XXVI.

SULLA INTEGRAZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DERIVATE PARZIALI CHE SI PRESENTA NELLA TEORIA DELLE FUNZIONI CONIUGATE

« Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. III, 1889; pp. 260–272.

1. In una Nota recentemente pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » [1], dopo aver considerato dei parametri differenziali i quali hanno rispetto alle funzioni di iperspazî un ufficio analogo a quello dei noti parametri differenziali rispetto alle ordinarie funzioni, ho accennato alla possibilità di integrare un sistema di equazioni differenziali con date condizioni ai limiti, problema che comprende come caso particolare le ordinarie questioni sulla integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 = 0$, e che risolve una questione fondamentale relativamente alle funzioni coniugate le più generali [2].

Mi permetto ora di tornare nuovamente sul problema e di svilupparne la soluzione.

Il sistema di equazioni differenziali è il seguente

$$(1) \qquad \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

$$(1') \qquad \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 .$$

In queste equazioni $x_1 \, x_2 \cdots x_n$ sono le variabili indipendenti e le $p_{i_1 \cdots i_r}$, ottenute per tutte le combinazioni r ad r degli indici $i_1 \cdots i_n \equiv 1 , 2 \cdots n$, sono le funzioni incognite. Supporremo le p tali che mutino segno per una trasposizione degli indici. Le (1) sono ottenute per tutte le combinazioni degli indici $r+1$ a $r+1$, e le (1') per le combinazioni $r-1$ a $r-1$.

Nella mia Nota *Sulle funzioni coniugate* ho dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinché siano soddisfatte le (1), è che si possa porre

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_{1}^{r}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_t}} ,$$

(1) « Rend. R. Acc. Lincei », 5 maggio 1889. [In questo vol.: XXV, pp. 433–443].
(2) Ibid., 28 aprile 1889. [In questo vol.: XXIV, pp. 420–432].

e ho dimostrato pure che le P possono ottenersi dalle p con sole operazioni di quadratura (3). Se quindi si tien conto del teorema 2° della Nota ora citata, avremo che alle (1) e (1′) potranno sostituirsi le equazioni seguenti

$$(-1)^r \Delta^2 P_{i_1 \dots i_{r-1}} + \sum_{1}^{r-1}{}_t (-1)^t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \sum_{1}^{n}{}_s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0. \tag{2}$$

2. Passiamo alle condizioni al contorno che definiscono le $p_{i_1 \dots i_r}$.

Sia il campo S_n una porzione di uno spazio piano ad n dimensioni entro il quale le p e le P sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, e denotiamo il contorno di S_n con S_{n-1} di cui ν sia la normale diretta verso l'interno di S_n. Pongasi

$$\sum_{1}^{n}{}_t\, p_{i_1 \dots i_{r-1} i_t} \cos \nu x_{i_t} = a_{i_1 \dots i_{r-1}} \tag{3}$$

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}} \cos \nu x_{i_s} = b_{i_1 \dots i_{r+1}}, \tag{3'}$$

per un teorema dimostrato nella citata Nota, avremo che entro S_n le p sono determinate quando sono noti al contorno i valori delle a oppure delle b.

Noi ci proponiamo ora di eseguire la effettiva determinazione delle p quando siano note le a o le b nel caso in cui lo spazio S_n sia un campo sferico.

3. Prima di procedere oltre vediamo come può interpretarsi questa questione nella teoria generale delle funzioni coniugate.

Siano $F[S_{r-1}]$, e $\Phi[S_{n-r-1}]$ due funzioni coniugate. Poniamo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} = p_{i_1 \dots i_r};$$

adottando le notazioni della Nota più volte citata (4), avremo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)} = \frac{a_{i_1 \cdots i_{r-1}}}{\sqrt{\sum_{r}^{n} \cos^2(\nu x_{i_t})}}$$

$$\frac{dF}{dS_{i_1 \cdots i_{r+1}}} = \frac{b_{i_1 \cdots i_{s+1}}}{\sqrt{\sum_{1}^{r+1}{}_s \cos^2(\nu x_{i_s})}}$$

Quindi il problema che ci proponiamo risolvere consiste nel determinare le due funzioni coniugate F e Φ entro uno spazio sferico, essendo nota al contorno la

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)}, \quad \text{oppure la} \quad \frac{dF}{dS_{i_1 \cdots i_{r+1}}}.$$

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 602. [In questo vol.: XXIV, p. 423].
(4) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 635. [In questo vol.: XXV, p. 438].

4. Cominceremo dal ricercare le condizioni alle quali devono soddisfare le a e le b e questa ricerca la condurremo senza supporre che S_n sia un campo sferico, ma ammettendolo qualunque.

Due condizioni possono ottenersi subito; infatti dovremo evidentemente avere:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{1}^{n}{}_t\, a_{i_1 \ldots i_{r-2} i_t} \cos \nu x_{i_t} = 0$$

$$\text{(I')} \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s\, b_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = 0 .$$

Prendiamo poi nella formula (2) della citata Nota [5], la $P'_{i_1 \ldots i_{r-1}} = 1$ e tutte le altre P′ uguali a zero. Si otterrà:

$$\int_{S_{n-1}} a_{i_1 \ldots i_{r-1}}\, dS_{n-1} + \int_{S_n} \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial p_{i_1 \ldots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}}\, dS_n = 0 ;$$

dovremo dunque avere

$$\text{(II)} \qquad \int_{S_{n-1}} a_{i_1 \ldots i_{r-1}}\, dS_{n-1} = 0 .$$

In modo analogo si troverebbe:

$$\text{(II')} \qquad \int_{S_{n-1}} b_{i_1 \ldots i_{r+1}}\, dS_{n-1} = 0 .$$

Prendiamo ora un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ per individuare i punti dell'iperspazio S_{n-1} e denotiamo come sempre con ν la normale ad esso.

Poniamo:

$$\xi_1 = u_1 ,\ \xi_2 = u_2 , \cdots , \xi_{n-1} = u_{n-1} ,\ \xi_n = \nu .$$

Sia

$$\sum_{1}^{n-1}{}_r \sum_{1}^{n-1}{}_s E_{rs}\, du_r\, du_s$$

il quadrato dell'elemento lineare di S_{n-1}.

Quello di S_n risulterà dato da

$$\sum_{1}^{n-1}{}_r \sum_{1}^{n-1}{}_s E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s + d\xi_n^2 .$$

(5) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 631. [In questo vol.: XXV, p. 434].

Poniamo, come sopra,

$$p_{i_1\cdots i_r}=\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}\,,\qquad \tilde\omega_{i_1\cdots i_r}=\frac{dF}{d(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_r})}\,,$$

avremo

$$p_{i_1\cdots i_r}=\Sigma_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\frac{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}=\Sigma_h\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\,,\tag{4}$$

essendo

$$D=\left\{\frac{d(x_1\cdots x_n)}{d(\xi_1\cdots\xi_n)}\right\}^2=\begin{vmatrix}E_{1,1}\cdots\cdots E_{1,n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ E_{n-1,1}\cdots E_{n-1,n-1}\end{vmatrix}\,,$$

onde, scegliendo opportunamente in ciascuna formola il segno di $\sqrt{D}$, avremo

$$b_{i_1\cdots i_{r+1}}=\frac{1}{\sqrt{D}}\Sigma_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\sum_{1}^{r+1}{}_s\frac{d(x_{i_s}x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}\cos(\nu x_{i_s})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D}}\Sigma_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\sum_{1}^{n}{}_s\frac{d(x_{i_s}x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}\cos\nu x_{i_s}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D}}\Sigma_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\sum_{r+1}^{n}{}_l(-1)^l\frac{d\,x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_{l-1}}\xi_{h_{l+1}}\cdots\xi_{h_n})}\sum_{1}^{n}{}_s\frac{\partial x_{i_s}}{\partial\xi_{h_l}}\cos(\nu x_{i_s})\,.$$

Ora

$$\sum_{1}^{n}\frac{\partial x_{i_s}}{\partial\xi_{h_l}}\cos(\nu x_{i_s})$$

è eguale ad 1 se $h_l=n$, altrimenti è nulla. Quindi:

$$b_{i_1\cdots i_{r+1}}=\frac{1}{\sqrt{D}}\Sigma'_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}}\cdots u_{h_{n-1}})}\,,$$

ove Σ'_h si intende estesa a tutte le combinazioni degli indici $1,2,\cdots,n-1$, r ad r e $h_1\cdots h_{n-1}\equiv 1,2\cdots n-1$.

Ne segue che

$$\Sigma_i\,b_{i_1\cdots i_{r+1}}\frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D}}\Sigma'_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\Sigma_i\frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}}\cdots u_{h_{n-1}})}\,\frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}\,.$$

Ma

$$\Sigma_i\frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}}\cdots u_{h_{n-1}})}\,\frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}=\begin{vmatrix}E_{h_{r+1},k_{r+1}}\cdots E_{h_{n-1},k_{r+1}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ E_{h_{r+1},k_{n-1}}\cdots E_{h_{n-1},k_{n-1}}\end{vmatrix}\,;$$

onde, adoperando una notazione già usata (6), potremo rappresentare la precedente espressione col simbolo

$$\mathrm{D}\begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_{r+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix},$$

e per conseguenza avremo

$$(5)\qquad \Sigma_i\, b_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d\,(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})} = \Sigma'_h \sqrt{\mathrm{D}}\begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_{r+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}.$$

Da questa relazione si deduce

$$(6)\qquad \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} = \Sigma'_k \sqrt{\mathrm{D}}\begin{bmatrix} h_1\cdots h_r \\ k_1\cdots k_r\end{bmatrix} \Sigma_i\, b_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d\,(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})},$$

onde vediamo che le b debbono soddisfare ancora alle condizioni

$$(\mathrm{III})\qquad \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{h_s}} \left\{ \Sigma'_k \sqrt{\mathrm{D}}\begin{bmatrix} h_1\cdots h_{s-1}\, h_{s+1}\cdots h_{r+1} \\ k_1\cdots k_r\end{bmatrix} \Sigma_i\, b_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d\,(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}\right\} = 0.$$

Queste equazioni sono tante quante sono le combinazioni degli indici $1, 2\cdots n-1$, $r+1$ a $r+1$.

Osserviamo ora che, posto

$$\sum_{1}^{n-1}{}_r \sum_{1}^{n-1}{}_s \mathrm{E}_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s + d\xi_n^2 = \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s \mathrm{E}_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s,$$

avremo

$$\mathrm{E}_{sn} = \mathrm{E}_{ns} = 0\ (s \gtrless n) \quad , \quad \mathrm{E}_{n,n} = 1,$$

onde

$$\begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_{r+1}\cdots k_n\end{bmatrix} = 0$$

se uno degli h (o k) è uguale ad n, mentre tutti gli indici k (o h) sono diversi da n, e

$$\begin{bmatrix} h_{r+1},\cdots h_{n-1}, n \\ k_{r+1},\cdots k_{n-1}, n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_{r+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix}$$

se tutti gli indici h e k sono diversi da n.

Consideriamo le espressioni che nella citata Nota (7) ho indicato con $\theta_{k_r\cdots k_n}$, cioè

$$\sum_{r}^{n}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{\mathrm{D}}\begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_r\cdots k_{s-1}\, k_{s+1}\cdots k_n\end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}\right\}.$$

(6) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 637. [In questo vol.: XXV, p. 440].

(7) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 638. [In questo vol.: XXV, p. 441].

Nel nostro caso avremo

$$(7)\qquad \theta_{k_r\cdots k_{n-1},n} = \sum_r^{n-1}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \left\{ \Sigma'_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_r\cdots k_{s-1}\, k_{s+1}\cdots k_{n-1} \end{bmatrix} \tilde\omega_{h_1\cdots h_r} \right\}$$

$$+ (-1)^r \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \Sigma''_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r\cdots h_{n-1} \\ k_r\cdots k_{n-1} \end{bmatrix} \tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n} \right\}, \qquad (k_r\cdots k_{n-1} \gtrless n)$$

$$(8)\qquad \theta_{h_r\cdots k_n}$$

$$= \sum_r^{n}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \left\{ \Sigma''_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r\cdots h_{n-1} \\ k_r\cdots k_{s-1}\, k_{s+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n} \right\}, \qquad (k_r,\cdots k_n \gtrless n)$$

in cui Σ''_h è una somma estesa a tutte le combinazioni degli indici $1, 2\cdots n-1$, $r-1$ a $r-1$, e $(h_1\cdots h_{n-1}) \equiv (1, 2\cdots n-1)$.

Le a sono date da

$$a_{i_1\cdots i_{r-1}} = \sum_1^n{}_t\, p_{i_1\cdots i_{r-1}\, i_t} \cos(\nu x_{i_t})$$

$$= \sum_r^n{}_t (-1)^{t-r} \Sigma_h \tilde\omega_{h_1\cdots h_r} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d(x_{i_r}\cdots x_{i_{t-1}}\, x_{i_{t+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots \xi_{h_n})} \cos \nu x_{i_t}$$

$$= \Sigma''_h \tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d(x_{i_r}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_r}\cdots \xi_{h_{n-1}}\, \xi_n)},$$

quindi

$$\Sigma_i\, a_{i_1\cdots i_{r-1}} \frac{d(x_{i_r}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{k_r}\cdots \xi_{k_{n-1}}\, \xi_n)} = \Sigma''_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_r\cdots h_{n-1} \\ k_r\cdots k_{n-1} \end{bmatrix} \tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n}.$$

Se sono soddisfatte le (1) e (1') deve aversi [8]

$$\theta_{k_r\cdots k_n} = 0.$$

Dalla (8) si deducono dunque le seguenti condizioni per le a,

$$(\mathrm{IV})\qquad \Sigma_i \sum_r^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \left(\sum_1^r{}_t (-1)^t a_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_r} \cos(\nu x_{i_t}) \right)$$

$$\times \frac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_r}\cdots u_{k_{s-1}}\, u_{k_{s+1}}\cdots u_{k_n})} = 0.$$

5. Ciò premesso passiamo alla risoluzione della questione propostaci. In primo luogo si potrà osservare che i due problemi di determinare le p quando si conoscono le a, oppure le b, rientrano l'uno nell'altro.

Ponendo infatti

$$p_{i_1\cdots i_r} = q_{i_{r+1}\cdots i_n},$$

(8) Ibid.

risulta

$$a_{i_1 \cdots i_{r-1}} = \sum_1^n {}_t\, p_{i_1 \cdots i_{t-1}\, i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = \sum_r^n {}_t (-1)^{t-r} q_{i_r \cdots i_{t-1}\, i_{t+1} \cdots i_n} \cos(\nu x_{i_t})$$

$$b_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s\, p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \cos \nu x_{i_s} = (-1)^n \sum_1^n q_{i_{r+2} \cdots i_n\, i_s} \cos \nu x_{i_s}$$

e le q soddisfano alle equazioni differenziali

$$\sum_r^n (-1)^{t-r} \frac{dq_{i_r \cdots i_{t-1}\, i_{t+1} \cdots i_n}}{\partial x_{i_t}} = 0$$

$$\sum_1^n {}_s \frac{\partial q_{i_{r+2} \cdots i_n\, i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0 ,$$

perfettamente analoghe alle (1) e (1′).

Ci limiteremo perciò a risolvere la questione ammettendo date le b al contorno.

Prendiamo come unità di lunghezza il raggio del campo sferico S_n limitato dal contorno S_{n-1} e denotiamo con ρ la distanza dei punti di S_n dall'origine, centro dello spazio sferico.

Poniamo

$$B_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s\, p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+1}}\, x_{i_s} ,$$

avremo

$$\Delta^2 B_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s (x_{i_s} \Delta^2 p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+1}} + p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \Delta^2 x_{i_s})$$

$$+ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

Ora al contorno S_{n-1} si ha

$$B_{i_1 \cdots i_{r+1}} = -\, b_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

per conseguenza le funzioni B potranno immediatamente determinarsi con sole operazioni di quadratura [9].

Poiché le b debbono soddisfare le condizioni (II′), così avremo che le B/ρ si conserveranno sempre finite, onde potremo porre

$$B_{i_1 \cdots i_{r+1}} = -\, \rho \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}} .$$

(9) Vedi una Nota del prof. TONELLI pubblicata nei « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Gottinga », 1875.

I punti del contorno S_{n-1} li supporremo individuati, come precedentemente, per mezzo di un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2 \cdots u_{n-1}$ e supporremo sempre che

$$\sum_r^{n-1}\sum_s^{n-1} E_{rs}\, du_r\, du_s$$

sia il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S_{n-1}. Ogni punto dello spazio S_n potrà essere proiettato dall'origine sopra S_{n-1} e quindi sarà individuato dalle coordinate $u_1, u_2 \cdots u_{n-1}$ della proiezione e dalla sua distanza ρ dall'origine. Se poniamo $x_i = \rho y_i$, avremo che le y_i, saranno le coordinate della proiezione.

Conduciamo per un punto qualunque di S_n un iperspazio sferico T_{n-1} concentrico a S_{n-1} di raggio ρ. Esso racchiuderà nel suo interno un certo spazio T_n.

Il quadrato dell'elemento lineare di T_{n-1} sarà

$$\sum_r^{n-1}\sum_s^{n-1} \mathbf{E}_{rs}\, du_r\, du_s$$

ove

$$\mathbf{E}_{rs} = \rho^2 E_{rs}.$$

La normale a T_{n-1}, diretta verso l'interno di T_n, sarà $-\rho$ e i coseni di direzione della normale stessa risulteranno

$$-\frac{x_1}{\rho}, -\frac{x_2}{\rho}, \ldots -\frac{x_n}{\rho}.$$

Noi possiamo considerare T_{n-1} come il contorno dello spazio T_n; quindi le formule trovate nel § 4 potranno applicarsi a T_{n-1} invece che ad S_{n-1}. Basterà osservare che dovremo porre invece delle $b_{i_1 \ldots i_{r+1}}$, $B_{i_1 \ldots i_{r+1}}/\rho = \mathbf{B}_{i_1 \ldots i_{r+1}}$, prendendo i valori di queste funzioni nei punti di T_{n-1}, e a ν dovremo sostituire $-\rho$. Oltre a ciò in luogo di D dovremo porre

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_{1,1} & \cdots & \mathbf{E}_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}_{n-1,1} & \cdots & \mathbf{E}_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \rho^{2(n-1)} \begin{vmatrix} E_{1,1} & \cdots & E_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n-1,1} & \cdots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

cioè dovremo sostituire a D, $\rho^{2(n-1}$ D e così analogamente invece di

$$\begin{bmatrix} h_1 \cdots h_q \\ k_1 \cdots k_q \end{bmatrix}$$

dovremo porre

$$\rho^{-2(n-q-1)} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_q \\ k_1 \cdots k_q \end{bmatrix}.$$

Applichiamo ora le (6). Scegliendo convenientemente il segno di $\sqrt{\mathrm{D}}$, otterremo

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_r} = -\rho^r \Sigma'_k \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_r \\ k_1 \cdots k_r \end{bmatrix} \Sigma_i \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}} \frac{d(y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \cdots u_{k_{n-1}})}, \qquad (h_1 \cdots h_r \gtrless n).$$

Se teniamo conto delle equazioni $\theta_{k_r \cdots k_{n-1}, n} = 0$, le (7) e (5) dànno

$$(-1)^r \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-2r+1} \Sigma''_h \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_r \cdots h_{n-1} \\ k_r \cdots k_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}, n} \right\}$$

$$= \Sigma_i \sum_r^{n-1} {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}} \cdots x_{i_n})}{d(u_{k_r} \cdots u_{k_{s-1}} u_{k_{s+1}} \cdots u_{k_{n-1}})}$$

$$= (-1)^r \Sigma_i \frac{d(\mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})} \rho^{n-r-1}.$$

Prendiamo

$$\int_0^\rho \rho^{n-r-1} \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}} d\rho;$$

otterremo delle funzioni che per $\rho = 0$ si annullano almeno d'ordine $n - r$; onde potremo scriverle eguali a

$$\rho^{n-r} \mathrm{C}_{i_1 \cdots i_{r+1}},$$

essendo le C delle funzioni sempre finite. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-2r+1} \Sigma''_h \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_r \cdots h_{n-1} \\ k_r \cdots k_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}\, n} \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \Sigma_i \frac{d(\mathrm{C}_{i_1 \cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})} \rho^{n-r} \right\}.$$

Integrando si otterrà

$$\Sigma''_h \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_r \cdots h_{n-1} \\ k_r \cdots k_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}\, n}$$

$$= \Sigma_i \frac{d(\mathrm{C}_{i_1 \cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})} \rho^{r-1} + \mathrm{K}_{k_r \cdots k_{n-1}} \rho^{2r-n-1},$$

essendo le K delle costanti arbitrarie.

Da questa formula, tenendo conto delle (8), segue immediatamente che le equazioni

$$\theta_{k_r \cdots k_n} = 0$$

risultano identicamente soddisfatte.

Dalle equazioni precedenti si deduce:

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}\, n} = \Sigma_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_{r-1} \\ k_1 \cdots k_{r-1} \end{bmatrix} \Sigma_i \frac{d(C_{i_1 \cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})} \rho^{r-1}$$

$$+ \Sigma_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_{r-1} \\ k_1 \cdots k_{r-1} \end{bmatrix} K_{k_r \cdots k_{n-1}} \rho^{2r-n-1}.$$

Ora, tenendo conto delle (4), si ha che, affinché le p si conservino sempre finite è necessario e sufficiente che le $\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_r}$ siano, rispetto a ρ, infinitesime almeno d'ordine r e le $\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}, n}$ almeno d'ordine $r - 1$. Ciò non può succedere altro che prendendo le costanti arbitrarie K nulle. Quindi otterremo:

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_r} = -\rho^r \Sigma_k' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_r \\ k_1 \cdots k_r \end{bmatrix} \Sigma_i \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}} \frac{d(y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}} \cdots u_{k_{n-1}})}, \qquad (h_1 \cdots h_r \gtreqless n)$$

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}, n} = \rho^{r-1} \Sigma_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_{r-1} \\ k_1 \cdots k_{r-1} \end{bmatrix} \Sigma_i \frac{d(C_{i_1 \cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})}, \quad (h_1 \cdots h_{r-1} \gtreqless n).$$

Queste formule risolvono completamente la questione propostaci. Il processo seguìto prova che, *almeno nel caso in cui* S_{n-1} *sia uno spazio sferico le equazioni* (I') (II') e (III) *dànno le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare le* b *affinché possano corrispondere ad esse delle* p *che soddisfacciano le* (1) *e* (1').

Pisa, ottobre 1889.