XXIX.

SULLE VARIABILI COMPLESSE NEGLI IPERSPAZÎ

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4, vol. VI_2, 1890_2; pp. 241-252.

1. In due Note inserite l'anno scorso nei « Rendiconti » di questa Accademia ho esposto i fondamenti di una estensione della teoria delle funzioni di variabili complesse negli iperspazî (*). La teoria stessa venne più ampiamente sviluppata pel caso degli spazi a tre dimensioni in una Memoria pubblicata negli « Acta Mathematica » (**). In questa Nota mi propongo di mostrare come possano estendersi al caso degli iperspazî le considerazioni svolte nell'art. 3 del 2° capitolo della predetta Memoria, e come possa estendersi il teorema di CAUCHY ad un caso più generale di quello considerato nel § 6 della seconda delle due Note citate.

2. Essendo $F\,|[S_r]|$ una funzione di primo grado degli iperspazî S_r immersi nell'iperspazio S_n, si ponga

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial F}{\partial(x_{\mathrm{I}})} = p_{\mathrm{I}} + iq_{\mathrm{I}}$$

rappresentando con I il simbolo $(i_1 \cdots i_{r+1})$.

Si ponga pure

$$(1)\qquad \begin{cases} p_{\mathrm{I}}\,p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{I}}\,q_{\mathrm{H}} = \mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\,, \\ p_{\mathrm{I}}\,q_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{H}}\,q_{\mathrm{I}} = \mathrm{D}_{\mathrm{IH}}\,. \end{cases}$$

Sia ora $\varphi\,|[S_r]|$ una funzione di primo grado reale; poniamo

$$\frac{d\varphi}{d(x_{\mathrm{I}})} = \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$$

e supponiamo che si abbia

$$(2)\qquad \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{D}_{\mathrm{HK}} + \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{D}_{\mathrm{KI}} + \tilde{\omega}_{\mathrm{K}}\,\mathrm{D}_{\mathrm{IH}} = 0$$

per tutte le possibili combinazioni degli indici I, H, K. Supponendo che una almeno delle D_{HK} sia diversa da zero (per esempio $\mathrm{D}_{\mathrm{H'K'}}$) è facile riconoscere che due sole delle $\tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$ sono fra loro indipendenti (cioè $\tilde{\omega}_{\mathrm{H'}}$ e $\tilde{\omega}_{\mathrm{K'}}$).

Si formino ora le quantità

$$\frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\,\tilde{\omega}_{\mathrm{K}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}}\,\tilde{\omega}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{KH}}}\,.$$

(*) In questo vol.: XXIII, pp. 403-419.
(**) In questo vol.: XXII, pp. 363-402.

È facile dimostrare che esse sono indipendenti dagli indici H e K. Potremo quindi denotarle con χ_I. Si ricava allora

$$\chi_I D_{HK} + \chi_H D_{KI} + \chi_K D_{IH} = 0 \tag{3}$$

$$\tilde{\omega}_I = \frac{E_{IH} \chi_K - E_{IK} \chi_H}{D_{HK}} . \tag{4}$$

Può pure dedursi che il rapporto $\dfrac{\tilde{\omega}_I + i\chi_I}{p_I + iq_I}$ è indipendente dall'indice I.

Se esistesse una funzione ψ di cui le χ_I fossero le derivate, in tal caso la funzione $\varphi + i\psi$, secondo una denominazione introdotta nelle note precedentemente citate, si chiamerebbe *isogena* alla F [1].

3. Se eseguiamo un cambiamento di variabili ed in luogo delle $x_1, x_2 \cdots x_n$ ne sostituiamo altre $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n$, le relazioni (2), (3) e (4) restano invariate, come pure resta invariato il rapporto $\dfrac{\tilde{\omega}_I + i\chi_I}{p_I + iq_I}$ e la quantità [2]

$$\Theta_\varphi = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_H , \tilde{\omega}_K \\ \chi_H , \chi_K \end{vmatrix} = \frac{(p_H \chi_K - p_K \chi_H)^2 + (q_H \chi_K - q_K \chi_H)^2}{D^2_{HK}} \tag{5}$$

$$= \frac{E_{IH} \tilde{\omega}_K \tilde{\omega}_L - E_{IK} \tilde{\omega}_H \tilde{\omega}_L + E_{LK} \tilde{\omega}_H \tilde{\omega}_K - E_{LH} \tilde{\omega}_K \tilde{\omega}_I}{D_{IL} D_{HK}}$$

la quale è indipendente dagli indici H e K.

Sia $\varphi' \mid [S_r] \mid$ una funzione reale di primo grado e ammettiamo che essa pure soddisfi l'equazione

$$\tilde{\omega}'_I D_{HK} + \tilde{\omega}'_H D_{KI} + \tilde{\omega}'_K D_{IH} = 0$$

rappresentando con $\tilde{\omega}'_I$ la derivata $\dfrac{d\varphi'}{d(x_I)}$.

Denotiamo con χ'_I la quantità analoga alla χ_I rispetto alla nuova funzione φ'.

Posto

$$H_{\varphi\varphi'} = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_H , \tilde{\omega}_K \\ \chi'_H , \chi'_K \end{vmatrix} = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}'_H , \tilde{\omega}'_K \\ \chi_H , \chi_K \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= \frac{E_{KK} \tilde{\omega}_H \tilde{\omega}'_H - E_{HK} (\tilde{\omega}_H \tilde{\omega}'_K + \tilde{\omega}_K \tilde{\omega}'_H) + E_{HH} \tilde{\omega}_K \tilde{\omega}'_K}{D^2_{HK}},$$

si vede facilmente che esso è indipendente dagli indici H e K e che

$$H_{\varphi\varphi'} = H_{\varphi'\varphi} .$$

Abbiamo ora

$$\Theta_{\varphi+\varphi'} = \Theta_\varphi + 2\, H_{\varphi\varphi'} + \Theta_{\varphi'} . \tag{7}$$

Si ha dunque che anche la $H_{\varphi\varphi'}$ resta invariata cambiando le variabili $x_1 \cdots x_n$ nelle $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$.

(1) « Rend. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 162 [in questo vol.: XXIII, p. 407].
(2) Ibid., p. 164 [in questo vol.: p. 409].

4. Nell'iperspazio totale S_n a n dimensioni consideriamone uno S_m ad m dimensioni, essendo

$$n \geqq m \geqq r + 2,$$

ottenuto ponendo

$$x_{m+1} = \text{cost.}, \cdots x_n = \text{cost.}$$

I punti dell'iperspazio S_m saranno individuati dai valori di $x_1, x_2 \cdots x_m$ e le funzioni F, φ, φ' potranno considerarsi come funzioni di primo grado degli iperspazî S_r immersi entro S_m.

Si ponga

$$L \equiv (l_1 \cdots l_{r+1}) \qquad L' \equiv (l_{r+2} \cdots l_m)$$
$$(l_1 \cdots l_m) \equiv (1, 2 \cdots m).$$

Nei paragrafi seguenti fino al § 12 noi ammetteremo che i gruppi di indici che si denotano con I, H, K $\cdots$ siano costituiti da indici non superiori ad m.

Vogliamo dimostrare che è possibile determinare le funzioni $\Phi \mid [S_{m-r-2}] \mid$, $\Psi \mid [S_{m-r-2}] \mid$ in modo tale che sia

$$\tilde{\omega}_I = \Sigma_l D_{LI} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l E_{LI} \frac{\partial \Psi}{d(x_{L'})}. \tag{8}$$

Avremo infatti che le (2) resulteranno verificate, perchè dalla formula precedente segue

$$\tilde{\omega}_I D_{HK} + \tilde{\omega}_H D_{KI} + \tilde{\omega}_K D_{IH}$$
$$= \Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} (D_{LI} D_{HK} + D_{LH} D_{KI} + D_{LK} D_{IH})$$
$$+ \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} (E_{LI} D_{HK} + E_{LH} D_{KI} + E_{LK} D_{IH}) = 0.$$

Basterà dunque che si possa porre (supponendo $D_{HK} \gtrless 0$)

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}_H &= \Sigma_l D_{LH} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l E_{LH} \frac{\partial \Psi}{\partial (x_{L'})} \\ \tilde{\omega}_K &= \Sigma_l D_{LK} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l E_{LK} \frac{\partial \Psi}{d(x_{L'})} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

per le due sole combinazioni di indici H e K perchè la (8) sia soddisfatto per una qualunque delle combinazioni I.

Si ponga ora [3]

$$\frac{d\Phi}{d(x_{L'})} = \frac{d\Phi}{d(x_{l_{r+2}} \cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{l_{r+2} \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}} \tag{10}$$

$$\frac{d\Psi}{d(x_{L'})} = \frac{d\Psi}{d(x_{l_{r+2}} \cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial Q_{l_{r+2} \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}} \tag{11}$$

(3) Ibid., p. 602 [in questo vol.: XXIV, pp. 422–423].

nelle equazioni (9). Basterà determinare delle funzioni P e Q che soddisfino le due equazioni differenziali (9) perché le (8) vengano verificate.

5. Posto le $\tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$ sotto la forma (8), possono calcolarsi le χ_{I}. Si ottiene

$$\chi_{\mathrm{I}} = \Sigma_l \frac{(\mathrm{D_{LK}\,E_{IH}} - \mathrm{D_{LH}\,E_{IK}})}{\mathrm{D_{KH}}} \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{L}'})} + \Sigma_l \frac{(\mathrm{E_{LK}\,E_{IH}} - \mathrm{E_{LH}\,E_{IK}})}{\mathrm{D_{KH}}} \frac{d\Psi}{d(x_{\mathrm{L}'})}$$

onde

$$\chi_{\mathrm{I}} = -\Sigma_l\, \mathrm{E_{LI}} \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{L}'})} + \Sigma_l\, \mathrm{D_{LI}} \frac{d\Psi}{d(x_{\mathrm{L}'})}. \tag{12}$$

Le formule (8) e (12) possono scriversi ancora sotto un'altra forma tenendo conto delle (1). Si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} &= q_{\mathrm{I}}\, \Sigma p_{\mathrm{L}} \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{L}'})} - p_{\mathrm{I}}\, \Sigma q_{\mathrm{L}} \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{L}'})} \\ &\quad + q_{\mathrm{I}}\, \Sigma p_{\mathrm{L}} \frac{d\Psi}{d(x_{\mathrm{L}'})} + p_{\mathrm{I}}\, \Sigma q_{\mathrm{L}} \frac{d\Psi}{d(x_{\mathrm{L}'})} \\ \chi_{\mathrm{I}} &= q_{\mathrm{I}}\, \Sigma p_{\mathrm{L}} \frac{d\Psi}{d(x_{\mathrm{L}'})} - p_{\mathrm{I}}\, \Sigma q_{\mathrm{L}} \frac{d\Psi}{d(x_{\mathrm{L}'})} \\ &\quad - q_{\mathrm{I}}\, \Sigma p_{\mathrm{L}} \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{L}'})} - p_{\mathrm{I}}\, \Sigma q_{\mathrm{L}} \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{L}'})}.\end{aligned}$$

Queste equazioni sono equivalenti all'altra

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} - i\chi_{\mathrm{I}} = (p_{\mathrm{I}} - iq_{\mathrm{I}})\, \Sigma\, (p_{\mathrm{L}} + iq_{\mathrm{L}}) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(x_{\mathrm{L}'})}. \tag{13}$$

Poste le (8) sotto questa forma, è facile dimostrare che esse sono soddisfatte sempre dalle stesse funzioni Φ e Ψ anche se si cangiano le variabili $x_1, x_2 \cdots x_m$ nelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_m$ in modo che $\frac{d(x_1, x_2 \cdots x_m)}{d(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_m)} = 1$.

Infatti se denotiamo le derivate rispetto alle nuove variabili cogli stessi simboli usati precedentemente, solo ponendo sopra di essi una linea orizzontale, abbiamo (§ 3)

$$\frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} - i\chi_{\mathrm{I}}}{p_{\mathrm{I}} - iq_{\mathrm{I}}} = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_{\mathrm{I}} - i\bar{\chi}_{\mathrm{I}}}{\bar{p}_{\mathrm{I}} - i\bar{q}_{\mathrm{I}}}$$

e

$$\begin{aligned}\Sigma\, (p_{\mathrm{L}} + iq_{\mathrm{L}}) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(x_{\mathrm{L}'})} &= \Sigma \left\{ \Sigma\, (\bar{p}_{\mathrm{H}} + i\bar{q}_{\mathrm{H}}) \frac{d(\bar{x}_{\mathrm{H}})}{d(x_{\mathrm{L}})} \right\} \left\{ \Sigma \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(\bar{x}_{\mathrm{K}'})} \frac{d(\bar{x}_{\mathrm{K}'})}{d(\bar{x}_{\mathrm{L}'})} \right\} \\ &= \Sigma\, (\bar{p}_{\mathrm{H}} + i\bar{q}_{\mathrm{H}}) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(\bar{x}_{\mathrm{H}'})} \cdot \frac{d(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)}{d(x_1 \cdots x_m)}\end{aligned}$$

onde

$$(\bar{\tilde{\omega}}_{\mathrm{I}} - i\chi_{\mathrm{I}}) = (\bar{p}_{\mathrm{I}} - i\bar{q}_{\mathrm{I}})\, \Sigma\, (\bar{p}_{\mathrm{L}} + i\bar{q}_{\mathrm{L}}) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(\bar{x}_{\mathrm{L}'})}.$$

6. Si ponga, in modo analogo alla (8),

$$\tilde{\omega}'_{\mathrm{I}} = \Sigma_l\, \mathrm{D_{LI}} \frac{d\Phi'}{d(x_{\mathrm{L}'})} + \Sigma_l\, \mathrm{E_{LI}} \frac{d\Psi'}{d(x_{\mathrm{L}'})} \tag{14}$$

e passiamo a calcolare il parametro differenziale

$$H_{\varphi,\varphi'}$$

mediante

$$\Phi, \Psi, \Phi', \Psi'.$$

Avremo

$$H_{\varphi\varphi'} = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_H, \tilde{\omega}_K \\ \chi'_H, \chi'_K \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \Sigma D_{LH} \dfrac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma E_{LH} \dfrac{d\Psi}{d(x_{L'})}, & \Sigma D_{LK} \dfrac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma E_{LK} \dfrac{d\Psi}{d(x_{L'})} \\ \chi'_H, & \chi'_K \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \left\{ \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \left(\frac{D_{LH}\chi'_K - D_{LK}\chi'_H}{D_{HK}} \right) + \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \left(\frac{E_{LH}\chi'_K - E_{LK}\chi'_H}{D_{HK}} \right) \right\}$$

onde

$$(15) \qquad H_{\varphi\varphi'} = -\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L$$

e in modo perfettamente analogo

$$(16) \qquad H_{\varphi\varphi'} = -\Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \chi_L + \Sigma \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}_L .$$

Dalle formule precedenti segue l'altra

$$(17) \qquad \Theta = -\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}_L .$$

7. Le due relazioni (15) e (16) dànno luogo alla seguente

$$(18) \qquad -\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L = -\Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \chi_L + \Sigma \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L .$$

Si consideri ora

$$M_{\varphi\varphi'} = \Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \chi_L .$$

A cagione della (14) potremo scrivere

$$M_{\varphi\varphi'} = \Sigma\Sigma \left\{ D_{IL} \left(\frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi'}{d(x_{I'})} + \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi'}{d(x_{I'})} \right) \right.$$
$$\left. + E_{IL} \left(\frac{\partial\Phi}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi'}{d(x_{I'})} - \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi'}{d(x_{I'})} \right) \right\}.$$

Scambiando φ con φ' si ottiene

$$M_{\varphi\varphi} = \Sigma\Sigma \left\{ D_{IL} \left(\frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi}{d(x_{I'})} + \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi}{d(x_{I'})} \right) \right.$$
$$\left. + E_{IL} \left(\frac{\partial\Phi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi}{d(x_{I'})} - \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi}{d(x_{I'})} \right) \right\}$$

onde

$$M_{\varphi\varphi'} = -M_{\varphi'\varphi}$$

vale a dire

$$(19) \qquad \Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \chi'_L = -\Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}_L - \Sigma \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \chi_L$$

relazione analoga alla (18). Combinando insieme le equazioni (18) e (19) si trova

$$(20)\quad H_{\varphi\varphi'} + i M_{\varphi'\varphi} = \Sigma\,(\tilde{\omega}_L + i\chi_L)\left(\frac{d\,(\Psi' + i\Phi')}{d\,(x_{L'})}\right) = \Sigma\,(\tilde{\omega}'_L - i\chi'_L)\left(\frac{d\,(\Psi - i\Phi)}{d\,(x_{L'})}\right).$$

Quest'ultima equazione poteva ottenersi anche direttamente dalla (13) e dalla analoga relativa alla funzione φ'.

8. Teniamo ora conto delle relazioni (10) e (11) e delle analoghe

$$\frac{d\Phi'}{d\,(x_{L'})} = \frac{d\Phi'}{d\,(x_{l_{r+2}} \cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{l_{r+2} \cdots l_{s-1}\, l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}}$$

$$\frac{d\Psi'}{d\,(x_{L'})} = \frac{d\Psi'}{d\,(x_{l_{r+2}} \cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial Q'_{l_{r+2} \cdots l_{s-1}\, l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}}$$

nell'eseguire gli integrali

$$\int_{S'_m} H_{\varphi\varphi'}\, dS'_m \quad , \quad \int_{S'_m} \Theta\, dS'_m \quad , \quad \int_{S'_m} (H_{\varphi\varphi'} + i M_{\varphi\varphi'})\, dS'_m$$

essendo S'_m un iperspazio ad m dimensioni immerso entro S_n. Si ottiene in tal modo

$$(21)\qquad \int_{S'_m} H_{\varphi\varphi'}\, dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, P_{i_{r+3} \cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s\, \chi'_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$- \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, Q_{i_{r+3} \cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s\, \tilde{\omega}'_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$+ \int_{S'_m} \Sigma_i\, P_{i_{r+3} \cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right) dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, P'_{i_{r+3} \cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s\, \chi_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$- \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, Q'_{i_{r+3} \cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s\, \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\right) dS_{m-1}$$

$$+ \int_{S'_m} \Sigma_i\, P'_{i_{r+3} \cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right) dS'_m$$

essendo S'_{m-1} il contorno di S'_m e ν la normale a S'_{m-1} diretta verso l'esterno di S'_m.

La formula precedente è analoga alla nota formula di GREEN. Abbiamo inoltre

$$(22)\qquad \int_{S'_m} \Theta\, dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, P_{i_{r+3}\cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} \right) dS'_{m-1}$$

$$- \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, Q_{i_{r+3}\cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} \right) dS'_{m-1}$$

$$+ \int_{S'_m} \Sigma_i\, P_{i_{r+3}\cdots i_m} \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right) dS'_m .$$

Finalmente può scriversi la formula

$$(23)\qquad \int_{S_m} (H_{\varphi\varphi'} + i M_{\varphi\varphi'})\, dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i (Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + i P'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s (\tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} + i \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}) \cos \nu x_{i_s} \right) dS'_{m-1}$$

$$+ i \int_{S'_m} \Sigma_i (Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + i P'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right) dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i (Q_{i_{r+3}\cdots i_m} - i P_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s (\tilde{\omega}'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} - i \chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}) \cos \nu x_{i_s} \right) dS'_{m-1}$$

$$- i \int_{S'_m} \Sigma_i (Q_{i_{r+3}\cdots i_m} - i P_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right) dS'_m .$$

9. Supponiamo

$$(24)\qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \quad , \quad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

allora (vedi § 2) le tre funzioni $\varphi + i\psi$, $\varphi' + i\psi'$, F saranno isogene ed in ciascuna delle precedenti formule verranno a mancare gli ultimi termini.

10. Passiamo a dare una applicazione alla formula (22). Supponiamo in essa $m = r + 2$ e verificate le prime fra le equazioni (24). In tal caso esisterà una sola P ed una sola Q che scriveremo senza alcun indice.

Denotiamo con

$$x_1 = x_1(\omega_1 \cdots \omega_{r+1}), \cdots, x_{r+2} = x_{r+2}(\omega_1 \cdots \omega_{r+1})$$

le equazioni dell'iperspazio S'_{m-1} e supponiamo scelte queste equazioni (il che sarà sempre possibile) in modo che

$$\Sigma_s \left\{ \frac{d(x_1 \cdots x_{s-1} x_{s+1} \cdots x_{r+2})}{d(\omega_1 \cdots \cdots \cdots \cdots \omega_{r+2})} \right\}^2 = 1.$$

Avremo

$$\cos \nu x_{i_s} = (-1)^s \frac{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})}{d(\omega_1 \cdots \cdots \cdots \cdots \omega_{r+1})}\,.$$

onde

$$\Sigma_s (-1)^s \, \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = \frac{d\varphi}{dS'_{m-1}}\,.$$

$$\Sigma_s (-1)^s \, \chi_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = \frac{d\psi}{dS'_{m-1}}\,.$$

La (22) diverrà quindi

$$\int_{S'_m} \Theta \, dS'_m = \int_{S'_{m-1}} \left(P \frac{d\psi}{dS'_{m-1}} - Q \frac{d\varphi}{dS'_{m-1}} \right) dS'_{m-1}\,.$$

Ciò premesso consideriamo due funzioni $\varphi' + i\psi'$, $\varphi'' + i\psi''$ isogene alla F le quali siano eguali fra loro per tutti gli iperspazî chiusi S'_r contenuti in S'_{m-1}. Posto

$$\varphi' - \varphi'' = \varphi\,, \; \psi' - \psi'' = \psi\,,$$

avremo, sopra S'_{m-1}, $\dfrac{d\psi}{dS'_{m-1}} = \dfrac{d\varphi}{dS'_{m-1}} = 0$, onde

$$\int_{S'_m} \Theta \, dS'_m = 0$$

da cui segue che

$$\varphi' + i\psi' = \varphi'' + i\psi''$$

in tutti gli iperspazî S'_m *aventi per contorno* S'_{m-1}.

11. Si supponga $m = n$. Mediante le (10) e (11) potremo ottenere le $\tilde{\omega}_H$ e χ_H espresse per mezzo delle P e delle Q e quindi potremo avere la Θ espressa pure per le P e Q stesse. In modo analogo potremo ottenere la H in funzione delle P, Q, P', Q'. Rappresenteremo le dette funzioni in questo caso con

$$\tilde{\omega}_H(P, Q) \quad , \quad \chi_H(P, Q) \quad , \quad \Theta(P, Q) \quad , \quad H(P, Q, P', Q')\,.$$

È evidente che lasciando affatto arbitrarie le funzione P e Q le $\tilde{\omega}_H$, χ_H non soddisfano alle condizioni di integrabilità

$$(25) \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

$$(26) \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 ;$$

però le relazioni (2), (3) e (4) fra di loro sussisteranno sempre, come pure saranno verificate le equazioni

$$\chi_H (P, Q) = \tilde{\omega}_H (Q, -P)$$

$$H(P, Q, P', Q') = H(P', Q', P, Q)$$

$$(27) \qquad \Theta(P + P', Q + Q') = \Theta(P, Q) + 2 H(P, Q, P', Q') + \Theta(P' + Q').$$

Oltre a ciò Θ sarà sempre positiva.

Le P e Q sono in numero di

$$2 n_{n-r-2} = 2 n_{r+2} .$$

Ogni qual volta esse soddisferanno le $2 n_{r+2}$ equazioni (25) e (26), avremo verificate le condizioni di integrabilità ed esisterà quindi corrispondentemente alle P e Q stesse una funzione $\varphi + i\psi$ isogena alla F.

Denotiamo con $\Gamma_T(P, Q)$ il primo membro della (25) in cui $T \equiv i_1, \cdots i_{r+2}$. Il primo membro della (26) sarà $\Gamma_T(Q, -P)$. Ciò premesso dalla (27) segue

$$\int_{S_n} \Theta(P + P', Q + Q')\, dS_n = \int_{S_n} \Theta(P, Q)\, dS_n + 2 \int_{S_n} H(P, Q, P', Q')\, dS_n$$

$$+ \int_{S_n} \Theta(P', Q')\, dS_n .$$

Se supponiamo P′ e Q′ nulli al contorno S_{n-1} di S_n, mediante una integrazione per parti, come abbiamo eseguito nel § 8, otterremo

$$\int_{S_n} \Theta(P + P', Q + Q')\, dS_n = \int_{S_n} \Theta(P, Q)\, dS_n + \int_{S_n} \Theta(P', Q')\, dS_n$$

$$+ \int_{S_n} \Sigma_i \{ P'_{T'} \Gamma_T(Q, -P) - Q'_{T'} \Gamma_T(P, Q) \}\, dS_n .$$

Questa formula conduce alla conseguenza che $\Theta(P, Q)$, per dati valori delle P e Q al contorno, sarà minimo quando saranno soddisfatte le equazioni

$$(28) \qquad \Gamma_T(Q, -P) = 0 \quad , \quad \Gamma_T(P, Q) = 0 .$$

Le funzioni isogene ad una data possono quindi, come le ordinarie funzioni di una variabile complessa, farsi corrispondere ad un problema di minimo.

È facile provare che dati i valori delle P e Q al contorno, se esse soddisfano le equazioni (28) le $\tilde{\omega}_H$ e χ_H restano determinate. Infatti mediante le solite integrazioni per parti si proverebbe che, se le P′ e Q′ e le P″ e Q″ soddisfacessero alle dette condizioni e fossero rispettivamente eguali fra loro al contorno, posto le $P' - P'' = P'''$ e le $Q' - Q'' = Q'''$, si avrebbe

$$\int_{S_n} \Theta\,(P''', Q''')\, dS_n = 0$$

e quindi $\Theta = 0$; relazione che non può essere soddisfatta se $\tilde{\omega}'''_H$ e χ'''_H non fossero nulle (vedi formula (5)).

12. Se supponiamo soddisfatte le condizioni (24), esisteranno le funzioni $\varphi + i\psi$, $\varphi' + i\psi'$ isogene alla F e la equazione (20) potrà esser scritta

$$\Sigma \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x_L)} \frac{d(\Psi' + i\Phi')}{d(x_{L'})} = \Sigma \frac{d(\varphi' - i\psi')}{d(x_L)} \frac{d(\Psi - i\Phi)}{d(x_{L'})} \tag{29}$$

e la (23) diverrà

$$\int_{S'_{m-1}} \Sigma_i \,(Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + iP'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s}\, dS'_{m-1} \tag{30}$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i \,(Q_{i_{r+3}\cdots i_m} - iP_{i_{r+3}\cdots i_m}) \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{d(\varphi' - i\psi')}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s}\, dS'_{m-1}\,.$$

Ammettendo $\varphi' + i\psi' = 0$, $\varphi + i\psi = F$ le precedenti equazioni divengono

$$\Sigma \frac{dF}{d(x_L)} \frac{d(\Psi' + i\Phi')}{d(x_{L'})} = 0$$

$$\int_{S'_{m-1}} \Sigma_i \,(Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + iP'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s}\, dS_{m-1} = 0.$$

La formula che ora abbiamo trovato corrisponde ad una estensione del teorema di CAUCHY di cui ci occuperemo nel paragrafo seguente.

13. Si abbiano le due funzioni di iperspazî

$$F\,|\,[S_r]\,| \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}\,|\,[S_{m-r-2}]\,|$$

di primo grado tali che

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial V_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{B}_{i_{r+2}\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_m}}{\partial x_{i_s}}.$$

Posto

$$I_{i_1 \cdots i_{m-1}} = \Sigma_h \frac{\partial F}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{B}_{h_{r+2} \cdots h_{m-1}}$$

$$\mathfrak{I}_{i_1 \cdots i_{m-1}} = \Sigma_h \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_{r+1}} \cdots x_{h_{m-1}})} V_{h_1 \cdots h_r}$$

avremo evidentemente

$$\sum_1^m {}_s (-1)^s \frac{\partial I_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}} = \Sigma_h \left(\frac{\partial F}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_{r+2}})} \sum_{r+2}^m {}_t (-1)^t \frac{\partial \mathfrak{B}_{h_{r+2} \cdots h_{t-1} h_{t+1} \cdots h_m}}{\partial x_{h_t}} \right)$$

$$= \Sigma_h \frac{\partial F}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_{r+2}} \cdots x_{h_m})}$$

$$= \Sigma_h \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_{r+2}} \cdots x_{h_m})} \sum_1^{r+1} {}_t (-1)^t \frac{\partial V_{h_1 \cdots h_{t-1} h_{t+1} \cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_t}} \right)$$

$$= \sum_1^m {}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{I}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

essendo $h_1 \cdots h_m \equiv i_1 \cdots i_m$.

Da ciò segue, posto

$$\frac{\partial f}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_m})} = \sum_1^m {}_s (-1)^s \frac{\partial I_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}} = \sum_1^m (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{F}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

che [4]:

$$f \equiv (F, \mathfrak{F}).$$

Queste stesse proprietà possono esprimersi ancora in un altro modo.

Denotiamo con S_{m-1} un iperspazio chiuso ad $m = 1$ dimensioni contenuto in S_n e che restando entro S_n può ridursi ad un punto senza incontrare singolarità delle funzioni F e $\mathfrak{F}$. Siano $\alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}}$ i suoi coseni di direzione; avremo

(31) $$f \,|[S_{m-1}]| =$$

$$= \int_{S_{m-1}} \Sigma_i \left(\Sigma_h \frac{\partial F}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{B}_{h_{r+2} \cdots h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}} \, dS_{m-1}$$

$$= \int_{S_{m-1}} \Sigma_i \left(\Sigma_h \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_{r+1}} \cdots x_{h_{m-1}})} V_{h_1 \cdots h_r} \right) \alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}} \, dS_{m-1}$$

essendo $h_1 \cdots h_{m-1} \equiv i_1 \cdots i_{m-1}$.

Quindi se

$$(F, \mathfrak{F}) \equiv 0$$

(4) Ibid., p. 293 [in questo vol.: XXIII, p. 413].

sarà

$$(32)\qquad \int\limits_{S_{m-1}} \Sigma_i \left(\Sigma \frac{\partial F}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{B}_{h_{r+2} \cdots h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}} \, dS_{m-1}$$

$$= \int\limits_{S_{m-1}} \Sigma_i \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_{r+1}} \cdots x_{h_{m-1}})} V_{h_1 \cdots h_r} \right) \alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}} \, dS_{m-1} = 0 \, .$$

La formula (30) può dedursi dalla precedente.

Se supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia una funzione di punti, allora il teorema contenuto nella formula (32) diviene quello dato nel § 6 della seconda Nota citata, come generalizzazione del teorema di CAUCHY.

La forma (32) dà quindi una estensione del teorema di CAUCHY ad un caso più generale di quello già contemplato nel teorema nella Nota suddetta.

14. Procediamo a considerare un caso in cui è applicabile il teorema ora trovato. Daremo perciò la seguente proposizione:

Se F *e* $\mathfrak{F}$ *contengono un divisore comune* [5], *il quale è una funzione di un iperspazio di ordine pari, allora si ha*

$$(F \, , \mathfrak{F}) \equiv 0 \, .$$

Infatti se λ è una funzione di 1° grado di un iperspazio d'ordine pari, avremo $(\lambda, \lambda) \equiv 0$, perchè la somma $\Sigma_i \, l_{i_1 \ldots i_t} l_{i_{t+1} \ldots i_{2t}}$, in cui $l_{i_1 \ldots i_t} = \dfrac{d\lambda}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_t}}$, conterrà termini due a due eguali e di segno contrario quando t sarà un numero dispari. Applicando quindi la proprietà associativa della operazione di composizione delle funzioni di iperspazî [6] si otterrà il teorema enunciato.

15. Se invece di avere una sola coppia di funzioni F e $\mathfrak{F}$ ne abbiamo più F_k e $\mathfrak{F}_k$ alle quali corrispondono rispettivamente le $V^{(k)}_{h_1 \ldots h_r}$ e $\mathfrak{B}^{(k)}_{h_{r+2} \ldots h_{m-1}}$ nello stesso modo che le V e $\mathfrak{B}$ corrispondono alle F e $\mathfrak{F}$; allora, posto

$$f \equiv \Sigma_k \, (F_k \, , \mathfrak{F}_k),$$

avremo che la f potrà esprimersi mediante due somme di integrali analoghi a quelli che compariscono nella formula (31) e se sarà $f \equiv 0$ avremo che le due somme di integrali saranno nulle.

(5) Ibid., p. 294 [in questo vol.: XXIII, p. 414].
(6) Ibid., pag. 294 [in questo vol.: XXIII, p. 414].