ou leurs toxines ne provoquent qu'une irritation passagère des méninges, nous verrons apparaître des maux de tête avec apathie et asthénie générale; quelquefois aussi douleurs de la nuque, lorsque le malade baisse la tête; des petits frissons et des élévations de la température.

Dans les cas plus accentués (la méningite séreuse) on peut quelquefois constater un symptôme objectif, précisément l'oedème de la papille oculaire. Même cet état peut guérir.

Lorsqu'il se répète souvent, nous voyons apparaître le tableau clinique suivant: des accès des maux de tête avec frissons, élévation de la température et même des convulsions ou des paralysies qui peuvent durer pendant des années. Cet état peut se transformer en une méningite tuberculeuse classique.

Ci-dessous nous désignons la classification des formes rares de la tuberculose des méninges.

I. Irritation ou inflammation des méninges passagère et faible, connue sous le nom de méningisme ou de méningite séreuse de nature tuberculeuse.

II. Méningite tuberculeuse circonscrite, méningite tuberculeuse en plaques:

a) lésion tuberculeuse en foyer de la dure-mère à marche chronique (pachyméningite tuberculeuse circonscrite) et

b) lésion tuberculeuse en foyer des méninges molles à marche aiguë ou subaiguë (leptoméningite tuberculeuse circonscrite).

III. Méningite tuberculeuse diffuse chronique.

I. L'irritation ou l'inflammation des méninges passagère et faible, connue sous le nom de méningisme ou méningite séreuse de nature tuberculeuse.

Les tableaux cliniques correspondants sont souvent peu accentués. Les symptômes morbides apparaissent chez les individus tuberculeux, par excellence chez les poitrinaires. On constate des maux de tête de la région frontale, temporale ou pariétale, accompagnés des frissons, de petites élévations de la température, de la douleur de la nuque ou d'une maladresse pendant le mouvement d'abaissement de la tête. Les cas bien avancés peuvent présenter l'oedème de la papille oculaire. Tous ces symptômes sont dûs à l'invasion des bacilles tuberculeux ou de leurs toxines dans le cerveau; la tolérance des méninges saines est pourtant grande; ces microbes ou ces substances sont éliminés ou rendus non nuisibles.

Cette conception est basée sur les données théoriques émises par Renaud et par Flatau et Mlle Tarapani dans leurs travaux expérimentaux. Renaud a démontré qu'un nombre considérable de bacilles, introduits dans le cerveau, en est éliminé bien vite. Flatau et Tarapani ont injecté dans le canal rachidien (à l'aide d'une ponction lombaire) des chiens et des singes du pus, pris de la glande péribronchique du cobaye rendu tuberculeux, de même que les cultures pures des bacilles tuberculeux, reçues par l'amabilité du Dr. Karwacki. L'examen du liquide céphalo-rachidien exécuté les jours suivants, ne décelait point de bacilles, la pléocytose pourtant fut énorme. D'autres expériences de Flatau et Tarapani démontrent d'autre part

a sensibilité bien prononcée des méninges: il suffit d'introduire dans le canal rachidien de la solution physiologique pour obtenir une pléocytose considérable.

Ces expériences prouvent que les méninges d'un côté sont très sensibles à toute irritation, d'autre — peuvent tolérer les bacilles tuberculeux.

Cela nous explique la bénignité des cas des méningismes ou des méningites séreuses. Le même avis émettent Tinel et Gastinel qui croient que le bacille de Koch peut provoquer une méningite faible, passagère ou fruste. De même Brudziński considère ces états méningés comme une réaction bien sensible contre une lésion tuberculeuse des glandes péribronchiques.

II. Méningite tuberculeuse circonscrite, méningite tuberculeuse en plaques.

a) lésion tuberculeuse en foyer de la dure-mère à marche chronique (pachyméningite tuberculeuse circonscrite).

Le trait le plus caractéristique de cette forme est une localisation de la lésion tuberculeuse dans une région quelconque de la dure-mère. La marche est d'ordinaire chronique. Les symptômes morbides sont les mêmes que dans la forme précédente. La marche clinique n'a pas une tendance d'aboutir à une guérison rapide, au contraire, elle dure des mois et des années, avec des rémissions. Ces dernières peuvent durer assez longtemps, même quelques mois.

Quelquefois la lésion ne donne que des symptômes généraux, dans d'autres cas — des symptômes en foyer s'y ajoutent, différents suivant la localisation des lésions.

L'observation personnelle ci-dessous jointe donne l'exemple de cette forme d'affection méningée de nature tuberculeuse¹⁾.

Il s'agissait dans ce cas d'un individu tuberculeux jeune chez lequel ont apparu des maux de tête pénibles et persistants

¹⁾ La description détaillée apparaîtra dans le II volume des travaux du laboratoire neurobiolog. de la soc. scient. de Varsovie.

pendant des semaines et des mois. Tantôt ils faiblissent, tantôt augmentent. De temps en temps ils s'accompagnent de vomissements. Au début de la maladie on a constaté des symptômes visuels (obscurcissement de la vue) et l'oedème des papilles oculaires. La température fut alors normale.

Après une rémission, au cours de laquelle les maux de tête ont disparu et les papilles ne démontraient qu'une rougeur trop intense, la maladie récidive. L'oedème des papilles réapparaît, la température monte, la disposition d'âme de la malade change profondément: elle devient apathique, indifférente. Le liquide céphalo-rachidien en ce moment présente une forte pression et une quantité pathologique d'albumine, sans pléocytose pourtant.

Une nouvelle rémission a lieu. Elle dure plusieurs semaines, mais les maux de tête se répètent ensuite, les convulsions générales s'y ajoutent avec la perte de connaissance et l'écume à la bouche. Enfin apparaît un état grave avec obnubilation et somnolence. La température est élevée (37° 6), le pouls faible et lent. Outre cela il y a l'exophtalmie et l'oedème papillaire. La malade meurt bientôt.

Toute la maladie n'a duré qu'une année.

L'examen du cerveau a démontré un fort épaissement des méninges (jusqu'à 6—7 mm. d'épaisseur) (fig. 1) surtout de la dure-mère dans la région frontale, temporale et centrale de deux hémisphères. Les méninges présentaient des lésions anciennes scléreuses avec une infiltration cellulaire de nouvelle date par places. La surface interne de la dure-mère et plus précisément l'arachnoïde était siégée de vieux tubercules, durs avec des cellules géantes déformées solitaires (fig. 2). L'écorce cérébrale présentait une atrophie simple; par places on pouvait constater la nécrose du tissu nerveux et une faible infiltration cellulaire. Les vaisseaux sanguins étaient peu lésés; on ne pouvait pas déceler des bacilles. La région pariétale, l'occipitale, tout le mésencéphale avec le cervelet ne présentaient aucune lésion.

Le tableau clinique de ce cas, mis en parallèle avec les dom-

nées anatomopathologiques, nous permet d'interpréter les rémissions et les récidives de la maladie dépendant de nouvelles lésions dans le cerveau.

Il y a lieu à supposer que chez cette malade poitrinaire les bacilles tuberculeux (ou leurs toxines) ont envahi au début de l'affection cérébrale les méninges. Ils se sont localisés dans la région frontale de deux hémisphères. Par suite de cette invasion apparaît une irritation des méninges ou un état d'une faible inflammation séreuse. Cet état a disparu bientôt, mais il a laissé des traces dans des régions correspondantes des méninges.

Ces endroits ont été prédestinés pour les lieux de *la moindre résistance*. Au cours des récidives et réchutes l'invasion des bacilles (ou de leurs toxines) dans le cerveau se répète. Ils trouvent déjà les méninges moins résistantes et sur le fond ancien se forme une nouvelle lésion. Pendant quelques rémissions et quelques réchutes la lésion méningée tantôt semblait guérir et disparaître, tantôt se renouvelait avec force. Enfin de compte il est resté un épaissement des méninges considérable, atteignant par places 6—7 mm. La nature de ces lésions fut surtout chronique, la sclérose des tissus dominait dans le tableau. Le microscope décela encore une infiltration cellulaire de date nouvelle. Là où méninges pénétraient dans les sillons ou les vaisseaux infiltrés — dans le tissu nerveux, on pouvait constater dans celui-ci des lésions semblables, c. à d. la sclérose, la nécrose et l'infiltration. Là où la lésion ne touchait que les méninges et y provoquait un fort épaissement, il se manifestait à cause d'une compression — simple atrophie de l'écorce cérébrale. Cette atrophie dominait dans le tableau microscopique des lésions du tissu nerveux.

La nature tuberculeuse dans ce cas est incontestable, vu l'affection pulmonaire, la présence des tubercules et des cellules géantes dans les méninges.

La marche clinique au début simulait celle, que nous voyons dans une autre forme d'affection (premier groupe des symptômes

passagers); la différence existe et consiste en ce que la maladie ne guérit pas, mais donna une récédive au bout de 4 mois, et, après quelque amélioration, mena à la mort.

b) Lésion tuberculeuse en foyer des méninges molles à marche aiguë ou subaiguë (leptomeningitis tuberculosa circumscripta).

Cette forme aussi a pour trait caractéristique la localisation de la lésion tuberculeuse dans une région quelconque bien limitée. La marche clinique est d'ordinaire aiguë ou subaiguë. L'affection frappe les individus tuberculeux; subitement ils commencent à présenter des symptômes nerveux qui, dès le début, ont le caractère des *symptômes en foyers*; et précisément apparaissent les convulsions Jacksonniennes, les hémiplésies ou les monoplésies. Ces symptômes peuvent disparaître sans laisser des traces. En d'autres cas les membres frappés restent faibles et peu à peu peuvent devenir paralysés.

Les symptômes en foyers peuvent s'accompagner des symptômes généraux (des maux de tête persistants, des vomissements, la fièvre, le pouls irrégulier, la raideur de la nuque). Parfois constate-t-on l'oedème des papilles. L'état, en s'aggravant, mène à la mort.

L'observation ci-dessous donnera une illustration¹⁾.

Le cas concerne une jeune personne tuberculeuse (poitrine?) L'affection récente a débuté par des affaiblissements passagers de la main droite. Ces accès ne s'accompagnaient pas de maux de tête. Ce n'est qu'après quelques mois que la température de la malade monta; en même temps elle a eu des céphalées et des vomissements. La main droite devenait de plus en plus faible, la parole fut souvent troublée. On pouvait constater alors la parésie de la moitié droite de la face. La réaction de Pirquet fut fortement positive, celle de Wassermann — négative. Le liquide céphalo-rachidien présentait une faible réaction de Nonne-Apelz, sans pléocytose.

¹⁾ La description détaillée paraîtra dans le II vol. des travaux du laboratoire neurobiologique.

En se basant sur ces symptômes, sur la marche et sur l'étiologie, on posa le diagnostic d'une lésion tuberculeuse limitée dans l'hémisphère gauche, dans la région des circonvolutions centrales correspondantes.

L'examen microscopique (fig. 3) démontra l'existence d'un foyer pathologique sous forme d'une masse blanche jaunâtre placée dans la circonvolution précentrale gauche, une masse bien délimitée, rappelant par sa forme une carte géographique. La lésion fut visible à la surface du cerveau, mais elle pénétrait profondément dans le tissu nerveux.

L'examen microscopique démontra un tableau bien caractéristique d'une *méningo-encéphalite tuberculeuse*. Les méninges surtout dans les sillons étaient fortement infiltrées, parsemées des tubercules avec des cellules géantes (fig. 4), par places le tissu nerveux fut nécrosé et scléreux. La lésion pénétrait dans la profondeur du tissu nerveux, en y provoquant une inflammation avec des tubercules et le ramollissement.

Il faut appuyer sur le fait que la lésion pareille fut trouvée *seulement dans la région mentionnée praecentrale gauche*. Le tissu avoisinant, situé 2 ctm. au-dessus et au-dessous de ce foyer ne présentait qu'une faible infiltration (examen microscopique à l'aide d'une immersion). D'autres régions cérébrales ne présentaient presque pas de lésions, les méninges furent infiltrées faiblement de place en place. Le mésencéphale avec le cervelet, le chiasma optique étaient absolument intacts.

Ce cas nous démontre, par conséquent, que la lésion tuberculeuse du cerveau peut rester délimitée dans une région quelconque. C'est un fait important qui mérite d'attirer notre attention plus particulièrement. Il paraît que les lésions tuberculeuses aiguës et subaiguës des méninges molles, de même que les chroniques de la dure-mère peuvent se localiser dans des régions bien limitées du cerveau. Tous ces cas appartiennent à la catégorie des *méningites tuberculeuses circonscrites*, ou des *méningites tuberculeuses nommées en plaques*.

L'aperçu historique nous apprend qu'il y a longtemps qu'on constata que la lésion tuberculeuse peut être bien délimitée dans le cerveau (p. e. Seitz 1874). Cette forme pourtant ne fut pas éliminée. Ce n'est que Landouzy (1876), et puis après lui un grand nombre de médecins (Chantemesse, Hirschberg, Combe, Raymond, Oppenheim et autres) ont décrit cette forme clinique. Le nombre total de cas publiés jusqu'ici est 26 d'après notre compte, mais parmi eux il y a des cas qui ne répondent pas à l'exigence principale, c. à d., que la lésion soit localisée uniquement dans une région du cerveau. Les auteurs précités n'ont pas éliminé ces deux formes cliniques, que nous tâchons de souligner dans ce travail, et précisément la lésion tuberculeuse chronique de la dure-mère et la lésion aigüe ou subaigüe des méninges molles.

D'après nous, ces deux formes diffèrent par leur marche clinique, de même que par leur aspect anatomo-pathologique. La *pachyméningite tuberculeuse circonscrite* consiste en ce que la dure-mère réagit contre l'irritation tuberculeuse par une inflammation simple séreuse, la lésion spécifique n'étant que très faible. Peu à peu il se forme une induration (accumulation des couches scléreuses) avec des rares tubercules et des cellules géantes déformées. Les méninges n'ont pas une tendance de pénétrer dans le tissu nerveux, elles compriment plutôt l'écorce cérébrale, en y provoquant l'atrophie simple.

La *leptoméningite tuberculeuse circonscrite* présente des rapports tout différents. La lésion y est également localisée dans les méninges (molles), mais elle réalise un caractère par excellence tuberculeux. La lésion pénètre dans le tissu nerveux, y donne des modifications tuberculeuses et provoque une destruction profonde de l'écorce cérébrale de même que de la substance blanche.

La marche clinique est aussi différente:

la *pachyméningite tuberculeuse circonscrite* s'accompagne d'ordinaire des symptômes généraux qui occupent la première place (des céphalées, la douleur de la nuque lorsqu'on baisse la

tête, quelquefois des vomissements, des frissons, la fièvre). Parfois peut on constater l'oedème papillaire ou la neurite oculaire. Les céphalées viennent par crises, disparaissent et reparaissent de nouveau. Le liquide céphalo-rachidien peut présenter une forte pression. La réaction de Nonne-Apelt peut être positive, de même que la pléocytose. Les symptômes en foyers (les convulsions, les hémiplegies) n'apparaissent que tardivement. Quelquefois la maladie peut rester stationnaire ou disparaître. C'est alors que la trépanation donne de bons résultats. Parfois la lésion en foyer se complique par l'oedème général du cerveau ou par le ramollissement d'une grande partie, ou enfin par la méningite diffuse et alors le cas finit par le mort.

La marche clinique de la *leptoméningite tuberculeuse circonscrite est différente*. Dès le début les symptômes en foyers prennent la place principale: les convulsions unilatérales, sans ou avec perte de connaissance, qui se répètent de temps en temps et laissent une trace sous forme d'affaiblissement ou de paralysie du membre. Quelquefois on note des prodromes sous forme de fourmillements ou d'engourdissement. Dans d'autres cas il n'y a pas de convulsions, mais seulement l'affaiblissement ou la paralysie d'un membre ou d'une moitié du corps. Le trouble de la parole, l'hypésthésie et l'ataxie d'une moitié du corps peuvent aussi avoir lieu. La maladie présente des rémissions et des aggravations, mais elle ne reste pas stationnaire, évolue toujours, les malades perdent leur conscience, apparaît l'état comateux qui mène à la mort. Les cas guéris sont bien rares (celui d'Oppenheim concernant un enfant). Les symptômes généraux peuvent s'associer aux symptômes en foyers, mais ils peuvent manquer aussi, surtout au début de la maladie. Ce n'est que tardivement qu'apparaissent les céphalées, la raideur de la nuque, la fièvre (37°—38); assez souvent voit on l'oedème des papilles ou la neurite oculaire. Le liquide céphalo-rachidien peut présenter la réaction de Nonne-Apelt et la pléocytose.

Certains auteurs, comme p. e. Hirschberg, divisent ces

cas en deux catégories: une, où dominent les symptômes moteurs, sensitifs, aphasie, et une autre avec prédominance des convulsions. Raymond introduit dans sa classification un autre élément: la manière d'expansion de la lésion; il distingue la forme *ascendante*, la forme *descendante* et la forme *rayonnante*; dans cette dernière la maladie débute par l'affection du membre supérieur, puis se répand sur la face d'une part et sur le membre inférieur d'autre part.

Il existe enfin des cas bien rares, où la lésion ne se localise pas dans les hémisphères cérébraux, mais dans le cervelet (Nonne, Hauptmann).

Il arrive rarement *l'hémispasme facial* (Troisier, Combe), le trismus (Boix), les mouvements choréiformes (Boucarut).

La durée de la *pachyméningite tuberculeuse circonscrite* est d'une ou de plusieurs années; celle de la *leptoméningite* — quelques jours, ou quelques semaines, ou mois.

La *pachyméningite*, de même que la *leptoméningite tuberculeuse circonscrite* frappent surtout les adultes. Parmi 62 cas réunis par nous, nous pouvions déterminer l'âge de 46. Il suit de la table ci-jointe, que l'affection est la plus fréquente entre 21—30 ans.

| Age | Nombre de cas |
|------------|---------------|
| de 1—5 ans | 6 |
| 6—10 | 2 |
| 11—15 | 4 |
| 16—20 | 3 |
| 21—25 | 9 |
| 26—30 | 10 |
| 31—35 | 5 |
| 36—40 | 1 |
| 41—45 | 2 |
| 46—50 | 1 |
| 51—55 | 2 |
| 66—70 | 1 |

Le *diagnostic* de la pachy—leptoméningite est bien difficile. Il est surtout possible de la confondre avec la tumeur cérébrale. Les symptômes, parlant en faveur d'une méningite en foyers sont: la constitution tuberculeuse de l'individu, le *type hémiplégique* des symptômes en foyers et leur caractère (les convulsions ou les troubles moteurs), la marche de l'affection (les rémissions et les aggravations, l'apparition des symptômes par accès), l'absence des symptômes généraux bien graves (la prostration et l'indolence propre aux tumeurs cérébrales), la fièvre, la réaction de Pirquet positive, parfois les phénomènes pathologiques du côté du liquide céphalo-rachidien (la réaction de Nonne-Apelz, la pléocytose). Il faut prendre en considération la syphilis cérébrale (surtout la méningite gommeuse fronto-pariétale), la pachyméningite hémorragique (chez les alcooliques et les vieillards), la méningite séreuse ou purulente enkystée et les rares formes simulant la paralysie progressive et se développant sur la base de la tuberculose cérébrale (Klippel, Cordes).

Anatomie pathologique.

La *pachy-leptoméningite tuberculeuse* siège surtout dans la région *centrale, péri- et précentrale*; aussi bien dans les circonvolutions frontales et beaucoup plus rarement dans les circonvolutions voisines: temporales et pariétales. La région occipitale est frappée tout exceptionnellement. Rarement voyait on cette lésion localisée au cervelet. Quelquefois la lésion se limite sur une petite étendue, p. ex. elle siège uniquement dans les circonvolutions centrales, ou à l'insula, ou dans le sillon de Sylvius etc. Dans d'autres cas elle se répand sur une grande étendue, où l'on voit deux foyers, l'un p. ex. dans les circonvolutions centrales, l'autre — dans l'occipitale, ou dans la frontale et dans l'insula etc.

Les modifications histologiques étaient considérées ci devant.

III. Méningite tuberculeuse diffuse chronique.

Ces formes sont bien rares. On les a constatées à l'aide d'un examen post-mortel (Busse, Czirer, Rössle, Orth, Strasmann, Simons-Merkel). Les travaux de Simons-Merkel contiennent une description détaillée. Ces cas ont beaucoup de ressemblance avec la forme chronique de méningite tuberculeuse en foyers ci-dessus décrite, mais la différence consiste en ce que dans la dernière forme la lésion est localisée. A côté de cela dans la *pachyméningite tuberculeuse circonscrite* la lésion frappe surtout la dure-mère, tandis que dans la *méningite diffuse* les leptoméninges sont aussi lésés et présentent des granulations (Simons-Merkel) ou des couches fibreuses avec infiltration (Strasmann), ou enfin dégénèrent en masses caséuses (Busse, Czirer, Rössle).

Il est facile à comprendre que des formes transitoires peuvent apparaître aussi bien au point de vue de la localisation, que de la structure histopathologique.

Il faut attirer l'attention sur un point assez important et précisément, comment peut on distinguer à l'aide du microscope la lésion tuberculeuse des méninges des lésions d'autre nature? Une sûreté absolue peut être obtenue uniquement par la présence du bacille de Koch ou par inoculation du liquide céphalo-rachidien aux animaux. Or, les bacilles sont souvent impossibles à déceler parcequ'ils peuvent-êtreéliminés par les méninges saines, fait prouvé par les expériences de Renaud et de Flatau-Tarapani.

Il ne reste, pas conséquent, que les tubercules et les cellules géantes. Sans discuter cette question plus particulièrement, il faut dire que les mêmes formations peuvent se trouver dans la syphilis. Comment donc distinguer la lésion tuberculeuse de la syphilitique? Un rôle important jouent ici les lésions d'autres régions cérébrales ou d'autres organes. A part cela, il faut tenir compte de tout le tableau clinique. Ce n'est que *l'ensemble de*

symptômes cliniques et les lésions histopathologiques qui peut dissoudre la question.

Une autre question se pose: la lésion spécifique consistante en tubercules, cellules géantes, endartérite oblitérante, est-elle unique dans l'affection tuberculeuse des méninges? D'autres lésions de nature tuberculeuse ne peuvent-elles avoir lieu? Au début de ce travail nous avons attiré l'attention vers l'irritation faible et passagère des méninges et leur inflammation séreuse de nature tuberculeuse. Dans ces cas on voit apparaître des lésions vasculaires ou inflammatoires non spécifiques (séreuses ou scléreuses). Il peut aussi arriver que les méninges conservent des traces d'inflammation hémorragique ou simple (Raymond-Cestan, Alquier-Baudoin, Gangitano-Bombici) après une affection tuberculeuse. En 1909 Gougerot a attiré attention sur le fait qu'il existe des cas de la tuberculose cérébrale, où l'inflammation des méninges ou du tissu nerveux peut avoir lieu sans tubercules, sans cellules géantes, uniquement avec des bacilles (encéphalite aigüe bacillaire non folliculaire). Deux ans plus tard Eschbach et Baur confirment cette observation de Gougerot; ils vont plus loin et pensent que les bacilles ne sont pas nécessaires pour soutenir que la lésion soit tuberculeuse. Cette diversité des tableaux histopathologiques, sous influence d'un même facteur tuberculeux, nous renseigne suffisamment sur la diversité des tableaux cliniques et des marches cliniques.

Le *traitement* des méningites tuberculeuses fut jusqu'ici bien défavorable. La méningite tuberculeuse classique basilaire est presque toujours mortelle. On cite, il est vrai, quelques cas guéris (Freyhan, Henkel, Barth, Riebold, Rumpel et autres), mais ce sont des exceptions. Malgré un nombre bien considérable de ces cas durant cette guerre nous ne pouvions constater pas un seul guéri.

Les formes des méningites tuberculeuses citées dans ces travaux sont plus bénignes. Dans les cas appartenant à la pre-

mière catégorie le pronostic est favorable. Vu la réaction des méninges non spécifique, la restitution n'est pas étonnante. Quant au traitement il faut dans ces cas conseiller le séjour à la campagne ou dans les montagnes, l'alimentation forcée, les bains de soleil et les médicaments arsénicaux, phosphoreux etc. Nous pouvions observer la guérison même dans un cas où il y avait l'oedème des papilles. Un tel traitement a eu en vue Brudzinski, lorsqu'il dit, que si l'on pouvait prévoir par quelques symptômes le danger d'une méningite tuberculeuse en développement, l'on pourrait prévenir la maladie en fortifiant l'organisme, en le mettant dans des conditions meilleures, en ponctionnant le canal rachidien d'une manière systématique.

Quant au traitement des méningites en foyer, il faut considérer séparément les formes chroniques et les aiguës. En général on doit dire que la méningite tuberculeuse en foyer peut rétrocéder et guérir (Oppenheim, Landois et autres). L'étude anatomo-pathologique prouve ce fait: on trouva quelques ans après la maladie un foyer tuberculeux guéri dans le cerveau. (Bäumler). Tinel et Gastinel constataient dans des cas correspondants des lésions anciennes dans les méninges sous forme de la sclérose, du kyste subdural, de la méningite séreuse avec un kyste et des tubercules scléreux.

Il y a lieu de croire que les résultats de traitement sont meilleurs dans des cas chroniques, que dans les aigus, et pour des raisons que dans les chroniques la lésion dès le début est non spécifique avec très peu d'éléments tuberculeux, tandis que dans les cas aigus — elle est franchement tuberculeuse. A côté de cela, dans les cas chroniques l'organisme a pu limiter la lésion, tandis que dans les aigus elle peut donner naissance à une infection généralisée des méninges.

Notre plus grand effort doit être celui de diagnostiquer les cas d'une manière juste, ce qui constitue une tâche assez difficile. Dans les cas réussis, l'intervention chirurgicale a donné un bon résultat. En 1900 Lunz a décrit deux cas de tuberculose

cérébrale en foyer, un chronique (méningite tuberculeuse chronique circonscrite). Le résultat de l'opération fut favorable. Foerster 1911 a opéré 9 cas de méningites tuberculeuses circonscrites. Deux ont mouru par suite de l'opération (à cause de la méningite tuberculeuse), dans deux — les symptômes généraux ont disparu après l'opération, mais quelques mois après le tableau clinique de méningite tuberculeuse pris place, et les malades moururent. Dans 5 cas a eu lieu une guérison complète ou une amélioration notable; les cas étaient observés pendant $\frac{3}{4}$ — $2\frac{1}{2}$ ans.

Un cas encore avec guérison fut décrit par Prince.

Valkenburg a pratiqué l'intervention chirurgicale dans deux cas avec un bon résultat. Dernièrement Hasselt a décrit un cas de méningo-encéphalite tuberculeuse circonscrite, opéré chez un enfant de 4 ans $\frac{1}{2}$. Après l'opération on constata une amélioration, mais 3 mois $\frac{1}{2}$ plus tard les convulsions ont réapparu, la température monta, le liquide céphalo-rachidien présenta une pléocytose et la mort frappa l'enfant.

Les cas précités, assez rares encore, nous enseignent que le traitement de méningites tuberculeuses se trouve dans sa période préliminaire. Il faut croire que l'intervention chirurgicale est surtout appropriée dans les cas de pachyméningite tuberculeuse chronique, quoique les leptoméningites aiguës et subaiguës circonscrites ne sont pas exclues du domaine chirurgical.

En général, *il ne faut pas considérer les méningites tuberculeuses comme absolument inguérissables. Leur traitement doit se baser sur les mêmes principes que le traitement de la tuberculose des autres organes.*

4. Witold Pogorzelski:

Z teorii ruchów poziomych w atmosferze.

Komunikat zgłoszony dn. 27 Kwietnia 1917 r.

Przedstawił Wł. Górczyński.

I. Pojęcia wstępne.

Zadaniem naszym będzie odnalezienie pola wektorowego prędkości poziomych cząsteczek powietrza w dowolnej chwili, jak również i rozkład dwóch skalarów, mianowicie ciśnienia i temperatury na danym obszarze, jeśli znany jest rozkład początkowy wektora prędkości \bar{v} , ciśnienia i temperatury. Metoda rozwiązania tego zagadnienia, podobnie jak niektóre uproszczenia, będą analogiczne do metod, przedstawionych w komunikacie p. t. „O teorii prądów prostoliniowych w atmosferze“¹⁾. Zagadnienie traktujemy z punktu widzenia bardziej ogólnego, uwzględniamy mianowicie wpływ siły odchyłającej Coriolis'a, jak również wpływ tarcia, które będziemy uważali jako proporcjonalne względem prędkości.

W komunikacie tym ograniczymy się narazie do przypadku izobar i izoterm prostoliniowych i równoległych, tak, iż będziemy mieli do czynienia jedynie z dwiema zmiennymi niezależnymi — odcięta miejscowości i czasem. Hypoteza taka może być zresztą przyjęta i w każdym innym przypadku, jeśli ograniczymy się do stosunkowo niewielkiego obszaru i krótkiego przedziału czasu (np. kilkunastu minut).

Niech $\bar{\omega}$ oznacza wektor — prędkość kątową ziemi, wtedy siła Coriolis'a, której wpływ jest zasadniczy z powodu braku

¹⁾ „Sprawozdania z posiedzeń Tow. Naukowego Warsz.“, rok 1917, Kwiecień.

współzawodnictwa, ma bezwzględną wartość $2 V \bar{\omega} \bar{v}$, V jest symbolem iloczynu wektorowego, zaś \bar{v} — wektorem - prędkością cząsteczki powietrza; siła Coriolis'a jest więc zawsze prostopadła do istniejącej prędkości i jest do niej proporcjonalna. Tarcie wyrazi się jako siła kształtu $\kappa \bar{v}$ (κ jest drobnym współczynnikiem rzędu $0,0001 \text{ sec}^{-1}$).

Ruchy w atmosferze winny więc czynić zadość następującemu równaniu wektorowemu:

$$(1) \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \text{ grad}) \bar{v} = \bar{g} - \kappa \bar{v} + 2 V \bar{\omega} \bar{v} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$$

i równaniu „ciągłości“

$$(2) \quad \dots \dots \dots \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{v}) = 0.$$

ρ — oznacza masę właściwą powietrza w danym punkcie.

Niech będą współrzędne prostokątne z płaszczyzną (x, y) poziomą (kierunek obrotu x, y zgodny z kierunkiem obrotu wskazówki zegara), a osią OZ — pionową i zwróconą ku górze.

Ponieważ siła Coriolis'a ma za miarę podwojoną prędkość (wziętą w kierunku przeciwnym) końca wektora \bar{v} w ruchu dokoła $\bar{\omega}$, zatem składowe siły Coriolis'a będą:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{składowa wzdłuż } OX = 2 (\omega_y \omega - \omega_z v), \\ \text{„ „ } OY = 2 (\omega_z u - \omega_x \omega), \\ \text{„ „ } OZ = 2 (\omega_x v - \omega_y u). \end{array} \right.$$

u, v, ω — składowe prędkości \bar{v} .

Oznaczmy przez φ — szerokość geograficzną danej miejscowości, zaś przez ψ — kąt, który tworzy prosta OX z linią południka; będziemy mieli

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega \cos \varphi \cdot \cos \psi, \\ \omega_y = \omega \cos \varphi \cdot \sin \psi, \\ \omega_z = \omega \sin \varphi. \end{array} \right.$$

Równania ruchu (1) napiszemy więc w kształcie następującym:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \\ &= 2 \omega (\cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot w - \sin \varphi \cdot v) - \kappa u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \\ &= 2 \omega (\sin \varphi \cdot u - \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot w) - \kappa v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \\ &= 2 \omega (\cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot w - \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot u) - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Do rozwiązania zagadnienia potrzebne nam będzie jeszcze jedno równanie różniczkowe, które można otrzymać rozważając czynniki wpływające na energię elementu cieczy $dx \cdot dy \cdot dz$.

Uważając wpływ przewodnictwa za nieznaczący, dojdziemy ¹⁾ do równania:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \\ + \frac{p}{J c \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

J — równoważnik ciepła, c — ciepło właściwe powietrza w stałej objętości. W równaniu (6) nie uwzględniono wpływu tarcia wewnętrznego, gdyż wpływ ten dany jest przez wyrazy drugiego rzędu, a więc w komunikacie tym, gdzie chodzi o pierwsze przybliżenie, nie bierzemy go pod uwagę.

¹⁾ Patrz komunikat p. t.: „O teorii prądów prostoliniowych w atmosferze“.

II. Prądy krzywoliniowe poziome.

Prądy poziome w atmosferze ¹⁾ winny czynić zadość układowi równań

$$(7) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda v - \kappa u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda u - \kappa v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{p}{J c \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{array} \right.$$

mamy nadto znany związek

$$(8) \dots \dots \dots p = R \rho T.$$

Współczynnik λ , zależny od szerokości geograficznej, ma wartość

$$(9) \dots \dots \dots \lambda = 2 \omega \sin \varphi.$$

Rozwiązanie zagadnienia ruchów poziomych, t. j. wyznaczenie funkcji niewiadomych u , v , ρ , T z układu (7) jest teoretycznie możliwe (przy odpowiednich zastrzeżeniach), jeśli znany jest stan początkowy, znaczy funkcje

$$u^{(in)}(x, y), \quad v^{(in)}(x, y), \quad \rho^{(in)}(x, y), \quad T^{(in)}(x, y).$$

Weźmy przypadek prostszy — izobar i izoterm prostoliniowych i równoległych; zagadnienie upraszcza się wtedy zasadniczo, zadawałamy się bowiem dwiema zmiennymi niezależnymi x i t . Oś odciętych x winna iść w kierunku gradientu, zaś oś Oy , wzdłuż której będziemy rozważać składową v , w kierunku

¹⁾ Rozważania dotyczą więc dziedzin „zewnętrznych“ cyklonu, gdyż tam składowa pionowa prędkości równa się zeru.

prostopadłym — tak, aby kierunek obrotu (x, y) był odwrotny do kierunku obrotu ziemi.

Funkcye niewiadome

$$u(x, t), v(x, t), \rho(x, t), T(x, t)$$

należy zatem wyznaczyć z układu:

$$(10) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda v - \kappa u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda u - \kappa v \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{p}{Jc\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ p = R\rho T. \end{array} \right.$$

Naszym celem jest wyznaczenie funkcyj u, v, ρ, T z układu (10), dzięki pewnym upraszczającym założeniom.

Niech u_0, v_0, ρ_0, T_0 będą pewne stałe np. wielkości charakterystyczne dla $t = 0$ w początku współrzędnych.

Możemy zawsze założyć

$$(11) \dots \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 (1 + \nu) \\ v = v_0 (1 + \mu) \\ \rho = \rho_0 (1 + \sigma) \\ T = T_0 (1 + \tau). \end{array} \right.$$

Jeśli ograniczymy się do niewielkiego obszaru i drobnego przeciągu czasu, funkcje ν, μ, σ, τ , dwóch zmiennych x, t , będą dostatecznie małe, by można, po podstawieniu wartości (11) w układ (10), zaniedbać iloczyny tych funkcyj przez ich pochodne.

Dochodzimy w ten sposób do następującego układu liniowego:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{RT_0}{u_0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) + \\ \quad + \kappa v + \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu + \left(\kappa + \frac{\lambda v_0}{u_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\lambda u_0}{v_0} v + \kappa \mu + \left(\kappa - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{RT_0}{Jc} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

Układ ten upraszcza się znakomicie, jeżeli założymy

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = x - u_0 t \\ \beta_1 = t \\ \bar{\omega} = \sigma + \tau, \end{array} \right.$$

mamy mianowicie:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial \beta_1} + \frac{RT_0}{u_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \alpha_1} + \kappa v + \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu + \left(\kappa + \frac{\lambda v_0}{u_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta_1} - \frac{\lambda u_0}{v_0} v + \kappa \mu + \left(\kappa - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta_1} + \gamma u_0 \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \end{array} \right.$$

Aby wyrugować $\bar{\omega}$, różniczkujemy (14) względem β_1 resp. α_1 , wypada równanie drugiego rzędu:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta_1^2} - RT_0 \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + \kappa \frac{\partial v}{\partial \beta_1} + \\ \quad + \lambda^2 v = \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2. \end{array} \right.$$

Przy pomocy drugiego z równań (14), można wyrugować funkcję μ , co doprowadza do równania różniczkowego 3-go rzędu o pochodnych cząstkowych. Ze względu jednak na znaczne trudności, jakie nastęrcza rozwiązanie takiego równania (odpowiednio do wartości brzegowych), postąpimy w sposób odmienny.

Podstawmy mianowicie w równaniu różniczkowym (15) zamiast μ , jego wartość przybliżoną

$$\mu = \mu^{(in)}(x) + \left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{t=0} \cdot t,$$

która jest znana, gdyż

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{t=0}$$

można wyznaczyć z drugiego z równań (12). Podobne podstawienie bynajmniej nie zmniejsza dokładności rachunków, gdyż owa zmiana dotyczy wyrazu $\kappa\mu$, który i tak jest tylko przybliżonym wyrażeniem wpływu tarcia; upraszcza to niezmiernie rozumowanie, wskutek czego uważać by należało za nieodpowiednie postępowanie wskazane wyżej, doprowadzające do równania rzędu 3-go.

Przystąpimy więc do wyznaczenia funkcji v z równania (15), stosownie do poczynionej uwagi. Aby się pozbyć pochodnej $\frac{\partial v}{\partial \beta_1}$, zakładamy

$$(16) \dots \dots \dots v = v_1 \cdot e^{-\frac{\kappa}{2} \beta_1},$$

wskutek czego równanie (15) przybiera kształt:

$$(17) \dots \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta_1^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_1^2} + \left(\lambda^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) v_1 = e^{\frac{\kappa}{2} \beta_1} \left(\frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right).$$

Dla miejscowości strefy umiarkowanej, jak można sądzić z obserwacji, współczynnik $\kappa < 2 \lambda$, możemy założyć więc:

$$(18) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\lambda^2 - \kappa^2}{R T_0 \gamma}} \cdot \alpha_1 \\ \beta = \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2} \cdot \beta_1. \end{array} \right.$$

Otrzymujemy dzięki temu równanie prostsze

$$(19) \dots \dots \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - v_1 = \\ = -\frac{4}{4\lambda^2 - \kappa^2} e^{\frac{\kappa}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}} \beta} \left(\frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right).$$

Podstawiamy teraz wartość

$$\mu(\alpha, \beta) = \mu(\alpha, 0) + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} \cdot \beta,$$

t. j.

$$\mu(\alpha, \beta) = \mu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \cdot \alpha \right) + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} \cdot \beta.$$

Funkcja $\mu^{(in)}(x)$ jest znana, jeśli znany jest rozkład początkowy składowej $v^{(in)}(x)$. Wartość funkcji $\left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_0$ można wyznaczyć z drugiego z równań (14), wypada mianowicie:

$$(20) \dots \dots \left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_0 = \frac{2}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}} \left[\frac{\lambda u_0}{v_0} v^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \alpha \right) + \right. \\ \left. - \kappa \mu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \alpha \right) - \kappa + \frac{\lambda u_0}{v_0} \right].$$

Ostatecznie równanie (19) wypada w kształcie:

$$(21) \dots \dots \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - v_1 = e^{\varepsilon \beta} \left[p(\alpha) \beta + q(\alpha) \right],$$

założono tam

$$(22) \dots \dots \dots \varepsilon = \frac{\kappa}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}}.$$

Należy teraz pozbyć się wyrazu po stronie prawej; załóżmy w tym celu

$$(23). \dots \dots \dots \nu_1 = Z + \zeta.$$

ζ jest rozwiązaniem szczególnem równania (21). Widocz-
nem jest, iż ζ będzie kształtu:

$$(24) \dots \dots \dots \zeta = e^{\varepsilon\beta} [A(\alpha) \beta + B(\alpha)],$$

gdzie $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$ winny czynić zadość układowi równań:

$$(25) \dots \dots \dots \begin{cases} A''(\alpha) - (1 + \varepsilon^2) A(\alpha) = p(\alpha) \\ B''(\alpha) - (1 + \varepsilon^2) B(\alpha) = q(\alpha) + 2\varepsilon A(\alpha). \end{cases}$$

Stosując metodę waryacyjną stałych dowolnych, otrzyma-
my z (25):

$$2\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot A(\alpha) = e^{\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} \int e^{-\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} p(\alpha) d\alpha + \\ - e^{-\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} \int e^{\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} p(\alpha) d\alpha \dots \dots (26)$$

wystarczy teraz w tym wzorze podstawić $q(\alpha) + 2\varepsilon A(\alpha)$ za-
miast $p(\alpha)$, by otrzymać wartość na $B(\alpha)$.

Z (23) wynika, iż funkcja z winna czynić zadość równaniu
drugiego rzędu:

$$(27) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} - z = 0.$$

Równanie to rozwiążemy metodą Riemanna, podobnie
jak w komunikacie wyżej wzmiankowanym. Szukamy miiano-
wicie rozwiązania $z^{(adj)}(\alpha, \beta)$ równania dołączonego, danego ró-
wnania (27), które byłoby równe jedności dla punktów charakte-
rystyk równania (27); weźmy więc

$$(28) \dots \dots \dots z^{(adj)} = \Phi \left[\frac{(\beta - \beta_0)^2 - (\alpha - \alpha_0)^2}{4} \right].$$

Wypadnie ¹⁾, iż funkcja Φ będzie dana przez równanie liniowe typu Fuchs'a:

$$(29) \dots \theta \Phi''(\theta) + \Phi'(\theta) + \Phi(\theta) = 0,$$

zważywszy na warunek

$$\Phi(0) = 1,$$

otrzymamy dla Φ szereg, o promieniu zbieżności nieskończenie wielkim:

$$(30) \dots \Phi(\theta) = 1 - \frac{\theta}{1} + \frac{\theta^2}{(1.2)^2} - \frac{\theta^3}{(1.2.3)^2} + \dots$$

Niech $f(\alpha)$ będzie funkcją, jaką winno się stać $z(\alpha, \beta)$ dla $\beta = 0$, zaś $\psi(\alpha)$ — odpowiednią wartością pochodnej $\frac{\partial z}{\partial \beta}$ dla $\beta = 0$; rozwiązanie równania (27), odpowiednio do wartości brzegowych, wypadnie w kształcie:

$$(31) \dots z = \frac{1}{2} f(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} f(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi(\theta) \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{\beta}{4} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi'(\theta) f(\xi) d\xi.$$

gdzie

$$(32) \dots \theta = \frac{\beta^2 - (\xi - \alpha)^2}{4}.$$

Funkcje $\psi(\alpha)$ i $f(\alpha)$ można znaleźć, jeśli znany jest z obserwacji rozkład początkowy prędkości wiatru, ciśnienia i temperatury ²⁾. Otrzymujemy mianowicie

$$(33) \dots f(\alpha) = v_1^{(in)} - \zeta(\alpha, 0) = \\ = v^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \alpha^2}} \alpha \right) - B(\alpha).$$

¹⁾ Co do szczegółów, patrz: „O teorii prądów prostoliniowych...”

²⁾ W celu wyznaczenia funkcji $u^{(in)}(x)$, $v^{(in)}(x)$, $T^{(in)}(x)$, $p^{(in)}(x)$ można stosować np. metodę interpolacji parabolicznej.

Mamy następnie

$$\psi(\alpha) = \left. \frac{\partial z}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = \left. \frac{\partial v_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} - \left. \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right|_{\beta=0},$$

z uwagi zaś na związki (16) i (18) i na wartość, wynikającą z równań ruchu (14):

$$\frac{\partial v}{\partial \beta_1} = -\frac{R T_0}{u_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \alpha_1} - \alpha \lambda - \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu - \alpha - \frac{\lambda v_0}{u_0},$$

mamy ostatecznie funkcję szukaną

$$(34) \quad \psi(\alpha) = -\frac{2\varepsilon}{\alpha u_0} R T_0 \frac{d\bar{\omega}^{(in)}(x)}{dx} + \\ - \varepsilon \cdot v^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \alpha^2}} \cdot \alpha \right) + \\ - \frac{2\lambda \varepsilon v_0}{\alpha u_0} \mu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \alpha^2}} \cdot \alpha \right) - A(\alpha) - \varepsilon \cdot B(\alpha) + \\ - 2\varepsilon \left(1 + \frac{\lambda v_0}{\alpha u_0} \right).$$

Funkcja $\bar{\omega}^{(in)}(x)$ ma wartość

$$\bar{\omega}^{(in)}(x) = \sigma^{(in)}(x) + \tau^{(in)}(x),$$

która, jak łatwo sprawdzić, w przybliżeniu będzie równa

$$\bar{\omega}^{(in)}(x) = \frac{p^{(in)}(x)}{p_0} - 1;$$

$p^{(in)}$ daje początkowy rozkład ciśnień.

Funkcja $v(x, t)$, wyznaczająca składową prędkości wiatru w kierunku spadku ciśnienia, dana jest więc przez wyrażenie następujące:

$$(35) \quad v(x, t) = A(\alpha) \cdot \beta + B(\alpha) + \frac{1}{2} e^{-\varepsilon\beta} f(\alpha + \beta) + \\ + \frac{1}{2} e^{-\varepsilon\beta} f(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} e^{-\varepsilon\beta} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi(\Theta) \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{\beta}{4} e^{-\varepsilon\beta} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi'(\Theta) f(\xi) d\xi.$$

Przypominamy, iż:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\kappa}{2\varepsilon\sqrt{RT_0\gamma}} (x - u_0 t) \\ \beta = \frac{\kappa}{2\varepsilon} t \\ \varepsilon = \frac{\kappa}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}} \\ \Theta = \frac{\beta^2 - (\xi - \alpha)^2}{4} \end{array} \right.$$

Z kolei zajmiemy się wyznaczeniem funkcji $\bar{\omega} = \sigma + \tau$.
Z równań (14) będzie

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta_1} = -\gamma u_0 \frac{\partial v}{\partial \alpha_1},$$

stąd zaś

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta} = -u_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \frac{\partial v}{\partial \alpha}.$$

W celu otrzymania $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$, różniczkujemy (35) względem α , pamiętając, iż α tkwi w funkcjach podcałkowych i w granicach całkowania; po jednej kwadraturze wypadnie wartość na $\bar{\omega}$, odpowiednio do wartości brzegowej $\bar{\omega}^{(in)}(x)$:

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \bar{\omega}(x, t) = & \bar{\omega}^{(in)}(x - u_0 t) + \\
 & -\beta u_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \left[B'(\alpha) + \frac{\beta}{2} A'(\alpha) \right] + \\
 & -\frac{u_0}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \int_0^\beta [f'(\alpha + \beta) + f'(\alpha - \beta) + \psi(\alpha + \beta) - \psi(\alpha - \beta) + \\
 & -\frac{\beta}{2} f(\alpha + \beta) + \frac{\beta}{2} f(\alpha - \beta)] e^{-\varepsilon\beta} \cdot d\beta + \\
 & -\frac{u_0}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \int_0^\beta \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi - \alpha) e^{-\varepsilon\beta} \Phi'(\Theta) \psi(\xi) d\xi d\beta + \\
 & -\frac{u_0}{8} \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \int_0^\beta \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi - \alpha) e^{-\varepsilon\beta} \Phi''(\Theta) f(\xi) d\xi d\beta.
 \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć rozkład temperatur $\tau(x, t)$, wystarczy zauważyć, iż

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial v}{\partial \alpha_1},$$

zatem wyrażenie na τ będzie podobne do wyrażenia (36) na $\bar{\omega}$.

Przystąpmy do obliczenia drugiej składowej prędkości wiatru $\mu(x, t)$; jest to możliwe bez żadnej kwadratury, skoro funkcje v i $\bar{\omega}$ są już wyznaczone.

Mamy mianowicie z równań (14)

$$\begin{aligned}
 (37) \quad \mu = & -\left(1 + \frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} \right) - \frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} v - \frac{\kappa u_0}{2 \varepsilon \lambda v_0} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \\
 & -\frac{\kappa}{2 \varepsilon \lambda v_0} \sqrt{\frac{RT_0}{\gamma}} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \alpha}.
 \end{aligned}$$

Cała trudność zadania polega teraz na zróżniczkowaniu wyrażań (35) i (36) względem β i α .

Dla skrócenia wprowadzimy oznaczenia następujące:

$$(38) \dots \left\{ \begin{array}{l} I_1(\alpha, \beta) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi(\Theta) \psi(\xi) d\xi; \\ I_2(\alpha, \beta) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi'(\Theta) f(\xi) d\xi; \\ I_3(\alpha, \beta) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi'(\Theta) \cdot \psi(\xi) d\xi; \\ I_4(\alpha, \beta) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi''(\Theta) \cdot f(\xi) d\xi; \\ I_5(\alpha, \beta) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi - \alpha)^2 \Phi''(\Theta) \psi(\xi) d\xi; \\ I_6(\alpha, \beta) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi - \alpha)^2 \Phi'''(\Theta) f(\xi) d\xi. \end{array} \right.$$

Funkcja, wyznaczająca składową prędkości wiatru w kierunku prostopadłym do gradientu, wypadnie po dość długich rachunkach w postaci:

$$(39) \dots \mu(x, t) = - \left(1 + \frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} \right) - \frac{R T_0}{\lambda v_0} \bar{\omega}'^{(in)}(x - u_0 t) +$$

$$- \frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} \left[B(\alpha) + \frac{1}{2\varepsilon} A(\alpha) \right] - \frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} \left[A(\alpha) - \frac{1}{2\varepsilon} B''(\alpha) \right] \beta +$$

$$+ \frac{\kappa u_0}{4\varepsilon \lambda v_0} A''(\alpha) \beta^2 - \frac{\kappa u_0}{4\lambda v_0} \left[f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} f'(\alpha + \beta) - \frac{1}{\varepsilon} f'(\alpha - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} \psi(\alpha + \beta) + \frac{1}{\varepsilon} \psi(\alpha - \beta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2\varepsilon} \beta f(\alpha + \beta) - \frac{1}{2\varepsilon} \beta f(\alpha - \beta) \Big] e^{-\varepsilon\beta} + \\
 & - \frac{\kappa u_0}{4 \lambda v_0} \left[I_1 + \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \beta\varepsilon) I_2 + \frac{\beta}{2\varepsilon} I_3 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon} I_4 \right] e^{-\varepsilon\beta} + \\
 & + \frac{\kappa u_0}{4 \varepsilon \lambda v_0} \int_0^\beta [f''(\alpha + \beta) + f''(\alpha - \beta) + \psi'(\alpha + \beta) - \psi'(\alpha - \beta) + \\
 & \quad - \frac{\beta}{2} f'(\alpha + \beta) + \frac{\beta}{2} f'(\alpha - \beta) + \\
 & \quad - \frac{\beta}{2} \psi(\alpha + \beta) - \frac{\beta}{2} \psi(\alpha - \beta) + \\
 & \quad + \frac{\beta^2}{8} f(\alpha + \beta) + \frac{\beta^2}{8} f(\alpha - \beta)] e^{-\varepsilon\beta} d\beta + \\
 & - \frac{\kappa u_0}{8 \varepsilon \lambda v_0} \int_0^\beta \left(I_3 - \frac{1}{2} I_5 + \frac{1}{2} \beta I_4 - \frac{1}{4} \beta I_6 \right) e^{-\varepsilon\beta} d\beta.
 \end{aligned}$$

Zagadnienie ruchów poziomych w atmosferze (w razie upraszczających założeń) jest zatem rozwiązane dla niewielkiego przeciągu czasu; w przypadku jakiegokolwiek bowiem rozkładu początkowego, możemy, przy pomocy wyrażeń (35), (36) i (39), wyznaczyć składowe prędkości wiatru, ciśnienie i temperaturę w dowolnej miejscowości i w dowolnej chwili.

W rachunku liczbowym znaczniejsze trudności nastęrcza całkowanie funkcji I ; można tu np. użyć rozwinięć tych funkcji, lub, jeśli zbieżność odpowiednich szeregów jest wątpliwą, obliczać wprost metodami przybliżonemi wartości całek podwójnych

$$\int_0^\beta \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}$$

(mając wartości liczbowe α i β). Promienie zbieżności rozwinięć zależą naturalnie od rodzaju funkcji f i ψ ; ponieważ funkcje f i ψ są dane przez obserwację, nie można zatem nakładać na nie pewnych warunków, odwrotnie, należy postać rozwiązań dostosować do rodzaju tych 4 funkcji.

Pożądana jest analiza przypadku nieciągłości w pewnych punktach.

Zastosujmy nasze rozważania do przypadku, gdy na danym obszarze spełnione są następujące warunki:

$$u^{(in)}(x) = \text{const.} = u_0, \quad \text{zatem } v^{(in)}(x) = 0,$$

$$v^{(in)}(x) = \text{const.} = v_0, \quad \text{zatem } \mu^{(in)}(x) = 0,$$

$$\bar{\omega}^{(in)}(x) = lx.$$

Założenie $\bar{\omega}^{(in)}(x) = lx$ odpowiada w przybliżeniu liniowemu spadkowi ciśnienia w kierunku gradientu.

Według (20) mamy

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 2 \varepsilon \left(\frac{\lambda u_0}{\kappa v_0} - 1 \right).$$

Równanie (21), któremu winno czynić zadość v_1 , będzie:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - v_1 = \\ & = - \frac{4\varepsilon^2}{\kappa^2} e^{\varepsilon \beta} \left[\frac{2 \varepsilon \lambda v_0}{u_0} \left(\frac{\lambda u_0}{v_0} - \kappa \right) \beta + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right], \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{cases} p(\alpha) = \frac{8 \varepsilon^3 \lambda u_0}{\kappa} \left(\frac{v_0}{u_0} - \frac{\lambda}{\kappa} \right) \\ q(\alpha) = \frac{4 \varepsilon^2 \lambda}{\kappa} \left(\frac{\lambda}{u_0} - \frac{v_0}{u_0} \right). \end{cases}$$

Z równań różniczkowych (25) wypadają wtedy następujące rozwiązania szczególne:

$$(40) \dots \dots \dots \begin{cases} A = \frac{8 \varepsilon^3 \frac{\lambda}{\kappa}}{1 + \varepsilon^2} \left(\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{v_0}{u_0} \right) \\ B = \frac{4 \varepsilon^2 (5 \varepsilon^2 + 1)}{(1 + \varepsilon^2)^2} \left(\frac{v_0}{u_0} - \frac{\lambda}{\kappa} \right), \end{cases}$$

a zatem A i B są to wielkości stałe, niezależne od α .

Wyrażenia (33) i (34) doprowadzają do wartości brzegowych $f(\alpha)$ i $\psi(\alpha)$ — również stałych, otrzymujemy mianowicie:

$$(41) \dots \begin{cases} f(\alpha) = -B \\ \psi(\alpha) = -\frac{2 \varepsilon R T_0 l}{\kappa u_0} - A - \varepsilon B + \\ -2 \varepsilon \left(1 + \frac{\lambda v_0}{\kappa u_0} \right) = m. \end{cases}$$

Ponieważ ograniczamy się do niewielkich przeciągów czasu, możemy przyjąć następujące wartości przybliżone na I:

$$(42) \dots \begin{cases} I_1 = 2m \left(\beta - \frac{\beta^3}{6} \right); & I_2 = -2B \left(-\beta + \frac{\beta^3}{12} \right), \\ I_3 = 2m \left(-\beta + \frac{\beta^3}{12} \right); & I_4 = -B \left(\beta - \frac{\beta^3}{18} \right). \end{cases}$$

Podstawmy wyrażenia (41) i (42) do wyrażen ogólnych (35) i (39), dojdziemy do wartości na składowe ν i μ (z uwagi, iż $\beta = \frac{\kappa}{2 \varepsilon} t$):

$$(43) \dots \nu = - \left(\frac{R T_0 l}{\kappa u_0} + \frac{\lambda v_0}{\kappa u_0} + 1 \right) \kappa t + \\ - \left(B \varepsilon^2 + 2 m \varepsilon + B \right) \frac{\kappa^2}{8 \varepsilon^2} t^2 + \\ + \left(B \varepsilon^3 + 3 m \varepsilon^2 - 3 B \varepsilon - m \right) \frac{\kappa^3}{48 \varepsilon^3} t^3 + \dots$$

$$(44) \dots \mu = - \left[B (1 + \varepsilon^2) + 2 A \varepsilon \right] \frac{\kappa^2 u_0}{4 \varepsilon^2 \lambda v_0} t + \\ + \left(B \varepsilon + m \right) \left(1 + \varepsilon^2 \right) \frac{\kappa^3 u_0}{16 \lambda v_0 \varepsilon^3} t^2 + \\ - \left(4 B \varepsilon^4 - 32 m \varepsilon^3 - 3 B \varepsilon + 4 m \varepsilon - B \right) \frac{\kappa^4 u_0}{384 \lambda v_0 \varepsilon^4} t^3 + \dots$$

Jeśli więc w pewnej miejscowości w danej chwili ($t = 0$) składowe prędkości wiatru w kierunku gradientu i w kierunku doń prostopadłym są u_0 i v_0 , i jeśli w miejscowościach okolicznych składowe mają te same wartości (można przyjąć dla niewielkiego obszaru, liniowy rozkład ciśnienia), to przyrosty składowych prędkości wiatru $u_0 \nu$ i $u_0 \mu$, w ciągu niewielkiego przeciągu czasu, dane są przez wyrażenia (43) i (44).

Zachodzi teraz pytanie, jakie odstępów czasu można uważać za niewielkie, w razie stosowania powyższych wyrażeń?

Obserwacya poucza, iż współczynnik tarcia κ jest zawsze mniejszy od $0,0001 \text{ sec}^{-1}$ (κ okazuje się najmniejsze dla prądów powietrza nad powierzchnią morza, wypada mianowicie przeciętnie $\kappa = 0,00003 \text{ sec}^{-1}$), ponieważ zaś

$$\beta = \frac{\kappa}{2\varepsilon} t$$

wypadnie więc, że gdy t zmienia się w granicach 1000 sek., β pozostaje zawsze mniejsze od 0,1; można więc np. przeciąg czasu 10 minut uważać za dostatecznie mały, jeśli chodzi o prądy atmosferyczne. Gdyby chodziło o przewidywanie stanu prądów atmosferycznych (również ciśnienia i temperatury) po dłuższym przeciągu czasu, wtedy należałoby dany odstęp czasu podzielić na pewną liczbę drobnych interwałów, do których powyższe rozumowanie może być stosowane, i przechodzić kolejno z jednego interwału do drugiego; w rachunkach lepiej nie używać szeregów (z powodu wątpliwej ich zbieżności), lecz, w przypadku bardziej ogólnym, niż poprzedni, obliczać wprost całki podwójne w wyrażeniach (35), (36) i (39). Zaznaczymy jeszcze, iż nieuwzględnienie wpływu promieniowania słońca, jak również promieniowania gruntu, jest jeszcze jedną przyczyną, dla której zmuszeni jesteśmy ograniczyć się do mniejszych przeciągów czasu.

Zastosujmy wyrażenia (43) i (44) do przykładu liczbowego.

Niech

$$u_0 = v = 500 \text{ cm/sek.},$$

zaś

$$\bar{\omega}^{(in)} = -2 \cdot 10^{-10} x \text{ (cm)},$$

($l = -2 \cdot 10^{-10} \cdot \text{cm}^{-1}$) — odpowiada to mniej więcej spadkowi ciśnienia 2 mm Hg na 100 Km. Założenie $u_0 = v_0$ dowodzi,

iż kąt zawarty między gradientem i prędkością wiatru (na prawo od gradientu) t. j. tak zwany kąt odchylenia (Ablenkungswinkel) będzie równy

$$\text{arc tg } \frac{v_0}{u_0} = \frac{\pi}{4}.$$

Jeśli (jak np. dla Warszawy)

$$\lambda = 2 \omega \sin \varphi = 0,000115 \text{ sec}^{-1},$$

to kąt ten

$$\text{arc tg } \frac{v_0}{u_0}$$

jest mniejszy od „normalnego kąta odchylenia“

$$\text{arc tg } \frac{\lambda}{\kappa}.$$

Ze wzorów (40) i (41) otrzymujemy

$$(\kappa = 0,0001 \text{ sek}^{-1}, \quad \lambda = 0,000115 \text{ sek}^{-1}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0,4828 \\ A = 0,1260 \\ B = -0,1993 \\ m = 0,7360; \quad (\log R T_0 = 8,89518), \end{array} \right.$$

zatem, według (43) i (44),

$$v = 0,992 \cdot 10^{-4} t - 0,463 \cdot 10^{-8} t^2 + \dots$$

$$\mu = 0,116 \cdot 10^{-4} t + 0,495 \cdot 10^{-8} t^2 + \dots$$

Wypada stąd, że w ciągu czasu

$$t = 600 \text{ sek.},$$

składowa prędkości wzdłuż gradientu wzrośnie o

$$u_0 v = 28,9 \text{ cm/sek},$$

zaś składowa w kierunku prostopadłym — znacznie mniej, mianowicie

$$v_0 \mu = 4,4 \text{ cm/sek}.$$

III. Rozważanie przypadku $2\lambda - \kappa = 0$.

Poprzednie rozumowanie przeprowadzone jest w założeniu, iż

$$2\lambda - \kappa > 0,$$

może być więc stosowane do wszystkich miejscowości strefy umiarkowanej. Dla największej wartości $\kappa = 0,0001 \text{ sec}^{-1}$, wypadła, że $2\lambda - \kappa$ może być ujemne w miejscowości o szerokości geograficznej mniejszej od $20^{\circ}3'$; rachunek poprzedni ulegnie wtedy pewnym modyfikacyom, dotyczy to założeń (18).

Można się przekonać, że zamiast funkcji $\Phi(\theta)$, wypadnie wprowadzić wtedy funkcję, czyniącą zadość równaniu

$$\theta \Psi''(\theta) + \Psi'(\theta) - \Psi(\theta) = 0.$$

Funkcja ta wyraża się przez funkcję Bessel'a, mamy mianowicie

$$\Psi(\theta) = J_0(2\sqrt{\theta}).$$

Wspominaliśmy, że gdy $\kappa = 0,0001 \text{ sec}^{-1}$, dwumian $2\lambda - \kappa$ staje się zerem dla $\varphi = 20^{\circ}3'$; ponieważ $0,0001 \text{ sec}^{-1}$ jest to jedna z większych wartości na κ , zatem miejscowości w których

$$2\lambda - \kappa = 0,$$

będą leżały co najwyżej pod szerokością geograficzną $20^{\circ}3'$. Dla tego przypadku zajmiemy się teraz rozwiązaniem zagadnienia prądów poziomych. Równanie (17), rozdziału poprzedniego wypadnie w postaci następującej:

$$(45) \dots \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} = \\ = e^{\frac{\alpha}{2}} \beta \left(\frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right),$$

odtąd zmieni się bieg rozumowania; zmienne α i β nie mają tych znaczeń co poprzednio, jest mianowicie

$$\begin{cases} \alpha = x - u_0 t \\ \beta = t. \end{cases}$$

Postępując analogicznie, założymy

$$(46) \dots \mu = \mu^{(in)}(\alpha) + \left[\frac{\lambda u_0}{v_0} v^{(in)}(\alpha) + \right. \\ \left. + \kappa \mu^{(in)}(\alpha) + \left(\kappa - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) \right] \beta,$$

równanie (45) będzie zatem

$$(47) \dots \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} = e^{\frac{\kappa}{2} \beta} \left[p(\alpha) \beta + q(\alpha) \right],$$

założyliśmy tam

$$(48) \dots \left\{ \begin{array}{l} p(\alpha) = \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \left[\frac{\lambda u_0}{v_0} v^{(in)}(\alpha) + \right. \\ \left. + \kappa \mu^{(in)}(\alpha) + \left(\kappa - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) \right] \\ q(\alpha) = \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu^{(in)}(\alpha) + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2. \end{array} \right.$$

Trzeba teraz równanie (47) doprowadzić do równania „strun drgających“. Zakładamy w tym celu

$$(49) \dots v_1 = z + \zeta,$$

ζ jest rozwiązaniem szczególnem równania (47), zatem

$$(50) \dots \zeta = [A(\alpha) \beta + B(\alpha)] e^{\frac{\kappa}{2} \beta}.$$

Funkcje $A(\alpha)$ i $B(\alpha)$ znaleźć trzeba z równań

$$(51) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\kappa^2}{4} A(\alpha) - R T_0 \gamma \cdot A''(\alpha) = p(\alpha) \\ \frac{\kappa^2}{4} B(\alpha) - R T_0 \gamma \cdot B''(\alpha) = q(\alpha) - \kappa A(\alpha). \end{array} \right.$$

Dla wyznaczenia z , mamy równanie znanego typu

$$(52) \dots \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0,$$

a zatemn

$$(53) \quad z = P(\alpha - \beta \sqrt{RT_0 \gamma}) + \Pi(\alpha + \beta \sqrt{RT_0 \gamma}).$$

Funkcye dowolne P i Π wyznaczmy odpowiednio do stanu początkowego atmosfery. Pamiętając, że

$$v = v_1 e^{-\frac{x}{2} \beta},$$

dojdziemy do wyrażenia na przyrost jednostki składowej wzdłuż gradientu

$$(54) \quad v = A(\alpha) \cdot \beta + B(\alpha) + e^{-\frac{x}{2} \beta} P(\alpha - \sqrt{RT_0 \gamma} \cdot \beta) + \\ + e^{-\frac{x}{2} \beta} \Pi(\alpha + \sqrt{RT_0 \gamma} \cdot \beta);$$

lub explicitie

$$(54') \quad v(x, t) = A(x - u_0 t) \cdot t + B(x - u_0 t) + \\ + e^{-\frac{x}{2} t} P[x - (u_0 + \sqrt{RT_0 \gamma}) t] + \\ + e^{-\frac{x}{2} t} \Pi[x - (u_0 - \sqrt{RT_0 \gamma}) t].$$

Aaby wyznaczyć funkcye P i Π , zauważmy, iż mamy następujące wartości graniczne (patrz wzory 12 i 14):

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(x, t) \Big|_{\beta=0} = v^{(in)}(\alpha) \\ \left. \frac{\partial v}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = -\frac{RT_0}{u_0} \frac{d\bar{w}^{(in)}}{d\alpha} - x v^{(in)} + \\ \qquad \qquad \qquad -\frac{\lambda v_0}{u_0} \mu^{(in)} - \left(x + \frac{\lambda v_0}{u_0}\right). \end{array} \right.$$

WWarunki (55), z uwagi na wyrażenie (54), dają:

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(\alpha) + \Pi(\alpha) = v^{(in)}(\alpha) - B(\alpha) \\ [\Pi'(\alpha) - P'(\alpha)] \sqrt{RT_0 \gamma} = -\frac{RT_0}{u_0} \frac{d\bar{w}^{(in)}}{d\alpha} - x v^{(in)} + \\ -\frac{\lambda v_0}{u_0} \mu^{(in)} - \left(x + \frac{\lambda v_0}{u_0}\right) - A(\alpha) + \frac{x}{2} [v^{(in)} - B(\alpha)], \end{array} \right.$$

a więc układ kształtu

$$(56') \dots \dots \dots \begin{cases} P(\alpha) + \Pi(\alpha) = M(\alpha) \\ \Pi'(\alpha) - P'(\alpha) = N(\alpha), \end{cases}$$

stąd

$$(57) \dots \dots \dots \begin{cases} P(\alpha) = \frac{1}{2} M(\alpha) + \frac{1}{2} \int N(\alpha) d\alpha \\ \Pi(\alpha) = \frac{1}{2} M(\alpha) + \frac{1}{2} \int N(\alpha) d\alpha. \end{cases}$$

Znajomość stanu początkowego atmosfery pozwala ztatem odnaleźć $M(\alpha)$ i $N(\alpha)$, a następnie funkcye P i Π .

Wyznaczyć należy jeszcze funkcye σ , τ i przyrost druggiej składowej μ . Ze wzorów (12) wynika:

$$(58) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + \frac{R u_0}{Jc} \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Po odpowiedniej kwadraturze, otrzymamy stąd σ i τ :

$$(59) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \sigma &= \sigma^{(in)}(\alpha) - \frac{R u_0}{2 Jc} A'(\alpha) \cdot \beta^2 + \\ &- \frac{R u_0}{Jc} B'(\alpha) \cdot \beta - \frac{R u_0}{Jc} \int_0^\beta [P'(\alpha - \beta \sqrt{RT_0 \gamma}) + \\ &+ \Pi'(\alpha + \beta \sqrt{RT_0 \gamma})] e^{-\frac{\alpha}{2} \beta} d\beta \\ \tau &= \tau^{(in)}(\alpha) - \frac{1}{2} A'(\alpha) \cdot \beta^2 + \\ &- B'(\alpha) \cdot \beta - \int_0^\beta [P'(\alpha - \beta \sqrt{RT_0 \gamma}) + \\ &+ \Pi'(\alpha + \beta \sqrt{RT_0 \gamma})] e^{-\frac{\alpha}{2} \beta} d\beta. \end{aligned} \right.$$

Przypominamy, iż uwzględniono tutaj wpływ tarcia i siły odchyłającej Coriolis'a.

Dany stan atmosfery, w rozważanej dziedzinie, wyznaczony jest przez sieć izobar i izoterm, jak również przez pole welktorowe prędkości; mamy, znaczy się, funkcyę

$$(62) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, u^{(in)}) = 0, \\ F_2(x, y, v^{(in)}) = 0, \\ F_3(x, y, T^{(in)}) = 0, \\ F_4(x, y, p^{(in)}) = 0. \end{array} \right.$$

Zadanie polega na wyznaczeniu stanu atmosfery, w danej dziedzinie, po upływie nieskończenie małego przeciągu czasu δt . Stan ów dany jest przez funkcyę (rozważamy nieskończenie małe pierwszego rzędu):

$$(63) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u = u^{(in)} + f(x, y) \cdot \delta t, \\ v = v^{(in)} + \varphi(x, y) \cdot \delta t, \\ p = p^{(in)} + \bar{\omega}(x, y) \cdot \delta t, \\ T = T^{(in)} + \tau(x, y) \cdot \delta t, \end{array} \right.$$

trzeba więc znaleźć funkcyę $f, \varphi, \bar{\omega}, \tau$.

Ponieważ w równaniach (61) ciśnienie p nie występuje wyraźnie, wprowadzimy narazie zmienną r .

Szukamy zatem funkcyj w postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u^{(in)} + f(x, y) \cdot \delta t, \\ v = v^{(in)} + \varphi(x, y) \cdot \delta t, \\ r = r^{(in)} + \psi(x, y) \cdot \delta t; \left(r^{(in)} = \log \frac{p^{(in)}}{RT^{(in)}} \right), \\ T = T^{(in)} + \tau(x, y) \cdot \delta t. \end{array} \right.$$

Wystarczy wstawić te wartości do równań (61) i przyrównać do zera odpowiednie sumy; wypadną funkcje:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x, y) &= -u^{(in)} \frac{\partial u^{(in)}}{\partial x} - v^{(in)} \frac{\partial u^{(in)}}{\partial y} + \\ &\quad - RT^{(in)} \frac{\partial r^{(in)}}{\partial x} - R \frac{\partial T^{(in)}}{\partial x} - \lambda v^{(in)} - \kappa u^{(in)}, \\ \varphi(x, y) &= -u^{(in)} \frac{\partial v^{(in)}}{\partial x} - v^{(in)} \frac{\partial v^{(in)}}{\partial y} + \\ &\quad - RT^{(in)} \frac{\partial r^{(in)}}{\partial y} - R \frac{\partial T^{(in)}}{\partial y} + \lambda u^{(in)} - \kappa v^{(in)}, \\ \psi(x, y) &= -u^{(in)} \frac{\partial r^{(in)}}{\partial x} - v^{(in)} \frac{\partial r^{(in)}}{\partial y} - \operatorname{div} \bar{v}^{(in)}, \\ \tau(x, y) &= -u^{(in)} \frac{\partial T^{(in)}}{\partial x} - v^{(in)} \frac{\partial T^{(in)}}{\partial y} + \\ &\quad - \frac{R}{Jc} T^{(in)} \operatorname{div} \bar{v}^{(in)}. \end{aligned} \right.$$

Nietrudno teraz powrócić do zmiennej p ; ostatecznie stan nieskończenie blizki dany jest przez następujące wyrażenia:

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= u^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial u^{(in)}}{\partial x} + v^{(in)} \frac{\partial u^{(in)}}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{RT^{(in)}}{p^{(in)}} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial x} + \lambda v^{(in)} + \kappa u^{(in)} \right) \delta t, \\ v &= v^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial v^{(in)}}{\partial x} + v^{(in)} \frac{\partial v^{(in)}}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{RT^{(in)}}{p^{(in)}} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial y} - \lambda u^{(in)} + \kappa v^{(in)} \right) \delta t, \\ p &= p^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial x} + v^{(in)} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial y} + \gamma p^{(in)} \operatorname{div} \bar{v}^{(in)} \right) \delta t, \\ T &= T^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial T^{(in)}}{\partial y} + v^{(in)} \frac{\partial T^{(in)}}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{Jc} T^{(in)} \operatorname{div} \bar{v}^{(in)} \right) \delta t. \end{aligned} \right.$$

Analizując funkcje

$$f(x, y), \quad \varphi(x, y), \quad \bar{\omega}(x, y), \quad \tau(x, y),$$

dane w wyrażeniach (65), możemy otrzymać szereg ciekawych wniosków co do zmian w atmosferze; analiza polegać będzie na wyznaczeniu dziedzin, w których f , φ , $\bar{\omega}$, τ są dodatnie lub ujemne.

Ostrzegamy, iż z wyprowadzonych wniosków nie należy wiele sądzić o stanach przyszłych atmosfery; znak funkcji

$$f, \quad \varphi, \quad \bar{\omega}, \quad \tau$$

wskazuje raczej na dążność, jaką ujawniają w danej chwili odpowiednie dziedziny prądów atmosferycznych. Autor zastrzega się następnie co do prawdziwości rezultatów w zastosowaniu do prądów w przyrodzie; należy bowiem pamiętać o nieściśle traktowaniu tarcia, nieuwzględnianiu promieniowania, jak również i o dość swobodnem przyjęciu kształtu powierzchni izobarycznych i izotermicznych (z powodu abstrahowania od ruchów pionowych).

Funkcje początkowe

$$u^{(in)}(x, y), \quad v^{(in)}(x, y), \quad p^{(in)}(x, y), \quad T^{(in)}(x, y)$$

wyznaczać trzeba drogą obserwacji. Mając wartości tych funkcji dla szeregu miejscowości, wyrażamy je np. przez wielomiany dowolnego stopnia i poszukujemy współczynników; dokładność rezultatów zależy oczywiście od liczby miejscowości, w których dokonano pomiarów.

Rozważmy przykład liczbowy, gdy składowe prędkości wiatru i temperatura są funkcjami liniowymi współrzędnych,, zaś ciśnienie — funkcją drugiego stopnia; mamy np.:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^{(in)}(x, y) = -5 \cdot 10^{-6} x + 10^{-6} y + 5, \\ v^{(in)}(x, y) = 10^{-5} x + 5 \cdot 10^{-6} y + 5, \\ p^{(in)}(x, y) = -2 \cdot 10^{-5} x + 2 \cdot 10^{-11} y^2 + 760, \\ T^{(in)}(x, y) = 2 \cdot 10^{-5} x - 10^{-5} y + 278. \end{array} \right.$$

(długość wyrażamy w metrach, czas w sek., ciśnienie w mm. Hg).

Widzimy z tych wyrażeń, iż izobary będą przedstawione przez układ parabol współosiowych, zaś izotermy przez szereg prostych równoległych (patrz rysunek w tekście francuskim, rozdz. IV).

Podstawmy wartości początkowe (66) do wyrażeń (65) i uproścmy wyrażenie pochodnej logarytmowej ciśnienia, wypadną żądane funkcje, wyznaczające stan nieskończenie blizki atmosfery:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = -5,34 \cdot 10^{-10} x - 7,50 \cdot 10^{-10} y + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 10,50 \cdot 10^{-4}, \\ \varphi(x, y) = -3,02 \cdot 10^{-16} xy + 1,51 \cdot 10^{-16} y^2 + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 15,75 \cdot 10^{-10} x - 46,2 \cdot 10^{-10} y, \\ \bar{\omega}(x, y) = -4 \cdot 10^{-16} xy - 2 \cdot 10^{-16} y^2 + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 10^{-10} x - 1,8 \cdot 10^{-10} y + 10^{-4}, \\ \tau(x, y) = 2 \cdot 10^{-10} x + 0,3 \cdot 10^{-10} y + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 0,5 \cdot 10^{-4}. \end{array} \right.$$

Jeśli przyrównamy do zera funkcje (67), wypadną krzywe

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = 0; & \varphi(x, y) = 0; \\ \bar{\omega}(x, y) = 0; & \tau(x, y) = 0, \end{array}$$

dzielące obszar rozważany na dziedzinę, w których odpowiednie funkcje są dodatnie lub ujemne (stronę, po której funkcja jest ujemna, zakreskowano), znaczy wielkości charakterystyczne u , v , p , T ujawniają chwilową dążność do wzrostu lub malenia.

Dla przyrostu np. ciśnienia

$$\bar{\omega}(x, y) \cdot \delta t,$$

wypadają, jako krzywe graniczne, dwie gałęzie hyperboli; dziedzinę, względem punktów której hyperbola jest wypukłą, będzie cechować chwilowa dążność do wzrostu ciśnienia, dążność ta winna się ujawnić najbardziej intensywnie w środku hyperboli,

(gdyż tam zachodzi maximum $\bar{\omega}(x, y)$, z powodu spełnienia warunków

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0,$$

to jest w punkcie o współrzędnych

$$x = -200 \text{ km}, \quad y = -250 \text{ km}.$$

RÉSUMÉ.

Witold Pogorzelski:

**Sur la théorie des mouvements horizontaux
dans l'atmosphère.**

Communication annoncée le 27. IV. 1917.

Présentée par W. Gorczyński.

I. Considérations préliminaires.

Le but de nos raisonnements sera de trouver la distribution des vitesses horizontales des particules d'air ainsi que de la pression et de la température dans une époque donnée, si l'on connaît l'état initial de l'atmosphère. Les simplifications qui ont permis de résoudre ce problème difficile sont analogues à celles présentées dans la communication „Sur la théorie des courants rectilignes dans l'atmosphère“¹⁾. Nous traitons ici le problème au point de vue plus général, notamment nous tenons compte de l'influence de la force de Coriolis; quant au frottement, nous le regarderons comme proportionnel à la vitesse.

Dans cette communication nous nous bornons à l'étude du cas des isobares et des isothermes rectilignes et parallèles,

¹⁾ „Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie“, Avril 1917.

on n'aura par conséquent que deux variables indépendantes — l'abscisse du lieu et le temps. Une pareille hypothèse peut, d'ailleurs, subsister et dans l'autre cas, si l'on se borne au domaine suffisamment petit ainsi qu'à l'intervalle de temps de la courte durée.

Soit $\bar{\omega}$ le vecteur-vitesse angulaire de la terre, la force de Coriolis aura pour l'expression le produit vectoriel $2 \bar{V} \times \bar{v}$, \bar{v} est le vecteur vitesse de la particule d'air. La force déviante de Coriolis est donc toujours perpendiculaire à la vitesse. Le frottement est donné par le produit $\kappa \bar{v}$ (κ — coefficient du frottement qui est de l'ordre $0,0001 \text{ sec}^{-1}$).

Les mouvements atmosphériques doivent satisfaire à l'équation suivante:

$$(1) \dots \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \text{ grad}) \bar{v} = \bar{g} - \kappa \bar{v} + 2 \bar{V} \times \bar{v} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$$

et à l'équation de continuité

$$(2) \dots \dots \dots \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{v}) = 0,$$

ρ — exprime la masse spécifique de l'air au point considéré.

Soit les coordonnées cartésiennes avec le plan (x, y) horizontal (OY à droite de OX et l'axe OZ dirigée vers le zénite). Puisque la force de Coriolis a pour mesure le double de vitesse de l'extrémité du vecteur \bar{v} dans le mouvement de rotation autour de $\bar{\omega}$, les composantes de la force de Coriolis seront:

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{composante suivant } OX = 2 (\omega_y v - \omega_z v), \\ \text{composante suivant } OY = 2 (\omega_z u - \omega_x w), \\ \text{composante suivant } OZ = 2 (\omega_x v - \omega_y u), \end{array} \right.$$

u, v, w — les composantes de la vitesse \bar{v} .

Désignons par φ — latitude géographique du lieu et par ψ — l'angle que fait la droite $O\dot{X}$ avec le méridien; on aura

$$(4). \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega \cos \varphi \cdot \cos \psi, \\ \omega_y = \omega \cos \varphi \cdot \sin \psi, \\ \omega_z = \omega \sin \varphi. \end{array} \right.$$

Les équations de mouvement (1) s'écrivent alors sous la forme explicite

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ \quad = 2 \omega (\cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot w - \sin \varphi \cdot v) - \kappa u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ \quad = 2 \omega (\sin \varphi \cdot u - \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot w) - \kappa v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ \quad = 2 \omega (\cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot v - \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot u) - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right.$$

Pour la résolution de la question il nous faudra encore de l'équation différentielle, qu'on obtient à l'aide de la théorie de propagation de la chaleur dans le fluide. En négligeant l'influence de conductibilité on arrive ¹⁾ à l'équation

$$(6). \quad \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \\ \quad \frac{p}{Jc\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \end{array} \right.$$

¹⁾ A comparer la communication: „Sur la théorie de courants rectilignes“...

J — l'équivalent mécanique de la calorie, c — chaleur spécifique de l'air au volume constant. Dans l'équation (6) on n'a tenu compte du frottement intérieur, puisque son influence s'exprime par les termes du second degré, donc dans la première approximation on le négligera.

II. Les courants curvilignes horizontaux.

Les courants horizontaux ¹⁾ dans l'atmosphère satisfont au système d'équations aux dérivées partielles:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda v - \kappa u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda u - \kappa v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{p}{J c \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{array} \right.$$

on a encore une relation connue

$$(8) \quad \dots \dots \dots p = R \rho T.$$

Le coefficient λ dépend de la latitude géographique, notamment il est égal:

$$(9) \quad \dots \dots \dots \lambda = 2 \omega \sin \varphi.$$

La résolution du problème des mouvements horizontaux, qui consiste dans la détermination des fonction inconnues u, v, ρ, T du système (7), est théoriquement possibles si l'on

¹⁾ Ces études concernent les domaines extérieures du cyclone, puisque dans ces domaines la composante verticale de vitesse est égale à zéro.

connait l'état de l'atmosphère pour $t = 0$, c. à. dd. les fonctions

$$u^{(in)}(x, y), \quad v^{(in)}(x, y), \quad \rho^{(in)}(x, y), \quad T^{(in)}(x, y).$$

Considérons le cas simple des isobares et des isothermes rectilignes et parallèles; le problème se simplifie beaucoup, nous nous contentons donc de deux variables indépendantes x et t .

L'axe des x doit avoir la direction du gradient (l'axe OY à droite). Les fonctions inconnues u, v, ρ, T il faut déterminer d'après le système

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda v + \kappa u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \lambda u + \kappa v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{p}{J c \rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ p = R \rho T. \end{array} \right.$$

Analyse mathématique est impuissante à résoudre le système (10) explicitement, conformément aux valeurs initiales

$$u^{(in)}(x), \quad v^{(in)}(x), \quad \rho^{(in)}(x), \quad T^{(in)}(x).$$

Quelques simplifications faites, il nous sera possible de déterminer les fonctions u, v, ρ, T .

Soit

$$u_0, \quad v_0, \quad \rho_0, \quad T_0$$

certaines constantes, par exemple les valeurs caractéristiques pour $x = 0$ et $t = 0$.

Nous pourrions toujours poser

$$(11)) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 (1 + \nu) \\ v = v_0 (1 + \mu) \\ \rho = \rho_0 (1 + \sigma) \\ T = T_0 (1 + \tau). \end{array} \right.$$

Si l'on se bornera au domaine, ainsi qu'à l'intervalle de temps, assez petit, les fonctions ν , μ , σ , τ de deux variables x et t seront suffisamment petites, pour qu'on puisse, après la substitution des expressions (11) dans le système (10), négliger les produits des ces fonctions par ses dérivées.

Nous arrivons de cette façon au système linéaire suivant:

$$(12)) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \nu}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{RT_0}{u_0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) + \\ \quad + \kappa \nu + \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu + \left(\kappa + \frac{\lambda v_0}{u_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\lambda u_0}{v_0} \nu + \kappa \mu + \left(\kappa - \frac{\lambda v_0}{u_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{RT_0}{Ic} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

Ce système va se simplifier considérablement, si l'on pose

$$(13)) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = x - u_0 t \\ \beta_1 = t \\ \bar{\omega} = \sigma + \tau, \end{array} \right.$$

il vient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial \beta_1} + \frac{R T_0}{u} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \alpha_1} + \kappa v + \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu + \left(\kappa + \frac{\lambda v_0}{u_0} \right) = 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta_1} - \frac{\lambda u_0}{v_0} v + \kappa \mu + \left(\kappa - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) = 0, \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta_1} + \gamma u_0 \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \end{array} \right.$$

Pour éliminer $\bar{\omega}$, différentions (14) par rapport à β_1 resp. α_1 ; il résulte l'équation du second ordre

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta_1^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + \kappa \frac{\partial v}{\partial \beta_1} + \\ + \lambda^2 v = \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2. \end{array} \right.$$

A l'aide du deuxième des équations (14) on pourra éliminer μ , ce qui conduit à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Puisque la résolution d'une pareille équation offre les difficultés énormes, nous allons suivre un autre procédé.

Substituons dans l'équation (15) pour μ sa valeur approchée

$$\mu = \mu^{(1)}(x) + \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{t=0} \cdot t,$$

qui est connue, puisque

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{t=0}$$

on peut déduire de la deuxième des équations (12). Nous signalons qu'une pareille substitution, d'ailleurs, ne vient pas diminuer l'exactitude des résultats, puisqu'elle concerne le terme $\kappa \mu$, qui n'est qu'une expression approchée du frottement.

Cette remarque faite, nous allons reprendre le calcul de la fonction ν , conformément à sa valeur limite $\nu^{(in)}$. Pour se débarrasser de la dérivée $\frac{\partial \nu}{\partial \beta_1}$ dans (15), nous posons

$$(16) \dots \dots \dots \nu = \nu_1 \cdot e^{-\frac{\kappa}{2} \beta_1},$$

il est aisé de vérifier que l'équation (15) se présentera sous la forme

$$(17) \dots \dots \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \beta_1^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \alpha_1^2} + \left(\lambda^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) \nu_1 = e^{\frac{\kappa}{2} \beta_1} \left(\frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right).$$

On sait d'après les observations que pour la zone tempérée le coefficient du frottement κ est toujours plus petit que 2λ , nous pouvons donc introduire les nouvelles variables

$$(18) \dots \dots \dots \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\lambda^2 - \kappa^2}{R T_0 \gamma}} \cdot \alpha_1 \\ \beta = \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2} \cdot \beta_1. \end{cases}$$

Il en résulte pour ν_1 une équation de la forme plus simple que (17):

$$(19) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \beta^2} - \nu_1 = -\frac{4}{4\lambda^2 - \kappa^2} e^{\frac{\kappa}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}} \beta} \left(\frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right).$$

Conformément à la remarque faite antérieurement nous substituons

$$\mu(\alpha, \beta) = \mu(\alpha, 0) + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} \cdot \beta,$$

c. à d.

$$\mu(\alpha, \beta) = \mu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \cdot \alpha \right) + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} \cdot \beta.$$

La fonction $\mu^{(in)}(x)$ est déterminée si l'on connaît la distribution initiale de la composante v . Pour la valeur de

$\left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}$ on a, d'après (14):

$$(20) \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = \frac{2}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}} \left[\frac{\lambda u_0}{v_0} \nu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \rho^2}} \cdot \alpha \right) + \right. \\ \left. - \kappa \mu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \cdot \alpha \right) - \kappa + \frac{\lambda u_0}{v_0} \right].$$

Finalement, l'équation (19) prend la forme

$$(21) \quad \dots \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - v_1 = e^{\varepsilon \beta} \left[p(\alpha) \beta + q(\alpha) \right],$$

où nous avons posé

$$(22) \quad \dots \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{\sqrt{4\lambda^2 - \kappa^2}}.$$

Pour faire disparaître le second membre dans l'équation (21), nous écrivons

$$(23) \quad \dots \quad v_1 = z + \zeta.$$

ζ sera une solution particulière de (21). Il est évident que ζ aura la forme

$$(24) \quad \dots \quad \zeta = e^{\varepsilon \beta} [A(\alpha) \beta + B(\alpha)].$$

Les fonctions $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ doivent satisfaire au système:

$$(25) \quad \dots \quad \begin{cases} A''(\alpha) - (1 + \varepsilon^2) A(\alpha) = p(\alpha) \\ B''(\alpha) - (1 + \varepsilon^2) B(\alpha) = q(\alpha) + 2\varepsilon A(\alpha). \end{cases}$$

Application de la méthode de variation des constantes conduit aux valeurs d'A (α) et de de B (α):

$$2 \sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot A(\alpha) = e^{\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} \int e^{-\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} p(\alpha) d\alpha +$$

$$- e^{-\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} \int e^{\sqrt{1 + \varepsilon^2} \cdot \alpha} p(\alpha) d\alpha \dots (26)$$

il suffit maintenant de substituer dans cette formule la valeur

$$q(\alpha) + 2 \varepsilon A(\alpha)$$

au lieu de p(α), pour en déduire B(α).

D'après (23), la fonction z satisfait à l'équation du second ordre

$$(27) \dots \dots \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} - z = 0.$$

Nous intégrons cette équation en faisant l'usage de la méthode de Riemann, laquelle donne les solutions sous une forme la plus appropriée aux problèmes de la Physique mathématique.

Nous allons donc chercher de la solution z^(adj)(α, β) de l'équation (27), qui serait égale à l'unité pour les points des caractéristiques de l'équation (27)¹⁾. Soit

$$(28) \dots \dots z^{(adj)} = \Phi \left[\frac{(\beta - \beta_0)^2 - (\alpha - \alpha_0)^2}{4} \right].$$

Puisque l'équation (28) est identique avec son adjointe, il en résulte que Φ(θ) doit satisfaire à l'équation linéaire du type de Fuchs:

$$(29) \dots \dots \theta \Phi''(\theta) + \Phi'(\theta) + \Phi(\theta) = 0,$$

en outre on doit avoir

$$\Phi(0) = 1.$$

¹⁾ Pour plus des détails consultez la communication déjà citée.

Nous en déduisons la série

$$(30) \dots \Phi(\theta) = 1 - \frac{\theta}{1} + \frac{\theta^2}{(1.2)^2} - \frac{\theta^3}{(1.2.3)^2} + \dots$$

qui définit donc une fonction entière.

Soit $f(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ les valeurs initiales de la fonction $z(\alpha, \beta)$ resp. $\frac{\partial z}{\partial \beta}$; la solution de l'équation (27), conformément aux valeurs initiales, aura la forme suivante:

$$(31) \dots z = \frac{1}{2} f(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} f(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi(\theta) \psi(\xi) d\xi + \frac{\beta}{4} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi'(\theta) f(\xi) d\xi.$$

on a posé

$$(32) \dots \theta = \frac{\beta^2 - (\xi - \alpha^2)}{4}.$$

On pourra déterminer les fonctions $\psi(\alpha)$ et $f(\alpha)$ si l'on connaît, d'après l'observation, la distribution initiale des vitesses du vent, des pressions et des températures¹⁾.

Nous avons

$$(33) \dots f(\alpha) = v^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \alpha^2}} \alpha \right) - B(\alpha).$$

de même

$$\psi(\alpha) = \left. \frac{\partial z}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = \left. \frac{\partial v_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} - \left. \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right|_{\beta=0},$$

¹⁾ Pour la détermination des fonctions

$$u^{(in)}(x), \quad v^{(in)}(x), \quad T^{(in)}(x), \quad p^{(in)}(x)$$

on peut utiliser, par exemple, la méthode d'interpolation parabolique.

mais, d'après l'équation (14):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = -\frac{R T_0}{u_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \alpha_1} - \kappa v - \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu - \kappa - \frac{\lambda v_0}{u_0},$$

il vient donc

$$\begin{aligned} (34) \quad \dots \quad \psi(\alpha) = & -\frac{2 \varepsilon}{\kappa u_0} R T_0 \frac{d\bar{\omega}^{(in)}(\alpha)}{d\alpha} + \\ & - \varepsilon \cdot v^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \alpha \right) + \\ & - \frac{2 \lambda \varepsilon v_0}{\kappa u_0} \mu^{(in)} \left(2 \sqrt{\frac{R T_0 \gamma}{4\lambda^2 - \kappa^2}} \alpha \right) - A(\alpha) - \varepsilon \cdot B(\alpha) + \\ & - 2 \varepsilon \left(1 + \frac{\lambda v_0}{\kappa u_0} \right). \end{aligned}$$

Quant à la fonction $\bar{\omega}^{(in)}(\alpha)$, elle a la valeur:

$$\bar{\omega}^{(in)}(\alpha) = \sigma^{(in)}(\alpha) + \tau^{(in)}(\alpha),$$

qui peut s'exprimer approximativement de la façon suivante:

$$\bar{\omega}^{(in)}(\alpha) = \frac{p^{(in)}(\alpha)}{p_0} - 1,$$

$p^{(in)}(\alpha)$ est donnée par la distribution initiale des pressions.

La fonction $v(\alpha, t)$, qui détermine la composante de la vitesse du vent suivant le gradient, aura donc la valeur

$$\begin{aligned} (85) \quad \dots \quad v(\alpha, t) = & A(\alpha) \cdot \beta + B(\alpha) + \frac{1}{2} e^{-\varepsilon \beta} f(\alpha + \beta) + \\ & + \frac{1}{2} e^{-\varepsilon \beta} f(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} e^{-\varepsilon \beta} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi(\theta) \psi(\xi) d\xi + \\ & + \frac{\beta}{4} e^{-\varepsilon \beta} \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} \Phi'(\theta) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Nous rappelons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\kappa}{2 \varepsilon \sqrt{R T_0 \gamma}} (x - u_0 t) \\ \beta = \frac{\kappa}{2 \varepsilon} t \\ \varepsilon = \frac{\kappa}{\sqrt{4 \lambda^2 - \kappa^2}} \\ \Theta = \frac{\beta^2 - (\xi - \alpha)^2}{4} \end{array} \right.$$

Dans la suite nous nous occupons de la détermination de la fonction

$$\bar{\omega} = \sigma + \nu.$$

On tire de l'équation (14)

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta} = -u_0 \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}} \frac{\partial \nu}{\partial \alpha},$$

il faudra donc déterminer $\frac{\partial \nu}{\partial \alpha}$; pour cela il est nécessaire de différentier l'expression (35) par rapport à α . Quadrature correspondante conduira à la valeur de $\bar{\omega}$:

$$(36). \quad \bar{\omega}(x, t) = \bar{\omega}^{(in)}(x - u_0 t) +$$

$$-\beta u_0 \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}} \left[B'(\alpha) + \frac{\beta}{2} A'(\alpha) \right] +$$

$$-\frac{u_0}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}} \int_0^\beta [f'(\alpha + \beta) + f'(\alpha - \beta) + \psi(\alpha + \beta) - \psi(\alpha - \beta)] +$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta}{2} f(\alpha+\beta) + \frac{\beta}{2} f(\alpha-\beta)] e^{-\varepsilon\beta} \cdot d\beta + \\
 & -\frac{u_0}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}} \int_0^\beta \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi-\alpha) e^{-\varepsilon\beta} \Phi'(\Theta) \psi(\xi) d\xi \cdot d\beta + \\
 & -\frac{u_0}{8} \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}} \int_0^\beta \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \beta (\xi-\alpha) e^{-\varepsilon\beta} \Phi''(\Theta) f(\xi) d\xi \cdot d\beta.
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la distribution de température $\tau(x, t)$ dans une époque donnée, il n'y a qu'à remarquer que l'on a

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial v}{\partial \alpha_1},$$

par conséquent l'expression de τ sera pareille à celle de $\bar{\omega}$.

Il reste encore à calculer l'accroissement $\mu(x, t)$ de la composante dans la direction perpendiculaire au gradient; une fois les valeurs de v et de $\bar{\omega}$ trouvées, il n'y a qu'à déterminer μ d'après les équations (14) qui donnent

$$\begin{aligned}
 (37). \quad \mu = & -\left(1 + \frac{\kappa u_0}{\lambda v_0}\right) + \\
 & -\frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} v - \frac{\kappa u_0}{2 \varepsilon \lambda v_0} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \\
 & -\frac{\kappa}{2 \varepsilon \lambda v_0} \sqrt{\frac{R T_0}{\gamma}} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \alpha}.
 \end{aligned}$$

Toute la difficulté du problème consiste maintenant dans la différentiation des expressions (35) et (36) par rapport à β resp. α .

Pour abrégér on pose :

$$(38) \dots \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi(\Theta) \psi(\xi) d\xi; \\ I_2 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi'(\Theta) f(\xi) d\xi; \\ I_3 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi'(\Theta) \psi(\xi) d\xi; \\ I_4 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \Phi''(\Theta) f(\xi) d\xi; \\ I_5 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi - \alpha)^2 \Phi''(\Theta) \psi(\xi) d\xi; \\ I_6 = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (\xi - \alpha)^2 \Phi'''(\Theta) f(\xi) d\xi. \end{array} \right.$$

Un calcul assez long conduira à l'expression suivante de la fonction $\mu(x, t)$:

$$(39) \dots \mu(x, t) = - \left(1 + \frac{\lambda u_0}{\lambda v_0} \right) - \frac{R T_0}{\lambda v_0} \bar{\omega}'^{(in)}(x - u_0 t) +$$

$$- \frac{\lambda u_0}{\lambda v_0} \left[B(\alpha) + \frac{1}{2\varepsilon} A(\alpha) \right] - \frac{\lambda u_0}{\lambda v_0} \left[A(\alpha) - \frac{1}{2\varepsilon} B''(\alpha) \right] \beta +$$

$$+ \frac{\lambda u_0}{4\varepsilon \lambda v_0} A''(\alpha) \beta^2 - \frac{\lambda u_0}{4 \lambda v_0} \left[f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} f'(\alpha + \beta) - \frac{1}{\varepsilon} f'(\alpha - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} \psi(\alpha + \beta) + \frac{1}{\varepsilon} \psi(\alpha - \beta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\varepsilon} \beta f(\alpha + \beta) - \frac{1}{2\varepsilon} \beta f(\alpha - \beta) \Big] e^{-\varepsilon\beta} + \\
 & -\frac{\kappa u_0}{4 \lambda v_0} \left[I_1 + \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \beta\varepsilon) I_2 + \frac{\beta}{2\varepsilon} I_3 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon} I_4 \right] e^{-\varepsilon\beta} + \\
 & + \frac{\kappa u_0}{4 \varepsilon \lambda v_0} \int_0^\beta [f''(\alpha + \beta) + f''(\alpha - \beta) + \psi'(\alpha + \beta) - \psi'(\alpha - \beta) + \\
 & \quad - \frac{\beta}{2} f'(\alpha + \beta) + \frac{\beta}{2} f'(\alpha - \beta) + \\
 & \quad - \frac{\beta}{2} \psi(\alpha + \beta) - \frac{\beta}{2} \psi(\alpha - \beta) + \\
 & \quad + \frac{\beta^2}{8} f(\alpha + \beta) + \frac{\beta^2}{8} f(\alpha - \beta)] e^{-\varepsilon\beta} d\beta + \\
 & - \frac{\kappa u_0}{8 \varepsilon \lambda v_0} \int_0^\beta \left(I_3 - \frac{1}{2} I_5 + \frac{1}{2} \beta I_4 - \frac{1}{4} \beta I_6 \right) e^{-\varepsilon\beta} d\beta.
 \end{aligned}$$

Le problème des mouvements atmosphériques est donc résolu (dans le cas de quelques simplifications) pour un intervalle de temps assez petit; dans le cas d'une distribution initiale connue, on pourra à l'aide des expressions (35), (36) et (39) trouver l'état de l'atmosphère dans une époque donnée.

Dans le calcul numérique quelques difficultés offre l'intégration des fonctions I ; nous pouvons ici employer par exemple les développements en série, ou, si la convergence est douteuse, calculer directement les intégrales doubles par les méthodes d'approximation.

Il serait intéressant de faire l'analyse du cas de discontinuité en quelques points des fonctions f , ψ et de ses dérivées.

Nous allons appliquer maintenant nos résultats généraux au cas particulier suivant:

$$\begin{aligned} u^{(in)}(x) &= \text{const.} = u_0, & \text{donc } v^{(in)}(x) &= 0, \\ v^{(in)}(x) &= \text{const.} = v_0, & \text{donc } \mu^{(in)}(x) &= 0, \\ \bar{\omega}^{(in)}(x) &= lx. \end{aligned}$$

La fonction $\bar{\omega}^{(in)}(x) = lx$ correspond approximativement au chute linéaire de la pression atmosphérique.

D'après (20) on a

$$\left| \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 2\varepsilon \left(\frac{\lambda u_0}{\kappa v_0} - 1 \right).$$

L'équation (21) qui détermine v_1 sera :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - v_1 = \\ & = -\frac{4\varepsilon^2}{\kappa^2} e^{\varepsilon\beta} \left[\frac{2\varepsilon\lambda v_0}{u_0} \left(\frac{\lambda u_0}{v_0} - \kappa \right) \beta + \frac{\kappa\lambda v_0}{u_0} - \lambda^2 \right], \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} p(\alpha) = \frac{8\varepsilon^3 \lambda u_0}{\kappa} \left(\frac{v_0}{u_0} - \frac{\lambda}{\kappa} \right) \\ q(\alpha) = \frac{4\varepsilon^2 \lambda}{\kappa} \left(\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{v_0}{u_0} \right). \end{cases}$$

Des équations (25) on tire alors les solutions particulières suivantes :

$$(40) \dots \dots \dots \begin{cases} A = \frac{8\varepsilon^3 \frac{\lambda}{\kappa}}{1 + \varepsilon^2} \left(\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{v_0}{u_0} \right) \\ B = \frac{4\varepsilon^2 (5\varepsilon^2 + 1)}{(1 + \varepsilon^2)^2} \left(\frac{v_0}{u_0} - \frac{\lambda}{\kappa} \right), \end{cases}$$

les fonctions $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ seront donc des constantes.

Les expressions (33) et (34) nous vont conduire ensuite aux valeurs limites $f(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$, aussi constantes:

$$(41) \dots \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) = -B, \\ \psi(\alpha) = -\frac{2\varepsilon R T_0 l}{\kappa u_0} - A - \varepsilon B + \\ \qquad \qquad \qquad - 2\varepsilon \left(1 + \frac{\lambda v_0}{\kappa u_0} \right) = m. \end{array} \right.$$

Puisque nous nous bornons à l'intervalle de temps assez petit, nous pourrions admettre les valeurs approximatives suivantes:

$$(42) \dots \left\{ \begin{array}{l} I_1 = 2m \left(\beta - \frac{1}{6} \beta^3 \right); \quad I_2 = -2B \left(-\beta + \frac{1}{12} \beta^3 \right); \\ I_3 = 2m \left(-\beta + \frac{1}{12} \beta^3 \right); \quad I_4 = -B \left(\beta - \frac{1}{18} \beta^3 \right). \end{array} \right.$$

Substituons les valeurs (41) et (42) dans les expressions générales (35) et (39), il vient (remarque faite de relation $\beta = \frac{\kappa}{2} t$):

$$(43) \dots \nu = - \left(\frac{R T_0 l}{\kappa u_0} + \frac{\lambda v_0}{\kappa u_0} + 1 \right) \kappa t + \\ - \left(B \varepsilon^2 + 2 m \varepsilon + B \right) \frac{\kappa^2}{8 \varepsilon^2} t^2 + \\ + \left(B \varepsilon^3 + 3 m \varepsilon^3 - 3 B \varepsilon - m \right) \frac{\kappa^3}{48 \varepsilon^3} t^3 + \dots$$

$$(44) \dots \mu = - \left[B (1 + \varepsilon^2) + 2 A \varepsilon \right] \frac{\kappa^2 u_0}{4 \varepsilon^2 \lambda v_0} t + \\ + \left(B \varepsilon + m \right) \left(1 + \varepsilon^2 \right) \frac{\kappa^3 u_0}{16 \lambda v_0 \varepsilon^3} t^2 + \\ - \left(4 B \varepsilon^4 - 32 m \varepsilon^3 - 3 B \varepsilon + 4 m \varepsilon - B \right) \frac{\kappa^4 u_0}{384 \lambda v_0 \varepsilon^4} t^3 + \dots$$

Si donc dans une époque donnée ($t = 0$) les composantes de la vitesse du vent au lieu considéré sont u_0 et v_0 et, si dans les lieux voisins ces valeurs ne diffèrent pas de u_0 et v_0 (on pourra admettre pour une région assez petite une distribution linéaire des pressions), les accroissements $u_0 \nu$ et $v_0 \mu$ des composantes, dans un intervalle de temps suffisamment petit, sont données par les expressions (43) et (44).

Nous signalons que les intervalles pas plus grands que 15 minutes on pourra considérer comme suffisamment petits dans le cas d'application des formules antérieures; pour prouver ceci il n'y a qu'à remarquer que le coefficient du frottement α est inférieur à $0,0001 \text{ sec}^{-1}$ (α est le plus petit pour les courants au-dessus de surface de la mer, on a alors en moyenne $\alpha = 0,00003 \text{ sec}^{-1}$) donc si t reste inférieure à 1000 sec, la variable β ne sort pas du domaine 0,1. Pour un intervalle de temps un peu plus grand on pourrait le diviser en une certaine nombre des sous-intervalles, pour lesquels les formules antérieures sont applicables.

Il faut remarquer que dans nos considérations on n'a pas tenu compte de l'influence du rayonnement du soleil et du sol — c'est la cause une de plus pour se borner à l'intervalle plus petit de temps.

Prenons un exemple numérique; soit

$$u_0 = v_0 = 500 \text{ cm/sec.},$$

$$\bar{\omega}^{(in)} = -2 \cdot 10^{-10} \text{ x (cm)},$$

c. à d.

$$l = -2 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$$

cela correspond à peu près à la chute 2 mm Hg sur 100 Km.

L'angle de déviation

$$\text{arc tg } \frac{v_0}{u_0} = \frac{\pi}{4},$$

est donc plus petit que l'angle de la déviation normale

$$\text{arc } \text{tg } \frac{\lambda}{\alpha},$$

puisque pour Varsovie par exemple

$$\lambda = 2 \omega \sin \varphi = 0,000115 \text{ sec}^{-1}.$$

On a, d'après (40) et (41), les valeurs

$$(\alpha = 0,0001 \text{ sec}^{-1}, \quad \lambda = 0,000115 \text{ sec}^{-1}),$$

suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0,4828 \\ A = 0,1260 \\ B = -0,1993 \\ m = 0,7360; \quad (\log R T_0 = 8,89518), \end{array} \right.$$

on déduira ensuite

$$\begin{aligned} v &= 0,992 \cdot 10^{-4} t - 0,463 \cdot 10^{-8} t^2 + \\ \mu &= 0,116 \cdot 10^{-4} t + 0,495 \cdot 10^{-8} t^2 + \dots \end{aligned}$$

Il en résulte que dans le temps

$$t = 600 \text{ sec},$$

la composante de vitesse suivant le gradient va s'augmenter de

$$u_0 v = 28,9 \text{ cm/sek},$$

et celle dans direction perpendiculaire de

$$v_0 \mu = 4,4 \text{ cm/sek}.$$

III. Analyse du cas $2 \lambda - \alpha = 0$.

Le raisonnement antérieur concerne le cas

$$2 \lambda - \alpha > 0,$$

donc est applicable pour tous les lieux de la zone tempérée.

Il est aisé de vérifier que $2\lambda - \kappa$ peut être négatif pour une parallèle de la latitude plus petite que $20^{\circ}3'$; dans ce cas le calcul précédent subit quelques modifications, ceci concerne les relations (18).

Dans la suite de calcul il faudra introduire, au lieu de la fonction $\Phi(\Theta)$, la fonction satisfaisante à l'équation

$$\Theta \Phi''(\Theta) + \Psi'(\Theta) - \Psi(\Theta) = 0,$$

qui est voisine de la fonction de Bessel, puisque on a

$$\Psi(\Theta) = J_0(2\sqrt{-\Theta}).$$

Considérons maintenant le cas

$$2\lambda - \kappa = 0$$

ce qui peut arriver pour une parallèle de la zone torride de la latitude plus petite que $20^{\circ}8'$. L'équation (17), du chapitre précédent aura alors la forme simplifiée

$$(45) \quad \dots \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} = \\ = e^{\frac{\kappa}{2}\beta} \left(\frac{\kappa \lambda v_0}{u_0} \mu + \frac{\kappa \lambda u_0}{u_0} - \lambda^2 \right),$$

c'est de là que changera le raisonnement; les variables α et β ont maintenant les significations

$$\begin{cases} \alpha = x - u_0 t \\ \beta = t. \end{cases}$$

Nous posons de même

$$(46) \quad \dots \quad \mu = \mu^{(in)}(\alpha) + \left[\frac{\lambda u_0}{v_0} v^{(in)}(\alpha) + \right. \\ \left. + \kappa \mu^{(in)}(\alpha) + \left(\kappa - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) \right] \beta,$$

l'équation (45) devient

$$(47) \dots \frac{\partial^2 v_1}{\partial \beta^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} = e^{\frac{\alpha}{2} \beta} \left[p(\alpha) \beta + q(\alpha) \right],$$

où :

$$(48) \dots \left\{ \begin{array}{l} p(\alpha) = \frac{\alpha \lambda v_0}{u_0} \left[\frac{\lambda u_0}{v_0} v^{(in)}(\alpha) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \alpha \mu^{(in)}(\alpha) + \left(\alpha - \frac{\lambda u_0}{v_0} \right) \right] \\ q(\alpha) = \frac{\alpha \lambda v_0}{u_0} \mu^{(in)}(\alpha) + \frac{\alpha \lambda v_0}{u_0} - \lambda^2. \end{array} \right.$$

Pour se débarrasser du second membre dans (47) nous posons

$$(49) \dots \dots \dots v_1 = z + \zeta,$$

ζ sera une solution particulière de la forme

$$(50) \dots \dots \dots \zeta = [A(\alpha) \beta + B(\alpha)] e^{\frac{\alpha}{2} \beta}.$$

Les fonctions $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ se déterminent d'après le système

$$(51) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2}{4} A(\alpha) - R T_0 \gamma \cdot A''(\alpha) = p(\alpha), \\ \frac{\alpha^2}{4} B(\alpha) - R T_0 \gamma \cdot B''(\alpha) = q(\alpha) - \alpha A(\alpha). \end{array} \right.$$

Nous n'avons maintenant qu'à déterminer z de l'équation des cordes vibrantes

$$(52) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} - R T_0 \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0.$$

On a

$$(53) \dots z = P(\alpha - \beta \sqrt{R T_0 \gamma}) + \Pi(\alpha + \beta \sqrt{R T_0 \gamma}),$$

où les fonctions P et Π se déterminent d'après les conditions initiales.

Puisque

$$v = v_1 e^{-\frac{x}{2} \beta},$$

l'expression de l'accroissement v sera

$$(54) \quad v = A(x) \cdot \beta + B(x) + e^{-\frac{x}{2} \beta} P(x - \sqrt{RT_0 \gamma} \cdot \beta) + \\ + e^{-\frac{x}{2} \beta} \Pi(x + \sqrt{RT_0 \gamma} \cdot \beta)$$

ou, explicitement

$$(54') \quad \dots \quad v(x, t) = A(x - u_0 t) \cdot t + B(x - u_0 t) + \\ + e^{-\frac{x}{2} t} P[x - (u_0 + \sqrt{RT_0 \gamma}) t] + \\ + e^{-\frac{x}{2} t} \Pi[x - (u_0 - \sqrt{RT_0 \gamma}) t].$$

Pour la détermination de P et Π , on a les conditions (comparez les formules 12 et 14):

$$(55) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} v(x, t) \Big|_{\beta=0} = v^{(in)}(x), \\ \left. \frac{\partial v}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = -\frac{RT_0}{u_0} \frac{d\bar{w}^{(in)}}{dx} - x v^{(in)} + \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu^{(in)} - \left(x + \frac{\lambda v_0}{u_0} \right), \end{array} \right.$$

remarque faite de (54) on a:

$$(56) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x) + \Pi(x) = v^{(in)}(x) - B(x), \\ [\Pi'(x) - P'(x)] \sqrt{RT_0 \gamma} = -\frac{RT_0}{u_0} \frac{d\bar{w}^{(in)}}{dx} + \\ \qquad \qquad \qquad - x v^{(in)} - \frac{\lambda v_0}{u_0} \mu^{(in)} - \left(x + \frac{\lambda v_0}{u_0} \right) + \\ \qquad \qquad \qquad - A(x) + \frac{x}{2} [v^{(in)} - B(x)], \end{array} \right.$$

donc le système de la forme

$$(56') \dots \dots \dots \begin{cases} P(\alpha) + \Pi(\alpha) = M(\alpha), \\ \Pi'(\alpha) + P'(\alpha) = N(\alpha), \end{cases}$$

d'où

$$(57) \dots \dots \dots \begin{cases} P(\alpha) = \frac{1}{2} M(\alpha) + \int N(\alpha) d\alpha \\ \Pi(\alpha) = \frac{1}{2} M(\alpha) + \int N(\alpha) d\alpha. \end{cases}$$

La connaissance de l'état initial de l'atmosphère fera connaître $M(\alpha)$, $N(\alpha)$, et les quadratures nécessaires P et Π .

Pour la détermination de σ et τ on a les relations

$$(58) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + \frac{R u_0}{J c} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

(donc, après l'intégration,

$$(59) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} & \sigma = \sigma^{(in)}(\alpha) - \frac{R u_0}{2 J c} A'(\alpha) \cdot \beta^2 - \\ & - \frac{R u_0}{J c} B'(\alpha) \cdot \beta - \frac{R u_0}{J c} \int_0^\beta [P'(\alpha - \beta \sqrt{R T_0 \gamma}) + \\ & + \Pi'(\alpha + \beta \sqrt{R T_0 \gamma})] e^{-\frac{x}{2} \beta} d\beta; \\ & \tau = \tau^{(in)}(\alpha) - \frac{1}{2} A'(\alpha) \cdot \beta^2 + \\ & - B'(\alpha) \cdot \beta - \int_0^\beta [P'(\alpha - \beta \sqrt{R T_0 \gamma}) + \\ & + \Pi'(\alpha + \beta \sqrt{R T_0 \gamma})] e^{-\frac{x}{2} \beta} d\beta. \end{aligned} \right.$$

Enfin l'accroissement μ se déterminera d'après la formule

$$(60) \dots \mu = -\frac{u_0}{\lambda v_0} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{RT_0}{\lambda v_0} \frac{\partial(\sigma + \tau)}{\partial \alpha} +$$

$$-\frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} v - \left(\frac{\kappa u_0}{\lambda v_0} + 1 \right).$$

IV. Analyse d'état infiniment voisin d'un état donné de l'atmosphère.

Si nos considérations ne concernent que les régions extérieures du cyclon atmosphérique, on aura l'absence des courants verticaux ($w = 0$). Désignant $\log \frac{\rho}{\rho_0} = r$, on aura les équations suivantes, auxquelles doivent satisfaire les mouvements horizontaux en atmosphère (on tient compte du frottement et de la force déviante):

$$(61) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + RT \frac{\partial r}{\partial x} + \\ \qquad \qquad \qquad + R \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda v + \kappa u = 0, \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + RT \frac{\partial r}{\partial y} + \\ \qquad \qquad \qquad + R \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda u + \kappa v = 0, \\ \\ \frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{RT}{Jc} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{array} \right.$$

L'état donné de l'atmosphère dans le domaine considéré est déterminé par le réseau des isobares et des isothermes,

ainsi que par le champ vectoriel des vitesses du vent; on a donc les fonctions

$$(62) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, u^{(in)}) = 0, \\ F_2(x, y, v^{(in)}) = 0, \\ F_3(x, y, T^{(in)}) = 0, \\ F_4(x, y, p^{(in)}) = 0. \end{array} \right.$$

Le problème consiste dans la détermination d'état de l'atmosphère après l'écoulement du temps infiniment petit δt . L'état infiniment voisin est caractérisé par les fonctions:

$$(63) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u = u^{(in)} + f(x, y) \delta t, \\ v = v^{(in)} + \varphi(x, y) \delta t, \\ p = p^{(in)} + \bar{\omega}(x, y) \delta t, \\ T = T^{(in)} + \tau(x, y) \delta t, \end{array} \right.$$

il n'y a donc qu'à calculer les fonctions $f, \varphi, \bar{\omega}, \tau$.

Au lieu de p nous introduisons pour le moment

$$r = r^{(in)} + \psi(x, y) \delta t;$$

$$\left(r^{(in)} = \log_e \frac{p^{(in)}}{RT^{(in)}} \right).$$

Si nous introduirons maintenant ces valeurs infiniment voisines dans le système (61) et égalons à zéro les sommes correspondantes, nous aurons les fonctions cherchées; l'état infiniment voisin sera caractérisé par le système des valeurs suivant:

$$(64) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u = u^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial u^{(in)}}{\partial x} + v^{(in)} \frac{\partial u^{(in)}}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{RT^{(in)}}{p^{(in)}} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial x} + \lambda v^{(in)} + \kappa u^{(in)} \right) \delta t, \end{array} \right.$$

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial v^{(in)}}{\partial x} + v^{(in)} \frac{\partial v^{(in)}}{\partial y} + \right. \\ \quad \left. + \frac{RT^{(in)}}{p^{(in)}} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial y} - \lambda u^{(in)} + \kappa v^{(in)} \right) dt, \\ p = p^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial x} + v^{(in)} \frac{\partial p^{(in)}}{\partial y} + \gamma p^{(in)} \operatorname{div} \bar{v}^{(in)} \right) \delta t, \\ T = T^{(in)} - \left(u^{(in)} \frac{\partial T^{(in)}}{\partial y} + v^{(in)} \frac{\partial T^{(in)}}{\partial y} + \right. \\ \quad \left. + \frac{R}{Jc} T^{(in)} \operatorname{div} \bar{v}^{(in)} \right) \delta t. \end{array} \right.$$

En faisant l'analyse des fonctions f , φ , $\bar{\omega}$, τ , on pourra déterminer les domaines dans lesquels ces fonctions sont négatives ou positives — d'où les conclusions d'ordre physique. Nous signalons, d'ailleurs, que d'après les conclusions ainsi déduites, il ne faut pas discuter beaucoup sur les états prochains de l'atmosphère — les fonctions

$$f, \quad \varphi, \quad \bar{\omega}, \quad \tau$$

font connaître, pour ainsi dire, les tendances présentées par les diverses régions des courants atmosphériques au temps considéré.

L'auteur fait ensuite la remarque concernant certaines inexactitude des formules (64), provenant de l'abstraction faite de quelques agents de la nature.

Quant aux fonctions de la distribution initiale

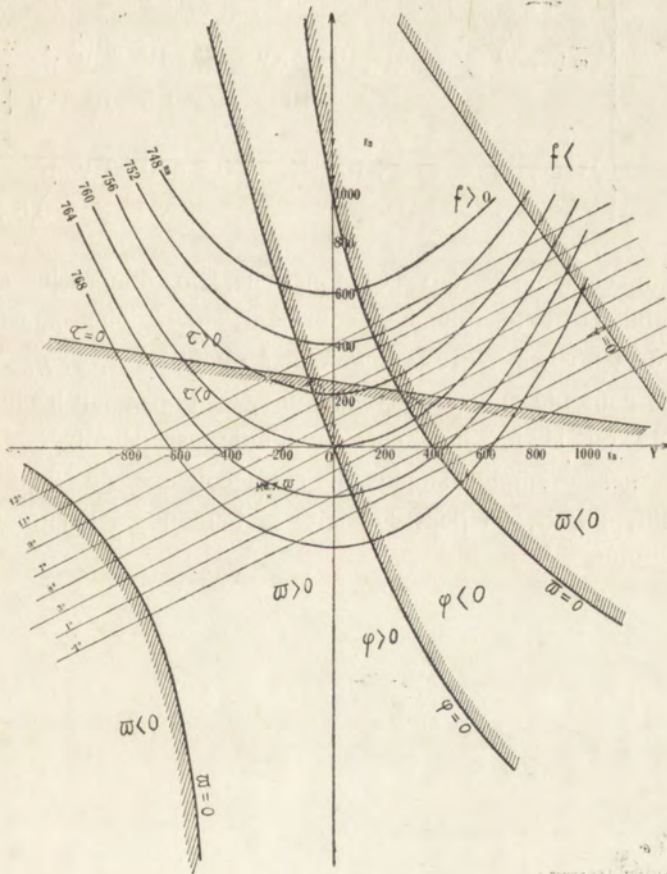
$$u^{(in)}(x, y), \quad v^{(in)}(x, y), \quad p^{(in)}(x, y), \quad T^{(in)}(x, y)$$

on le déterminera d'après l'observation.

Soit le cas particulier simple:

$$(66) \quad \begin{cases} u^{(in)}(x, y) = -5 \cdot 10^{-6} x + 10^{-6} y + 5, \\ v^{(in)}(x, y) = 10^{-5} x + 5 \cdot 10^{-6} y + 5, \\ p^{(in)}(x, y) = -2 \cdot 10^{-5} x + 2 \cdot 10^{-11} y^2 + 760, \\ T^{(in)}(x, y) = 2 \cdot 10^{-5} x - 10^{-5} y + 278, \end{cases}$$

(nous exprimons les longueurs en mètres, le temps en sec.,
pression en] mm. Hg).



5. Jan Samsonowicz:

Kilka słów o dyluwium powiatu Sokołowskiego.

Komunikat zgłoszony dnia 1 Maja 1917 r.

Przedstawił J. Lewiński.

W roku 1914, nie mogąc z powodu wypadków wojennych pracować na terenie gór Świętokrzyskich, spędziłem parę tygodni w okolicach m. Kossowa w powiecie Sokołowskim. W niniejszej notatce podaję właśnie garść spostrzeżeń, które wówczas poczyniłem.

Obszar zbadany przezemnie stanowi część północną pow. Sokołowskiego i opiera się na północy i na wschodzie o Bug. Przerzynają go nieznaczne dopływy Bugu: Chudzina, mająca około 20 km. długości, która płynie z Pd. na Pn., wreszcie Sterdynka i Cetynia, płynące z Pd. Zach. na Pn. Wsch. Każda z nich mierzy na długość około 30 km.

Chudzina posiada szeroką dolinę, której zbocza pokryte są przeważnie piaskami, utworami eluwalnymi i wiatrowymi. Dwie pozostałe rzeczki przerzynają się przez morenę denną. Stąd doliny ich są węższe, zbocza dolin spadzistsze. Gdy jednak rzeczki wydostają się z granic płaskowzgórza moreny dennej na bardzo szeroką starą dolinę Bugu, często zmieniają swój kierunek, silnie meandrują i tracą wiele wody w torfowiskach.

Kierunek tych trzech rzeczek, prostopadły do doliny Bugu, wskazuje, że cały obszar posiada stateczny spadek ku Pn. i Wsch., t. j. ku dolinie Bugu. Najwyższe punkty obszaru przypadają na pas moren czołowych, których wzgórze w Pd. Zach. części załączonej mapki dochodzą do 166 m. nad poziom Bałtyku. Na południe od pasa moren czołowych ciągnie się aż do m. Sokołowa zlekka falista równina, przedstawiająca typowy krajobraz moreny dennej. Na ostatniej miejscami tylko leżą mniej lub więcej obszerne płyty piasków lodowcowo-rzecznych.

W pracach poprzednich badaczy o budowie geologicznej naszego obszaru spotykamy zaledwie krótkie wzmianki. Michalski w swem „Sprawozdaniu z badań geologicznych, dokonanych przy budowie dróg żelaznych Brzesko-Chełmskiej i Sie-

dlecko-Małkińskiej¹⁾, podaje garść szczegółów o morenie dennej i warstwowych utworach lodowcowo-rzecznych. Siemiradzki²⁾ podaje następujący opis miejscowości: „Wyżyna Siedlecka jest pokryta lodowcowym piaskiem na podłożu górno-dyluwialnej gliny lodowcowej, odsłaniającej się w niższych miejscach. Wyżej ponad okolicę sterczą ocalałe od rozmycia szczątki moreny czołowej, wzniesionej po obu stronach Liwca w pobliżu Sokołowa do wysokości 140—130 m. Wszędzie piaszczysta górna glina lodowcowa z głazami, pokryta przez piaski dyluwialne aż do Brześcia.“

W notatce niniejszej nie będę się wdawał w suchy opis odsłonień, których możnaby przytoczyć ilość dość znaczną, lecz wprost przystąpię do opisów poszczególnych utworów dyluwium.

Na obszarze, zbadanym przezemnie, odsłaniają się tylko utwory dyluwialne i alluwialne, mianowicie górna glina lodowcowa (morena denna 3-go zlodowacenia), moreny czołowe, utwory fluwio-glacyalne, wreszcie utwory wiatrowe i eluwialne alluwium. Nigdzie nie znalazłem utworów starszych—pierwszego zlodowacenia, trzeciorzędowych i mezozoicznych.

Jednak wobec faktu, że na wschód od Bugu dyluwium wszędzie spoczywa na utworach trzeciorzędowych i kredowych (odsłonięcie ich istnieje np. w Surażu³⁾), które to utwory odsłaniają się również w Mielniku nad Bugiem⁴⁾ i w Kornicy⁵⁾, wreszcie zostały stwierdzone w otworach świdrowych w Łukowie⁶⁾ (gdzie przykrywa je 67-metrowa warstwa dyluwium), Wildze⁷⁾ i na Pradze⁸⁾),—nie ulega wątpliwości, iż i na naszym terenie

¹⁾ „Pamiętnik Fizyograficzny,” tom VIII, 1888.

²⁾ „Geologia ziem polskich,” tom II, str. 485.

³⁾ A. Gedroyć: „Gieologičeskija izsledowanija w gub. Wilenskoj, Grodnieskoj etc.” Matierjały dla gieologii Rossii. Tom XVII, 1895, str. 242.

⁴⁾ Ibidem, str. 260.

⁵⁾ Skrinnikow A.: „Obzor trieticznych otłożenij siewiernoj czasti Carstwa Polskago.” „Warsz. Uniwers. Izwiestia” 1898—1900.

⁶⁾ A. Rychłowski: „Przyczynki do hydrologii Królestwa Polskiego.” „Przegląd Techniczny,” tom XLIII, 1905, № 27, str. 332.

⁷⁾ J. Siemiradzki: „Otwór świdrowy w Wildze nad Wisłą.” „Pamiętnik Fizyograficzny,” tom V, 1885, str. 72.

⁸⁾ Skrinnikow A.: „Burowaja skwazi na Pradze.” „Protok. Warsz. Obszcz. Jestiestwoisp.” № 8, 1897.

podłoże utworów dyluwialnych stanowią też same, t. j. trzeciorzędowe i kredowe utwory.

Grubość powłoki dyluwialnej jest tu dość niejednolita i, jak się zdaje, wzrasta ku północy, co widać z przekrojów otworów świdrowych, załączonych do wspomnianej notatki A. Rychnowskiego. Tak np. w Korczewie (nad Bugiem, na wschód od Sokołowa) dyluwium mierzy już na grubość 82 metry (w Łukowie 67 m.). Z innych otworów świdrowych nie można powziąć dokładnego pojęcia o grubości dyluwium, gdyż nie jest ono w nich całkowicie przebite, np. w Sterdyni osiągnięto w niem zaledwie 36,8 m.

Morena denna 3-go zlodowacenia.

Najstarszym utworem, odsłaniającym się na naszym obszarze, jest morena denna trzeciego zlodowacenia ¹⁾. Zajmuje ona największą część obszaru, leżąc wielkimi połaciami, gdzieś zapadającymi pod utwory młodsze, lodowcowo-rzeczne. Przerzynają ją niezbyt liczne młode dolinki, tworząc typowy fałisty krajobraz moreny dennej: niskie wzgórza o łagodnych zboczach, szerokie i płaskie kotlinki. Doliny werżnięte są nieznacznie, nie więcej jak na 10—12 m., tak, iż nie zdołały osłonić głębiej leżących utworów.

Morena denna składa się rzadko z typowej gliny zwałowej plastycznej z niewielką domieszką piasku. Podobna glina zwałowa rzadko występuje na powierzchnię: procesy erozyji i deflacji zdołały zwykle unieść lekkie jej cząsteczki, pozostały zaś żwir, piasek i narzuty. Tego rodzaju morena piaszczysta zajmuje zbocza wszystkich dolin i kotlinowate zagłębienia terenu. Niekiedy i piasek bywa wypłukany lub wydmuchany: pozostaje wówczas warstwa głazów lub głazików, leżąca na piaszczystej morenie, pod którą znów znaleźć można typową glinę morenową.

¹⁾ Na profilu otworu świdrowego, podanym przez A. Rychnowskiego z Łukowa (l. c. tabl. XVIII), dają się łatwo wyróżnić dwa poziomy gliny zwałowej, przedzielone 17-metrową warstwą piasków. Są to, bezwątpienia, moreny denne 2-go i 3-go zlodowacenia.

Na terenie m. Kossowa pod cienką warstwą gliny zwałowej wydobywano uwarstwione piaski i żwiry. Możliwe, że są to już utwory międzylodowcowe, czego jednak — z powodu braku dobrych odsłoneń — twierdzić stanowczo nie mogę. Podobnie uławicone piaski i żwiry spotykałem w okolicy wsi Tosie.

Obszary moreny dennej wznoszą się średnio około 130—140 m. nad poziom Bałtyku. Na załączonej mapce doskonale uwidoczniiony jest brzeg tego obszaru, który stanowi najwyższy i najstarszy taras doliny Bugu. Na zwiedzonej przezemnie przestrzeni ciągnie się on przez Łazów, Dzieńcioły do Ceranowa. Tutaj, zgodnie ze zmianą kierunku Bugu, taras również zmienia kierunek na zachodni.

Morena czołowa na zbadanym obszarze nie wykazuje typowego swego wykształcenia: nie tworzy grzbietów o śmiałych zarysach, biegnących w określonym kierunku na znacznej nieraz przestrzeni, nie towarzyszy jej z południa wyraźnie zaznaczony pas sandru, jak to najczęściej ma miejsce na północy etc. Gdy rozważymy warunki powstawania moren czołowych, to przyjdziemy do wniosku, że im dalej na południe, tem 1) wielkość moren czołowych powinna być, mniejsza, 2) skład ich będzie nieco inny, niż moren czołowych północnych, 3) zachowanie będzie gorsze, niż tych ostatnich. Rozważmy pokrótce każdy z tych punktów.

1) Powłoka lodu kontynentalnego, spełzająca z tarczy Finnlandzkiej ku Pd., rozchodziła się w tym kierunku wachlarzowato. Zawierała ona masę materiału skalnego, którego ilość— przy wachlarzowatym rozpełzaniu się lodowca ku Pd.— na jednostce powierzchni maleć powinna. Stąd gdy lodowiec stacjonował gdzieś na południu, morena czołowa tworzyła się wolniej, niż to miało miejsce — po cofnięciu się lodowca — na północy¹⁾.

2) Materiał skalny, przenoszony przez lodowce, stopniowo ulegał rozdrabnianiu i ścieraniu. Część jego wchodziła w skład moreny dennej i wychodziła z obiegu. Część zaledwie materiału i to przeważnie drobnego: żwiru i drobnych narzutów — mogła wejść w skład południowych moren czołowych. Stąd mamy, że moreny czołowe im dalej leżą na południe, tem z drobniejszego składają się materiału, lub ściślej—tem więcej ów drobny materiał przeważa. Często posiadają tu one charakter wzgórz żwirowych, z rzadkimi jeno narzutami większych rozmiarów.

3) Moreny czołowe na południu są mniej lub więcej star-

¹⁾ O ile na szybkość tworzenia się moren czołowych nie wpływała zmiana siły egzaracyi; ostatnia przy zwiększaniu się zasięgu lodowca, a co zatem idzie — znaczniejszej grubości lodu na północy, była bezwątpienia silniejsza.

sze od moren czołowych północnych. Podczas tworzenia się tych ostatnich, t. j. podczas stacyonowania lodowca bardziej na północ, pierwsze podlegały działaniu czynników atmosferycznych i rozpełzaniu się.

Przytem w stosunku do moren czołowych naszego obszaru należy przyjąć pod uwagę okoliczność, że były one wystawione na rujnujące działanie wód jednego z głównych kanałów— rzek lodowcowych, za który służyła przylegająca część dyluwalnej doliny Bugu. Tak więc, moreny czołowe naszego obszaru stanowią bezwątpienia zaledwie szczątki moren starych. Niektóre z nich uległy silniejszemu zniszczeniu: nie tworzą wzgórz, lecz niezaznaczające się w krajobrazie „pola kamieniste.“

W powyższych rozważaniach zawarłem prawie wszystko, co można powiedzieć o dzisiejszym stanie moren czołowych okolic Kossowa. Posiadają one kształty wzgórz, wznoszących się nad otaczającą miejscowością do 15—20 m. Wzgórza te o łagodnych zboczach i zaokrąglonym szczycie są rozrzucone pojedynczo lub też leżą grupami. Przeważna ich ilość jest skupiona w trójkącie między Kossowem, Buczynem i Wrotnowem.

Przedtem, nim zakończę o morenach czołowych, podam przekrój przez jedną z nich, mianowicie przez wzgórze, leżące naprzeciw stacy kolejowej Cielaki. Istnieje na niem odkrywka na żwir i głazy.

Z południowej strony stożka nasypowego moreny czołowej w dołach u jego podnóża odsłania się typowa glina zwałowa, brunatna z licznymi narzutami. Tworzy ona podłoże całego stożka moreny czołowej. Ostatni mierzy około 15 m. wysokości. W istniejącej na jego szczycie odkrywce widzimy zwał głazów wielkości głowy i pięści, zmieszanych ze żwirem i piaskiem. Rzadziej trafiają się wielki głazy, które dosięgają do 2 m. średnicy. Z północnej strony wzgórze do głębokości 2 m. odsłaniają się nieprawidłowo uwarstwione piaski eluwialne.

Moreny czołowe opisywanego obszaru pochodzą prawdopodobnie z tegoż stadyum stacyonowania lodowca, co i moreny czołowe, opisane przez Behr'a i Tietze'go¹⁾ między Koni-

¹⁾ „Die Fortsetzung der Lissaer Endmoränen nach Russisch-Polen und die Endmoränen bei Mława.“ Jahrb. d. K. Pr. G. L.—A. 1912. XXXIII Bd., Teil I.

nem a Kłodawą, przez Rutkowskiego¹⁾ w okolicach Gostynina, wreszcie przez Prawosławlewa²⁾ pod Gombinem na lewym brzegu Wisły i w okolicy Radzikowa na prawym. Możliwe wreszcie, że wspomniane przez ostatniego autora moreny czołowe pod Szepietowem (stacya dr. żel. Warszawsko-Petersburskiej) należą również do tego pasa moren czołowych.

Na tem miejscu nie od rzeczy będzie wspomnieć o składzie petrograficznym moren czołowej i dennej. Nie byłem w stanie robić tu przeliczeń ścisłych np. metodą Milthers'a, przeto o składzie petrograficznym głazów narzutowych powiem tylko ogólnikowo.

Przeważają wśród nich skały krystaliczne. Wapienie, piaskowce etc., jako skały mniej trwałe, prędzej uległy roztraciu na miał i żwir, dlatego wyjątkowo tylko spotykamy okazy wielkości głowy. Przeważnie są one wielkości orzecha laskowego. Wapienie zawierają często skamieniałości syluru nadbałtyckiego. Z innych skał osadowych spotykamy niezbyt często czerwone piaskowce i szare dolomity dewońskie. Z przewodnich skał krystalicznych przeważają gatunki Alandzkie, wśród których najpospolitszymi są Alandzki rapakiwi i Alandzki porfir kwarcowy. Skały szwedzkie — Dala porfiry — nie są rzadkie, lecz głązy ich znacznie ustępują w rozmiarach Alandzkim. Wreszcie warto podkreślić częste występowanie typowego finlandzkiego rapakiwi. Wielkie (do 1,5 m. w średnicy) głązy tej pięknej i charakterystycznej skały, spotykałem wielokrotnie. W skale tej już zdaleka rzucają się w oczy wielkie owoidy różowego ortoklazu, otoczone rąbkami zielonawego oligoklazu. Zbliżka łatwo dostrzedz kuliste — dzięki otopieniu — kryształy kwarcu zadymionego wielkości grochu i czarne plamy wielkich kryształów biotyту i hornblendy.

Jak wyżej nadmienilem, morenom czołowym naszego terenu nie towarzyszy z południa w jakikolwiek wyraźny sposób zaznaczony pas sandru. Możliwe, iż odpowiadają mu przestrzenie piaszczyste na wschód od wsi Cielaki, w okolicach Chruszczówki i t. d. Widocznie, pas sandrowy był tu rozwinięty słabo, piaski,

¹⁾ „Spostrzeżenia z dyluwium okolic Gostynina.“ „Spraw. Tow. Nauk. Warsz.“ 1914, zes. 8.

²⁾ „K izuczenju lednikowych obrazowanij siewiernoj czasti Carstwa Polskago.“ Warszawa, 1905.

w skład jego wchodzące, przeniesione i przerobione w wydmy i t. p. Pozostały na miejscu głaziki i otoczaki, tworzące pustynie kamieniste w miniaturze. Widzimy to na wschód od wsi (Cielaki. Tutaj — jak wykazują wysepki piasków o poprzednim poziomie — poziom ów został obniżony o jakieś 3 metry. Piaski zostały wydmuchane i uformowały wydmy, przesuwane się w kierunku Pd. Wsch.

Utwory fluwio-glacyalne. Utwory te są przeważnie silnie zrujnowane, przerobione i przemieszczone. Górne piaski i żwiry pokrywały niegdyś znacznie większą przestrzeń, niż obecnie. Była ona miejscem intensywnego osadzania się materiału z wód, wypływających z topniejącego i cofającego się lodowca. W późniejszych czasach, gdy nastął okres denudacji, znaczna część utworów lodowcowo-rzecznych została zmyta, przerobiona i przemieszczona. Pozostały tylko wyspy tych utworów w postaci kapryśnie uwarstwionych piasków i żwirów, zawierających miejscami wtrącenia gliny, które leżą na morenie dennej. Największy szmat górnych piasków występuje w okolicach Chruszczówki.

Za właściwe fluwio-glacyalne utwory należy uważać te tylko, które pokrywają obecnie najwyższy taras doliny Bugu, wznoszący się nad drugim tarasem o kilka do kilkunastu (15) metrów. Ów drugi taras zbudowany jest również z utworów piaszczysto-żwirowych, lecz już nieco późniejszego pochodzenia. Zostały one osadzone przez wody rzek-kanalów lodowcowych.

Wydmy. Utwory fluwio-glacyalne uległy silnej erozyi i deflacji. Pierwsza zapełniła nimi mniej lub więcej wszystkie zagłębienia terenu. Druga oddawna układa piasek w szeregi wydm, ciągnących się często na bardzo znacznej, gdyż wynoszącej kilometry przestrzeni. Wśród wydm wyróżniamy wydmy stare i współczesne. Pierwsze zajmują znaczną przestrzeń na wschód od wsi Tosie, na zachód od Maliszewy i t. d.

O znacznej ich starości świadczy — między innymi — fakt znajdowania przezemnie na ich szczycie neolitycznych stanowisk krzemienych (Tosie, Żochy etc.). Wydmy stare najczęściej posiadają kierunek południkowy, młode zaś ciągną się z Pn. Wsch. na Pd. Zach. i stopniowo wędrują na Pd. Wsch.

Pozostałością po lodowcach są niewielkie, w znacznej mierze zatorfione jeziorka, leżące zwykle w pobliżu moren czółowych. Jedno z nich leży przy koloniach Cielakowskich, inne — nieco na Pn. od Dybowa, jeszcze inne pod Chruszczówką i t. d. Dość wielkie, obecnie całkowicie zatorfione jeziorko, istnieje na wschód od Tosiów; posiadało ono odpływ ku wschodowi.

Cały szereg jeziorek znajduje się na drugim tarasie Buggu. Łączą się one z szerokimi i płaskimi dolinami rzeczek. Są to łąchy Bugu, etapy przesuwania się łożyska rzeki.

Wreszcie na trzecim, jeszcze młodszym tarasie Bugu, składającym się z gleby mocno humusowej, rozrzucone są liczne i młode łąchy Bugu. Taras ten przechodzi w taras drugi nieznacznie i wznosi się nad poziomem rzeki o jakieś 2—3 metry. Pod glebą humusową grubości 0,75 m. występuje tu poziomo uwarstwiony gruboziarnisty piasek z wtrąceniami żwiru, mocno cementowany żelaziakiem brunatnym.

Zakład Geologiczny Uniwersytetu.

ZUSAMMENFASSUNG.

Jan Samsonowicz:

Das Diluvium im Kreise Sokołów.

Angemeldet an 1.V 1917.

Vorgelegt von J. Lewiński.

Während seiner dreiwöchentlichen Aufenthalt in der Gegend des Städtchen Kossów hat der Verfasser folgende diluviale Ablagerungen festgestellt:

Grundmoräne, die von fluvioglacialen Sanden und Kiesen bedeckt ist und die erste Bug-Terrasse aufbaut;

Endmoränen, deren einzelne zerstörte Kegeln keine bestimmte Richtung aufweisen; vielleicht sind sie gleichzeitig mit den von Behr und Tietze¹⁾ (zwischen Konin und Kłodawa), von

¹⁾ „Die Fortsetzung der Lissaer Endmoränen nach Russisch-Polen etc.“
Jahrb. d. K. Pr. G. L.—A. 1912. XXXIII Bd. Teil I.

BRANDON TOW HART WREZ. N. X. 1811

BRANDON TOW HART WREZ. N. X. 1811

Rutkowski¹⁾ (bei Gostynin) und von Prawosławlew²⁾ (bei Gombin und Radzików) beschriebenen Endmoränen.

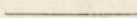
Die zweite Bug-Terrasse, die ca. 20 Meter niedriger als die erste liegt, besteht aus Taldiluvium (Sande und Tone mit zahlreichen Mooren).

Die dritte, alluviale Terrasse liegt 2—3 Meter niedriger als die zweite.

Die zahlreichen Dünen weisen zwei Richtungen nach: N—S (alt-alluviale Dünen) und NO—SW (junge Dünen).

In der Nähe der Endmoränen liegen einige kleine Seen, die jetzt durch die Moore fast ganz ausgefüllt sind.

Geologische Institut der Universität.
Warszawa.



¹⁾ „Spostrzeżenia z dyluwium okolic Gostynina.“ „Spraw. Tow. Nauk. Warsz.“ 1914, zes. 8.

²⁾ „K izuczenju lednikowych obrazowanij siewiernoj czasti Carstwa Polskago.“ Warszawa, 1905.

6. Maryan Kowalski:

Próby zastosowania ozonu do analizy jakościowej i ilościowej: sole Ni.

Komunikat zgłoszony dn. 19 Grudnia 1916 roku.

Przedstawił St. J. Thugutt.

Do otrzymania ozonu użyto ozonizatora o rurze 650 mm. długości i 7 mm. przekroju wewnętrznego. Odległość biegunów cewki 190 mm.; normalny woltaż lampkowy — 120 w.; 2 oporniki — jeden stały, drugi z regulowaniem. Przy szybkości przepływu powietrza 3 — 5 pęcherzyków na 1 sek. (0,2 litra na minutę) — wydajność ozonu koło 0,8%.

Wobec niewielkich ilości ozonu używano do doświadczeń najwyżej — 0,5 gr. substancji.

1) Ilościowe oznaczenie niklu w solach Ni.

Przy strącaniu niklu w postaci $\text{Ni}(\text{OH})_2$ — następują się pewne trudności przy wymywaniu osadu; osad wyprażony zawiera nieznaczne ilości alkaliów — co powoduje wyniki zbyt wysokie. Zazwyczaj też strąca się nikiel w postaci $\text{Ni}(\text{OH})_3$ za pomocą wodzianu potasowego (lub sodowego) i wody bromowej. Do otrzymywania $\text{Ni}(\text{OH})_3$ użyłem ozonu w warunkach niżej podanych. 10 cm³ — 5% roztworu NiSO_4 (chem. czystego) strącałem niewielkim nadmiarem świeżego wodzianu potasowego i przez płyn z osadem przepuszczałem ozon na zimno. Po 15-tu minutach wypadł czarny osad $\text{Ni}(\text{OH})_3$; po 30 minutach próba przesącza nie wykazywała obecności Ni (odczynnik Brunck'a - Czuga jewa); przepuszczałem ozon dla upewnienia się jeszcze 10 minut. Osad wymywa się niezmiernie łatwo — nie absorbuje alkaliów. Równolegle w tej samej ilości soli Ni (10 cm³ — 5%-ego roztworu) oznaczałem Ni metodą bromową; próby powtórzone kilkakrotnie dały wyniki zupełnie zbliżone przy obu metodach.

| wzięto do oznaczenia | przy użyciu wody bromowej | przy użyciu ozonu |
|--|------------------------------|-------------------|
| 10 cm ³ — 5%-go (ściśle) roztworu — chemicznie czystego NiSO_4 | a) 0.2415 gr. } NiO | 0.2422 gr. } NiO |
| | b) 0.2421 gr. } | 0.2424 gr. } |
| | c) 0.2419 gr. } | 0.2416 gr. } |

Ogrzewanie przy przepuszczaniu ozonu nie przyspiesza powstawania $\text{Ni}(\text{OH})_3$.

2) Ni i Co

W celu rozdzielenia Ni i Co stosowałem utlenianie ozonem wodorotlenków niklowego i kobaltowego do $\text{Ni}(\text{OH})_3$ i $\text{Co}(\text{OH})_3$, sądząc, iż przy powstawaniu rozpuszczalnych kobałtyaków — uda się utrzymać nikiel w postaci nierozpuszczalnej; traktowanie wodorotlenków (wyższych) Ni i Co amoniakiem nie dało wyników dodatnich: minimalne nawet ilości soli amonowych powodują rozpuszczalność wodorotlenku niklowego. Spróbowałem więc utlenić Ni i Co w roztworze amoniakalnym. Co — w tych warunkach pozostaje bezwarunkowo w postaci rozpuszczalnej (co stwierdza doświadczenie). Ni zaś w roztworach amoniakalnych szczególnie w postaci soli podwójnej $\text{NiSO}_4 \cdot (\text{NH}_4)_2 \text{SO}_4$ — uważali Janna sch i Gottschalk¹⁾ za niemożliwy do otrzymania w formie osadu; używali oni tej soli do rozdzielania Ni i Mn; Mn otrzymywali w osadzie (MnO_2 — względnie wodorotlenków) — gdy nikiel pozostawał w roztworze. Po dwugodzinnym traktowaniu ozonem mieszaniny $\text{NiSO}_4 \cdot (\text{NH}_4)_2 \text{SO}_4$ i $\text{CoSO}_4 \cdot (\text{NH}_4)_2 \text{SO}_4$ — w roztworze amoniakalnym — przeważna ilość niklu strąciła się jednak w postaci $\text{Ni}(\text{OH})_3$ — gdy Co pozostał w roztworze całkowicie. Mocniejszy ozonizator przy użyciu tlenu zamiast powietrza, pozwoli może opracować tę metodę.

3) Ni i Cr^{III}.

Mieszaninę soli niklowych i chromowych strąciłem wodziannym potasu i przez mieszaninę przepuszczałem ozon: po godzinie prawie wszystkie Cr przeszedł do roztworu w postaci K_2CrO_4 , a nikiel był w osadzie w postaci $\text{Ni}(\text{OH})_3$. Po dwu godzinach rozdział był prawie ilościowy. Do jakościowej pracy doświadczenie to może być stosowane, gdyż nie wielkie (0,1 gr.) ilości Cr utleniają się dość szybko i można je wykryć po odsączeniu małej próbki drogą zwykłą.

Warszawa.

II Zakład chemiczny Uniwersytetu Warszawskiego.

¹⁾ Chem. Ztrbt. 1906. II. 711.

M. Kowalski:

Essais sur l'application de l'ozone à l'analyse qualitative et quantitative de sels de nickel.

Communication annoncée le 19.XII.1916.

Présentée par St. J. Thugutt.

Pour la préparation de l'ozone je me servais d'une bobine donnant 0,8% de rendement; on n'employait donc pour une expérience plus de Ogr. 5 de matière.

1) Détermination quantitative de Ni dans ses sels.

L'analyse de sels de Ni à l'aide de Ni(OH)_2 , donne en général de résultats supérieurs à la vérité, à cause d'impossibilité d'éliminer les alcalis du précipité par lavage.

Dernièrement employe-t-on la précipitation du Ni en état de Ni(OH)_3 à l'aide de KOH et de l'eau de brome.

Pour obtenir le précipité de Ni(OH)_3 j'ai appliqué l'ozone dans les conditions suivantes:

Je précipitais 10 cm³ d'une solution à 5% de NiSO_4 (chim. pur.) par un faible excès de KOH à 10%, et je traitais tout par un courant d'ozone à froid. Après 15 min. se formait un précipité noir de Ni(OH)_3 ; après 30 min. — une prise d'essai filtré — ne donnait plus de réaction avec le réactif de Brunck-Tschugaeff. Le lavage s'effectuait très facilement, le précipité ne retenait plus d'alcalis. Voici les résultats comparatifs, obtenus par les 2 méthodes oxydantes:

| Emploi d'eau de brome | Emploi d'ozone |
|-----------------------|---------------------|
| a) 0.2415 gr. } NiO | a) 0.2422 gr. } NiO |
| b) 0.2421 gr. } | b) 0.2422 gr. } |
| c) 0.2419 gr. } | c) 0.2416 gr. } |

Le chauffage du liquide pendant l'action de l'ozone n'accélérerait pas la précipitation.

Dans le but d'élaborer une méthode de séparation du Ni du Co j'ai essayé une oxydation des hydroxydes inférieurs en $\text{Ni}(\text{OH})_3$ et $\text{Co}(\text{OH})_3$ par l'ozone en présence de l'ammoniaque, croyant que la formation de cobaltiaques solubles permettra d'isoler très bien de $\text{Ni}(\text{OH})_3$. Les essais ont été négatifs à cause de solubilité de $\text{Ni}(\text{OH})_3$ dans les sels d'ammonium.

3) Ni et Cr.

Un mélange de sels de Ni^{2+} et Cr^{3+} , précipité par le potasse traité par l'ozone: — après une heure d'action presque tout Cr est passé en solution à l'état de K_2CrO_4 et le Ni — donna un précipité de $\text{Ni}(\text{OH})_3$. Après deux heures la séparation était presque complète, mais la réaction ne marche pas quantitativement jusqu'au bout.

The first part of the paper is devoted to the study of the
 properties of the function $f(x)$ defined by the equation
 $f(x) = \int_0^x f(t) dt$. It is shown that $f(x)$ is a
 constant function. The second part of the paper is devoted
 to the study of the function $g(x)$ defined by the equation
 $g(x) = \int_0^x g(t) dt + x$. It is shown that $g(x)$ is a
 linear function. The third part of the paper is devoted
 to the study of the function $h(x)$ defined by the equation
 $h(x) = \int_0^x h(t) dt + x^2$. It is shown that $h(x)$ is a
 quadratic function.

The fourth part of the paper is devoted to the study of
 the function $k(x)$ defined by the equation
 $k(x) = \int_0^x k(t) dt + x^3$. It is shown that $k(x)$ is a
 cubic function. The fifth part of the paper is devoted
 to the study of the function $l(x)$ defined by the equation
 $l(x) = \int_0^x l(t) dt + x^4$. It is shown that $l(x)$ is a
 quartic function.

OD REDAKCYI.

1. „Sprawozdania” wychodzą w postaci zeszytów miesięcznych i zawierają protokoły posiedzeń naukowych Wydziałów T-wa, drukowane z zachowaniem oddzielnej paginacji dla każdego Wydziału. W miesiącach: lipcu, sierpniu i wrześniu „Sprawozdania” nie wychodzą.

2. Obok działu naukowego, obejmującego nadewszystko: komunikaty, jako też pokazy naukowe oraz dyskusję, w „Sprawozdaniach” podaje się nadto listę obecności oraz, w miarę potrzeby, streszczenie protokołu załatwianych na posiedzeniach spraw bieżących.

Obok komunikatów wygłaszanych na posiedzeniach wedle porządku dziennego, mogą być drukowane również i prace nadsyłane, o ile pochodzą one od członków T-wa w odpowiednich Wydziałach i o ile otrzymane rękopisy gotowe są do druku.

3. Poszczególne artykuły nie powinny w „Sprawozdaniach” przekraczać zakresu 2 arkuszy druku. W przeciwnym razie winny być drukowane w charakterze rozpraw naukowych w seryi „Prac” odpowiedniego Wydziału w „Sprawozdaniach” zaś podaje się wzmiankę protokółarną.

4. Komplet wydanych w ciągu roku zeszytów „Sprawozdań” stanowi rocznik, uzupełniony dodaniem zeszytu Sprawozdania rocznego z działalności T-wa oraz karty okładowej i spisu rzeczy.

5. Komunikaty jako też objaśnienia pokazów drukuje się, stosownie do życzenia autorów, wraz ze streszczeniami w jednym z czterech języków obcych: francuskim, angielskim, włoskim lub niemieckim.

6. Na koszt redakcyi mogą być umieszczane w „Sprawozdaniach” tylko rysunki tekstowe, o ile nadają się do reprodukcji cynkograficznej.

7. Do czasu ustalenia się pisowni polskiej przestrzega się zasad pisowni Akademii Umiejętności w Krakowie. Wyjątki w tym względzie czyni się jedynie dla autorów prac z zakresu językoznawstwa, o ile nietykalność pisowni została przez nich osobiście zastrzeżona.

8. Przemówienia w dyskusyi składa się sekretarzom Wydziałów, na posiedzeniu. Teksty przemówień w dyskusyi, nadsyłane po posiedzeniu, drukowane nie będą. Rękopisy komunikatów oraz objaśnienia, dotyczące pokazów, należy składać najpóźniej po upływie tygodnia po odbytem posiedzeniu; w przeciwnym razie w „Sprawozdaniach” podaje się tylko tytuł. W tym terminie autorowie winni dostarczyć gotowych klisz cynkograficznych.

9. Autorowie drukowanych w „Sprawozdaniach” prac otrzymują bezpłatnie 100 zwykłych odbitek łącznie z protokołem ewentualnej dyskusji i streszczeniem w języku obcym. Na żądanie większej liczby odbitek, wyrażone na rękopisie oraz na ostatniej korekcie, mogą otrzymać większą ich ilość, ponosząc koszty broszurowania.

10. Materiał, przeznaczony do druku, winien być pisany na jednej stronie, z pozostawieniem marginesu i wolnego miejsca przed tytułem do notat redakcyjnych.

11. Podkreślenia: Nazwiska, wyrazy lub zdania, które autor chce mieć wydrukowane czcionkami rozstawionymi, należy podkreślać linią punktową. Nazwy techniczne, gatunkowe i t. d. wyróżnia się w druku kursywą, w rękopisie zaś podkreśla się linią pojedynczą. Wyrazy lub znaki wyjątkowego znaczenia, mające być wydrukowane czcionkami grubymi należy podkreślać linią podwójną.

12. Autorowie winni zwracać drukarni przysyłane im korekty w możliwie krótkim czasie; mają też prawo, w przypadkach wyjątkowych, żądać od drukarni przysłania powtórnej korekty. Autorowie zamiejscowi otrzymują tylko jedną korektę. Na ostatniej korekcie autor winien położyć swój podpis oraz wyrazić życzenie co do ilości oddzielnych odbitek.

Cena rocznika w prenumeracie wynosi **rb. 4**; cena każdego pojedynczego zeszytu **kop. 50**.

SPIS WYDAWNICTW Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

I. Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. za lata:

- r. I (1908), r. II (1909), r. III (1910), r. IV (1911), r. V (1912), r. VI (1913),
r. VII (1914), r. VIII (1915), r. IX (1916).

II. Prace Wydziału I-go:

- Nr. 1. Kazimierz Nitsch: Z historii polskich rymów. 1912.
Nr. 2. Kazimierz Wóycicki: Wiersz „Barbary Radziwiłłówny“ A. Fe-
lińskiego. 1912.
Nr. 3. Tytus Benni: Samogłoski polskie. 1912 r.
Nr. 4. Kazimierz Wóycicki: Historia literatury i poetyka. 1914.
Nr. 5. Kazimierz Wóycicki: Ośmiozgłoskowiec trocheiczny polski.
1916.
Nr. 6. Kazimierz Wóycicki: Wyspiański i Szujski. 1917.

III. Prace Wydziału II-go:

- Nr. 1. Henryk Konic: Materiały do dziejów Komisji Rządzącej. 1910.
Nr. 2. Ig. Tad. Baranowski: Materiały do dziejów wsi polskiej. 1910.
Nr. 3. Ig. Tad. Baranowski: Księgi referendarskie. 1910.
Nr. 4. Witold Schreiber: Badania nad antropologią dzieci chrześcijań-
skich, żydowskich i karaimskich w Galicyi. 1910.
Nr. 5. Bronisław Bouffał: Teorya odpowiedzialności organów władzy
administracyjnej we współczesnem prawie politycznem. 1911.
Nr. 6. Stanisław Poniąkowski: O wpływie błędów obserwacyjnych na
wskaźniki antropologiczne. 1912.
Nr. 7. Jan Jakubowski: Studya nad stosunkami narodowościowemi na
Litwie przed Unią Lubelską. 1912.
Nr. 8. Aleksander Kraushar: W sprawie fundacyi naukowej T-wa im.
Józefa Aleksandra Jabłonowskiego, wojewody nowogrodzkiego
w Lipsku. 1912.
Nr. 9. Edward Bogusławski: Dowody autochtonizmu Słowian na
przestrzeni, zajmowanej przez nich w wiekach średnich. 1912.
Nr. 10. Ludomir Sawicki: Studya nad Abisynią. 1913.
Nr. 11. Kazimierz Wachowski: Jomsborg. 1914.

Nr. 12. Kazimierz Konarski: Polska przed odsieczą wiedeńską. 1683 r. 1914.

IV. Prace Wydziału III-go:

- Nr. 1. Z. Weyberg: Syntezy pirogenetycznych glinokrzemianów zasadowych. 1908.
- Nr. 2. Władysław Janowski: Współczesne metody badania serca. 1910.
- Nr. 3. Maryan Eiger: Topografia zwojów nerwowych wewnątrzsercowych u świnki morskiej, myszy białej i człowieka. 1911.
- Nr. 4. Edward Loth: Badania antropologiczne nad mięśniami murzynów. 1913.
- Nr. 5. Jan Czekanowski: Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologii. 1913.
- Nr. 6. Stanisław Poniałowski: Badania antropologiczne nad kością skokową. 1913.
- Nr. 7. Jan Lewiński: Utwory dyluwialne i ukształtowanie powierzchni przedlodowcowej dorzecza Przemszy. 1914.
- Nr. 8. Bronisław Rydzewski: Próba charakterystyki paleobotanicznej Dąbrowskiego Zagłębia węglowego. 1915.
- Nr. 9. Wacław Roszkowski i Anzelma Żebrowska. O budowie pochewek prącia u błotniarek (*Limnaea Lam.*). 1915.
- Nr. 10. Stanisław Pawłowski: Ze studyów nad zlodowaceniem Czarnohory. 1915.
- Nr. 11. Jan Tur: Nowe badania nad rozwojem układu nerwowego potworów platyneurycznych. 1915.
- Nr. 12. Jan Krassowski: O ruchu planetoid typu $\frac{3}{4}$ (Thule). 1916.
- Nr. 13. January Kołodziejczyk: Stosunki florystyczne jeziora Świtezi. 1916.
- Nr. 14. Jadwiga Loth-Niemirycz: Badania anatomiczne i antropologiczne nad kanałem wyrostków poprzecznych (*canalis transversarius*) kręgów szyjowych człowieka i małp. 1916.
- Nr. 15. W. Pogorzelski: Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze. 1916.
- Nr. 16. Jan Lewiński: Z morfologii i geologii stepów czarnomorskich 1916.
- Nr. 17. Jan Tur: Badania nad rozwojem *Chalcides lineatus* Leuck. 1916.
- Nr. 18. Janusz Domaniewski: Fauna Passeriformes okolic Saratowa. 1916.
- Nr. 19. Henryk Raabe: Pokolenia jesienne *Amoebidium parasiticum*. 1916.
- Nr. 20. Jan Samsonowicz: Utwory dewońskie wschodniej części gór Świętokrzyskich. 1917.
- Nr. 21. Gustaw Potworowski: Studya teratogenetyczne. 1917.
- Nr. 22. Stanisław Sumiński: O budowie i rozwoju narządów kopulacyjnych samczych u *Anax imperator* Leach. (Odonata, Aeschnidae). 1917.

V. Wydawnictwa Wydziału I-go:

- Nr. 1. Aleksander Brückner: Jana hr. Potockiego prace i zasługi naukowe. 1911.
- Nr. 2. Prace Komisji do badań nad historią literatury i oświaty. Tom I-szy 1914.
- Nr. 3. Kazimierz Wóycicki: Forma dźwiękowa prozy polskiej i wiersza polskiego. 1912.
- Nr. 4. Manfred Kridl: Listy Juliusza Słowackiego. 1915.
- Nr. 5. Maurycy Mann: „Poganka“ Narcyzy Żmichowskiej. 1916.
- Nr. 6. Stanisław Słoński: Psałtż Puławski. 1916.

VI. Wydawnictwa Wydziału II-go:

- Nr. 1. Władysław Konopczyński: Dyaryusze sejmowe z w. XVIII-go i Dyaryusz sejmu z roku 1748. Tom I—II. T. I—1911. T. II—1, 12.
- Nr. 2. Marceji Handelsman: Dyaryusze Sejmów Księstwa Warszawskiego. Zeszyt I. Dziennik posiedzeń izby poselskiej sejmu roku 1809. 1913.
- Nr. 3. Teodor Wierzbowski: Przywileje królewskiego miasta stołecznego Starej Warszawy, 1376 — 1772. 1913.

VII. Wydawnictwa wydziału III-go:

- Nr. 1. Władysław Gorczyński: Materiały do poznania opadów w Królestwie Polskiem. 1912.
- Nr. 2. Edward Flatau: Migrena. 1912
- Nr. 3. Paleontologia Ziemi Polskich, № 1. Józef Siemiradzki: Gąbczaki jurajskie ziem polskich. 1913.
- Nr. 4. Władysław Gorczyński: Materiały, zebrane w r. 1911 na stacjach Sieci Meteorologicznej Warszawskiej. 1913.
- Nr. 5. Zygmunt Wóycicki: Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. — 1912—14 r.
- Nr. 6. Henryk Dziedzicki: Atlas organów rozrodczych u Mycetophilidae. 1915 r.
- Nr. 7. Edward Flatau: Prace z pracowni neurobiologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 8. Kazimierz Stołyhwo: Prace z Pracowni antropologicznej. T. I. 1916.

VIII. Roczniki Tow. Nauk. Warsz.

Rok VI (1913), rok VII (1914), rok VIII (1915).

