XXX.

SOPRA LE EQUAZIONI DI HERTZ

« Nuovo Cimento », ser. 3, vol. XXIX, 1891, pp. 53–63.

1. In una Memoria, la cui traduzione è comparsa nel fascicolo precedente di questo giornale, HERTZ ha ricavato da uno stesso sistema di equazioni differenziali le leggi note della elettrostatica, del magnetismo e della elettrodinamica pel caso dei corpi in quiete. In una Memoria stampata nell'ottobre scorso negli « Annali di Wiedemann » lo stesso Autore ha stabilito delle equazioni differenziali analoghe pel caso dei corpi in moto. La ipotesi da cui egli è partito per giungere a queste ultime equazioni è la seguente:

Nel caso dei corpi in quiete la variazione istantanea dello stato magnetico dipende unicamente dalla ripartizione della forza elettrica nelle vicinanze del punto. In un corpo in movimento a questa variazione se ne aggiunge una seconda che si sovrappone in ogni istante alla prima e che proviene dalla deformazione che ha luogo nelle vicinanze del punto per il movimento. Ammetteremo che l'influenza del movimento sia tale che, se essa agisse da sola, le linee di forza magnetiche sarebbero trasportate dal corpo nel suo moto. Lo stesso ammetteremo per la variazione della polarizzazione elettrica dovuta al movimento » [1].

Partendo da tale ipotesi HERTZ è giunto alle sue equazioni nelle quali egli fa comparire, come in quelle per i corpi in quiete, le componenti della forza magnetica, quelle della forza elettrica, le componenti delle polarizzazioni elettriche e magnetiche e le componenti della corrente elettrica.

La detta ipotesi fondamentale di HERTZ, essendo relativa alle linee di forza elettriche e magnetiche, mi sono proposto di ottenere le equazioni fondamentali della elettrodinamica pel caso dei corpi in quiete, in modo da porre in evidenza gli elementi proprî ad individuare le dette linee di forza. In tal modo ricorrendo ad un sistema di coordinate curvilinee si giunge ad *un sistema di equazioni differenziali, le quali, seguendo la ipotesi di* HERTZ, *si estendono senza alcuna modificazione al caso dei corpi in moto.* Le variabili indipendenti relative allo spazio che in esse compariscono sono quei parametri che individuano sempre le medesime particelle dei corpi che si considerano, analoghi a quei parametri che si scelgono come variabili indipendenti nelle equazioni della idrodinamica di LAGRANGE [2].

(1) « Wied. Ann. », Bd XLI, s. 372.

(2) Vedi KIRCHHOFF, *Mechanik*, 2. e Auflage, s. 163.

Mi sembra che le equazioni (V), (V′) della presente Nota, le quali sotto la stessa forma rappresentano le equazioni fondamentali della elettrodinamica, tanto nel caso di corpi in moto, quanto nel caso dei corpi in quiete esprimano analiticamente in maniera evidente la ipotesi fondamentale di HERTZ.

2. Denotiamo con

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3 \;;\; \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3 \;;\; X_1, X_2, X_3 \;;\; L_1, L_2, L_3 \;;\; w_1, w_2, w_3,$$

le componenti della forza elettrica, della forza magnetica, della polarizzazione elettrica, di quella magnetica e le componenti della corrente elettrica.

Queste quantità saranno legate fra loro dalle relazioni lineari

$$\text{(I}'\text{)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{X}_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 \quad , & \mathrm{L}_1 = \beta_{11} L_1 + \beta_{12} L_2 + \beta_{13} L_3 , \\ \mathrm{X}_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 \quad , & \mathrm{L}_2 = \beta_{21} L_1 + \beta_{22} L_2 + \beta_{23} L_3 , \\ \mathrm{X}_3 = \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 \quad , & \mathrm{L}_3 = \beta_{31} L_1 + \beta_{32} L_2 + \beta_{33} L_3 , \\ \multicolumn{2}{c}{w_1 = \gamma_{11} X_1 + \gamma_{12} X_2 + \gamma_{13} X_3 + w_1^0} \\ \multicolumn{2}{c}{w_2 = \gamma_{21} X_1 + \gamma_{22} X_2 + \gamma_{23} X_3 + w_2^0} \\ \multicolumn{2}{c}{w_3 = \gamma_{31} X_1 + \gamma_{32} X_2 + \gamma_{33} X_3 + w_3^0} \end{array} \right.$$

essendo $\alpha_{is} = \alpha_{si}$, $\beta_{is} = \beta_{si}$, $\gamma_{is} = \gamma_{si}$. Le w_1^0, w_2^0, w_3^0 sono delle quantità dipendenti solo dalle forze elettromotrici nei varii punti dello spazio.

Si ponga, chiamando x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane (3),

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \varphi \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)} \\[2ex] X_2 = \varphi \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)} \\[2ex] X_3 = \varphi \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)} \end{array} \right. \qquad \text{(II}'\text{)} \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \psi \dfrac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(x_2, x_3)} \\[2ex] L_2 = \psi \dfrac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(x_3, x_1)} \\[2ex] L_3 = \psi \dfrac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(x_1, x_2)} . \end{array} \right.$$

Avremo

$$X_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} X +_2 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi_1}{dx_3} = 0 \quad , \quad X_1 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi_2}{dx_3} = 0$$

$$L_1 \frac{d\psi_1}{dx_1} + L_2 \frac{d\psi_1}{dx_2} + L_3 \frac{d\psi_1}{dx_3} = 0 \quad , \quad L_1 \frac{d\psi_2}{dx_1} + L_2 \frac{d\psi_2}{dx_2} + L_3 \frac{d\psi_2}{dx_3} = 0$$

quindi le linee

$$\varphi_1 = \text{cost} \quad , \quad \varphi_2 = \text{cost}$$

saranno le linee di forza elettriche e le

$$\psi_1 = \text{cost} \quad , \quad \psi_2 = \text{cost}$$

le linee di forza magnetiche.

(3) Col simbolo $\dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_i, x_s)}$ intenderemo denotare il *determinante funzionale* delle φ_1, φ_2 rispetto alle variabili x_i, x_s. Lo stesso si dica dei simboli analoghi usati appresso.

Se denotiamo con F la risultante di X_1, X_2, X_3, preso un tubo di forza formato dalle superficie

$$\varphi_1 \quad , \quad \varphi_2 \quad , \quad \varphi_1 + d\varphi_1 \quad , \quad \varphi_2 + d\varphi_2 ,$$

sarà

$$\varphi \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 = \mathrm{F} d\sigma$$

essendo $d\sigma$ la sezione del tubo di forza.

3. Prendendo un sistema di coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3 e ponendo

$$\mathrm{D} = \frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

avremo

$$X_i = \varphi \left[\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_2, u_3)} \frac{d(u_2, u_3)}{d(x_{i+1}, x_{i+2})} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_3, u_1)} \frac{d(u_3, u_1)}{d(x_{i+1}, x_{i+2})} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_1, u_2)} \frac{d(u_1, u_2)}{d(x_{i+1}, x_{i+2})} \right]$$

$$= \frac{\varphi}{\mathrm{D}} \left[\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_2, u_3)} \frac{dx_i}{du_1} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_3, u_1)} \frac{dx_i}{du_2} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_1, u_2)} \frac{dx_i}{du_3} \right].$$

Quindi ponendo per semplicità

(1) $$U_i = \frac{\varphi}{\mathrm{D}} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})}$$

avremo

(2) $$X_h = \Sigma_i \, U_i \frac{dx_h}{du_i}.$$

Avremo pure con un calcolo identico, ponendo

(1′) $$V_i = \frac{\psi}{\mathrm{D}} \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})}$$

(2′) $$L_h = \Sigma_i \, V_i \frac{dx_h}{du_i}.$$

4. Esaminiamo ora la forma quadratica

$$f = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \, \alpha_{rs} \, X_r X_s .$$

Chiamando A_{rs} i coefficienti della forma trasformata nelle variabili U_i, si otterrà

$$f = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \, \mathrm{A}_{rs} \, U_r \, U_s .$$

Quindi

$$\Sigma_r \frac{df}{dX_r} dx_r = \Sigma_r \frac{df}{dU_r} du_r .$$

Ora per le (I′)

$$\Sigma_r \frac{df}{dX_r} dx_r = \Sigma_r \, \mathrm{X}_r \, dx_r .$$

Ponendo analogamente

(3) $$\frac{df}{dU_r} = \Sigma_s \, \mathrm{A}_{rs} \, U_s = \mathrm{U}_r ,$$

risulterà

(4) $$\Sigma_r X_r\, dx_r = \Sigma_r U_r\, du_r\,.$$

In modo del tutto simile considerando la forma quadratica

$$f' = \frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s \beta_{rs} L_r L_s = \frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s B_{rs} V_r V_s$$

e ponendo

(3′) $$\Sigma_s B_{rs} V_s = V_r\,,$$

otterremo

(4′) $$\Sigma_r L_r\, dx_r = \Sigma_r V_r\, du_r\,.$$

Finalmente consideriamo la forma quadratica

$$f'' = \frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s \gamma_{rs} X_r X_s = \frac{1}{2}\Sigma_r \Sigma_s \Gamma_{rs} U_r U_s\,.$$

Avremo

$$\Sigma_r \frac{df''}{dX_r}\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_s \frac{df''}{dU_s}\Sigma_r \frac{dU_s}{dX_r}\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})}\,.$$

Ora dalle (2) segue

$$\frac{dU_s}{dX_r} = \frac{du_s}{dx_r} = \frac{1}{D}\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{s+1}, u_{s+2})}\,.$$

Quindi

$$\Sigma_r \frac{dU_s}{dX_r}\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \frac{1}{D}\Sigma_r \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{s+1}, u_{s+2})}\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} H_{s+1\,h+1}, & H_{s+1\,h+2} \\ H_{s+2\,h+1}, & H_{s+2\,h+2} \end{vmatrix} = K_{sh}$$

denotando con

$$ds^2 = H_{11}\, du_1^2 + H_{22}\, du_2^2 + H_{33}\, du_3^2 + 2\, H_{23}\, du_2\, du_3 + 2\, H_{31}\, du_3\, du_1 + 2\, H_{12}\, du_1\, du_2$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio espresso in coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3.

Ne segue

$$\Sigma_r \frac{df''}{dX_r}\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_r (w_r - w_r^0)\frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})}$$

$$= \Sigma_s \frac{df''}{dU_s} K_{sh} = \Sigma_s K_{sh} W'_s$$

avendo posto

$$W'_s = \frac{df''}{dU_s} = \Sigma_r \Gamma_{rs} U_r\,.$$

Per conseguenza

$$\Sigma_r w_r \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_s K_{s,h}(W'_s + W_s^0)$$

in cui W_s^0 dipende solo dalle forze elettromotrici nei varii punti dello spazio.

Ponendo

$$W_s = W'_s + W^o_s,$$

otterremo

$$(3'') \qquad W_s = \Sigma_r \Gamma_{rs}\, U_r + W^o_s$$

$$(4'') \qquad \Sigma_r\, w_r \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_s K_{sh} W_s .$$

5. Ciò premesso teniamo presente che le equazioni fondamentali della elettrodinamica nel caso dei corpi in quiete legano fra loro le diverse quantità (I) mediante le relazioni

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} A \dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{dL_2}{dx_3} - \dfrac{dL_3}{dx_2} - 4\pi A w_1 \\ A \dfrac{dX_2}{dt} = \dfrac{dL_3}{dx_1} - \dfrac{dL_1}{dx_3} - 4\pi A w_2 \\ A \dfrac{dX_3}{dt} = \dfrac{dL_1}{dx_2} - \dfrac{dL_2}{dx_1} - 4\pi A w_3 \end{cases} \qquad (\mathrm{III}') \begin{cases} A \dfrac{dL_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{X}_3}{dx_2} - \dfrac{d\mathrm{X}_2}{dx_3} \\ A \dfrac{dL_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{X}_1}{dx_3} - \dfrac{d\mathrm{X}_3}{dx_1} \\ A \dfrac{dL_3}{dt} = \dfrac{d\mathrm{X}_2}{dx_1} - \dfrac{d\mathrm{X}_1}{dx_2} . \end{cases}$$

Immaginiamo tracciata una curva arbitraria s come contorno di un pezzo di superficie σ. Denotiamo con n la normale a questa superficie, con u, v un sistema di coordinate curvilinee relative alla superficie stessa. Moltiplicando le (III) e (III') rispettivamente per

$$\cos nx_1\, d\sigma = \frac{d(x_2, x_3)}{d(u, v)}\, du\, dv$$

$$\cos nx_2\, d\sigma = \frac{d(x_3, x_1)}{d(u, v)}\, du\, dv$$

$$\cos nx_3\, d\sigma = \frac{d(x_1, x_2)}{d(u, v)}\, du\, dv$$

sommando e integrando alla superficie σ, si otterrà, mediante l'applicazione del teorema di STOKES,

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \Sigma_i X_i \cos nx_i\, d\sigma = \int_s \Sigma_i L_i\, dx_i - 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i w_i \frac{d(x_{i+1}, x_{i+2})}{d(u, v)}\, du\, dv$$

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \Sigma_i L_i \cos nx_i\, d\sigma = -\int_s \Sigma_i \mathrm{X}_i\, dx_i$$

Ora a cagione delle (II), (II')

$$\Sigma_i X_i \cos nx_i\, d\sigma = \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u, v)}\, du\, dv \quad , \quad \Sigma_i L_i \cos nx_1\, d\sigma = \psi \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u, v)}\, du\, dv ;$$

quindi le formule precedenti potranno scriversi

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u, v)}\, du\, dv = \int_s \Sigma_i L_i\, dx_i - 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i w_i \frac{d(x_{i+1}, x_{i+2})}{d(u, v)}\, du\, dv$$

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u, v)}\, du\, dv = -\int_s \Sigma_i \mathrm{X}_i\, dx_i$$

ovvero a cagione delle (4), (4'), (4'')

$$(5) \qquad A\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u, v)} du\, dv = \int_s \Sigma_i V_i\, du_i - 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i (\Sigma_s K_{si} W_s) \frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv$$

$$(5') \qquad A\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u, v)} du\, dv = -\int \Sigma_i U_i\, du.$$

Applicando di nuovo il teorema di STOKES, dalle equazioni precedenti si deduce

$$A\frac{d}{dt}\int_\sigma \Sigma_i U_i D \frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv = \int_s \Sigma_i \left(\frac{dV_{i+1}}{du_{i+2}} - \frac{dV_{i+2}}{du_{i+2}}\right) \frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv$$

$$- 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i (\Sigma_s K_{si} W_s) \frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv$$

$$A\frac{d}{dt}\int_\sigma \Sigma_i V_i D \frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv = \int_\sigma \Sigma_i \left(\frac{dU_{i+2}}{du_{i+1}} - \frac{dU_{i+1}}{du_{i+2}}\right) \frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv.$$

La superficie σ essendo qualunque, si avrà dunque

$$(IV) \qquad A\frac{d(DU_i)}{dt} = \frac{dV_{i+1}}{du_{i+2}} - \frac{dV_{i+1}}{du_{i+1}} - 4\pi A \Sigma_s K_{si} W_s$$

$$(IV') \qquad A\frac{d(DV_i)}{dt} = \frac{dU_{i+2}}{du_{i+1}} - \frac{dU_{i+1}}{du_{i+2}}$$

ovvero

$$(V) \qquad A\frac{d}{dt}\left(\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})}\right) = \frac{dV_{i+1}}{du_{i+2}} - \frac{dV_{i+2}}{du_{i+1}} - 4\pi A \Sigma_s K_{si} W_s$$

$$(V') \qquad A\frac{d}{dt}\left(\psi \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})}\right) = \frac{dU_{i+2}}{du_{i+1}} - \frac{dU_{i+1}}{du_{i+2}}.$$

Le equazioni (IV) e (IV') ovvero le (V) e (V') si potranno sostituire alle equazioni fondamentali (III) e (III') della elettrodinamica. In esse si ha riepilogando le (3), (3'), (3''),

$$(VI) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_r &= \Sigma_i A_{ri} U_i = \frac{\varphi}{D} \Sigma_i A_{ri} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})} \\ V_r &= \Sigma_i B_{ri} V_i = \frac{\psi}{D} \Sigma_i B_{ri} \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})} \\ W_r &= \Sigma_i \Gamma_{ri} U_i + W_r^o = \frac{\varphi}{D} \Sigma_i \Gamma_{ri} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})} + W_r^o \\ D^2 &= \begin{vmatrix} H_{11}, H_{12}, H_{13} \\ H_{21}, H_{22}, H_{23} \\ H_{31}, H_{32}, H_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

6. Nelle formule (V) e (V') che abbiamo ora ottenuto compariscono in evidenza gli elementi proprii ad individuare le linee di forza elettriche e magnetiche (vedi § 2). Il vantaggio che si ha sostituendo le equazioni (V)

e (V′) alle equazioni (III) e (III′) consiste in questo, che, secondo l'ipotesi di HERTZ, *esse valgono sotto la medesima forma anche per i corpi in movimento.* Basterà perciò supporre nelle equazioni stesse che le u_1, u_2, u_3 denotino le coordinate di una particella del corpo in movimento in un istante determinato; in altri termini basterà supporre che le u_1, u_2, u_3 siano dei *parametri qualunque che individuano sempre la medesima particella del corpo in movimento.*

Si riconosce immediatamente come dalle equazioni (V) e (V′) possano ricavarsi le formule (1_a) e (1_b) della citata Memoria di HERTZ (4).

Denotiamo infatti con v_1, v_2, v_3 le coordinate della particella al tempo t. Avremo

$$(6) \qquad v_1 = v_1(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad v_2 = v_2(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad v_3 = v_3(u_1, u_2, u_3, t).$$

Considerando i valori di $\varphi, \varphi_1, \varphi_2; \psi, \psi_1, \psi_2$, corrispondenti sempre ad uno stesso punto v_1, v_2, v_3 fisso nello spazio, risulterà

$$\varphi = \varphi(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \varphi_1 = \varphi_1(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \varphi_2 = \varphi_2(v_1, v_2, v_3, t)$$
$$\psi = \psi(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \psi_1 = \psi_1(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \psi_2 = \psi_2(v_1, v_2, v_3, t).$$

Sostituendo in queste formule per le v_h le loro espressioni (6) si otterranno i valori

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \varphi_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \varphi_2 = \varphi_2(u_1, u_2, u_3, t)$$
$$\psi = \psi(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \psi_1 = \psi_1(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \psi_2 = \psi_2(u_1, u_2, u_3, t)$$

corrispondenti sempre alla stessa particella mobile.

Denotiamo ora rispettivamente

$$\frac{d\varphi_i(u_1, u_2, u_3, t)}{dt} \quad \text{con} \quad \frac{d\varphi_i}{dt}$$

$$\frac{d\varphi_i(v_1, v_2, v_3, t)}{dt} \quad \text{con} \quad \frac{\delta\varphi_i}{\delta t}$$

e le analoghe notazioni usiamo per le ψ_i. Poniamo poi

$$v_i' = \frac{dv_i(u_1, u_2, u_3, t)}{dt}.$$

Si avrà

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{r+1}, u_{r+2})}\right] = \Sigma_s \frac{d}{dt}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right] \frac{d(v_{s+1}, v_{s+2})}{d(u_{r+1}, u_{r+2})}$$
$$+ \Sigma_s \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})} \left(\frac{d(v'_{s+1}, v_{s+2})}{d(u_{r+1}, u_{r+2})} + \frac{d(v_{s+1}, v'_{s+2})}{d(u_{r+1}, u_{r+2})}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right] = \frac{\delta}{\delta t}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right] + \Sigma_h \frac{d}{dv_h}\left(\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right) v_h'.$$

(4) « Wied. Ann. », Bd. XLI, s. 374.

Supponendo che nell'istante t le u_1, u_2, u_3 coincidano colle v_1, v_2, v_3 avremo quindi

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{D}U_r)=\frac{\delta}{\delta t}(\mathrm{D}U_r)+\Sigma_h\frac{d}{du_h}(\mathrm{D}U_r)\,v'_h+\mathrm{D}\left\{U_r\left(\frac{dv'_{r+1}}{du_{r+1}}+\frac{dv'_{r+2}}{du_{r+2}}\right)\right.$$
$$\left.-U_{r+1}\frac{dv'_r}{du_{r+1}}-U_{r+2}\frac{dv'_r}{du_{r+2}}\right\}$$

e analogamente si otterrà l'espressione di $\frac{d}{dt}(\mathrm{D}V_r)$. Quindi le equazioni (V) e (V′) potranno scriversi

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\delta}{\delta t}(\mathrm{D}U_r)+\Sigma_h\frac{d}{du_h}(\mathrm{D}U_r)\,v'_h+\mathrm{D}\left\{U_r\left(\frac{dv'_{r+1}}{du_{r+1}}+\frac{dv'_{r+2}}{du_{r+2}}\right)\right.$$
$$\left.-U_{r+1}\frac{dv'_r}{du_{r+1}}-U_{r+2}\frac{dv'_r}{du_{r+2}}\right\}=\frac{d\mathrm{V}_{r+1}}{du_{r+2}}-\frac{d\mathrm{V}_{r+2}}{du_{r+1}}-4\pi\mathrm{A}\Sigma_s\,\mathrm{K}_{rs}\,\mathrm{W}_s$$

$$\text{(VI}'\text{)}\qquad \frac{\delta}{\delta t}(\mathrm{D}V_r)+\Sigma_h\frac{d}{du_h}(\mathrm{D}V_r)\,v'_h+\mathrm{D}\left\{V_r\left(\frac{dv'_{r+1}}{du_{r+1}}+\frac{dv'_{r+2}}{du_{r+2}}\right)\right.$$
$$\left.-V_{r+1}\frac{dv'_r}{du_{r+1}}-V_{r+2}\frac{dv'_r}{du_{r+2}}\right\}=\frac{d\mathrm{U}_{r+2}}{du_{r+1}}-\frac{d\mathrm{U}_{r+1}}{du_{r+2}}$$

le quali si riducono alle formule (I_a) e (I_b) di HERTZ nel caso delle coordinate cartesiane. Le equazioni (V) e (V′) hanno in certo modo le loro corrispettive nelle equazioni della idrodinamica di LAGRANGE, mentre le (VI) e (VI′) in quelle di EULERO.

7. Il principio della conservazione dell'elettricità e del magnetismo viene espresso (derivando le (V) e (VI′) rispetto ad u_i e poi sommando) dalle formule

$$\text{(VII)}\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\,\frac{d(\varphi,\varphi_1,\varphi_2)}{d(u_1,u_2,u_3)}+4\pi\,\Sigma_i\frac{d}{du_i}\Sigma_s\,\mathrm{K}_{is}\,\mathrm{W}_s=0\\&\frac{d}{dt}\,\frac{d(\psi,\psi_1,\psi_2)}{d(u_1,u_2,u_3)}=0.\end{aligned}\right.$$

Le (5) e (5′) possono ancora scriversi

$$\text{(VIII)}\qquad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}\frac{d}{dt}\int_\sigma\varphi\,d\varphi_1\,d\varphi_2=\int_s\Sigma_i\,\mathrm{V}_i\,du_i-4\pi\mathrm{A}\int_\sigma\Sigma_i\,(\Sigma_s\,\mathrm{K}_{si}\,\mathrm{W}_s)\,\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}\,du\,dv\\&\mathrm{A}\frac{d}{dt}\int_\sigma\psi\,d\psi_1\,d\psi_2=-\int_s\Sigma_i\,\mathrm{U}_i\,du_i\,.\end{aligned}\right.$$

Esse sono equivalenti alle (V) e (V′) e valgono tanto pei corpi mobili quanto per quelli in quiete.

Supponendo le W_s nulle sopra σ, la prima di esse diviene

$$\text{(IX)}\qquad \mathrm{A}\frac{d}{dt}\int_\sigma\varphi\,d\varphi_1\,d\varphi_2=\int_s\Sigma_i\,\mathrm{V}_i\,du_i$$

che esprime la legge dell'induzione nei circuiti chiusi mobili o no.