XXIII.

DELLE VARIABILI COMPLESSE NEGLI IPERSPAZI

Nota I.

« Rend. Accad. dei Lincei », ser. IV, vol. V_1, 1889_1; pp. 158–165.

1. In alcune Note che ebbi l'onore di presentare a cotesta Accademia, ho considerato prima le funzioni dipendenti da altre funzioni, poi quelle dipendenti da linee, e da ultimo ho rivolto tali ricerche alla estensione della teoria delle funzioni di variabili complesse negli spazî a tre dimensioni (1).

Quest'ultimo studio è relativo a variabili complesse dipendenti dalle linee di un campo a tre dimensioni legate fra loro da una condizione analoga a quella di *monogeneità* ed è uno studio preliminare necessario per la estensione della teoria di RIEMANN sugli integrali abeliani agli integrali multipli. Ciò si comprende osservando che la integrazione di funzioni di due variabili complesse dà luogo ad integrali estesi a superficie. Ora per questi integrali, come ha dimostrato POINCARÉ, vale il teorema analogo a quello di CAUCHY; perciò gli integrali stessi debbono dipendere dalle linee che limitano le superficie di integrazione. La integrazione doppia deve dunque condurre a considerare quelle funzioni che ho denominato funzioni di linee.

2. Però, come si vede facilmente, limitandosi alla estensione agli spazî a tre dimensioni si viene a restringere lo studio degli integrali multipli ad un caso molto particolare. Perciò ho creduto opportuno di generalizzare i risultati trovati agli iperspazî; in tal modo si viene a prendere in esame il caso più generale degli integrali multipli.

Mi permetto di presentare succintamente a cotesta Accademia alcuni dei resultati ottenuti nello studio generale che ho fatto delle variabili complesse negli iperspazî. Allorché si passa dallo spazio ordinario agli iperspazî non basta considerare delle funzioni di linee, ma bisogna esaminare le funzioni degli iperspazî immersi nello spazio totale. Quindi, se ci riferiamo ad uno spazio ad n dimensioni, dovremo considerare delle funzioni degli spazî a $0, 1, \cdots, n-1$ dimensioni in esso immersi. Onde procedere allo studio delle funzioni di iperspazî è necessario, innanzi tutto, estendere a queste funzioni i concetti di continuità e di derivazione.

(1) « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », vol. III_2, 1887, fasc. 4, 6, 7, 9, 10; vol. IV_1, 1888, fasc. 3, 5. [In questo vol.: XVII, XVIII, XIX, pp. 294–350].

www.rcin.org.pl

3. Ecco come si ottiene questa estensione. Una variabile φ si dirà *funzione* degli iperspazî S_r (ad r dimensioni) immersi in un iperspazio S_n se ad ogni possibile iperspazio S_r entro S_n, avente una certa direzione [2], corrisponderà un valore di φ. Questa dipendenza si denoterà col simbolo $\varphi = \varphi\,|[S_r]|$. Supporremo di considerare sempre degli iperspazî *chiusi*. Scelto un punto P di S_r si conduca per esso un iperspazio S_{n-r} normale ad S_r ed in S_{n-r} si prenda un intorno s di P. Facciamo percorrere a P tutti i punti di S_r; avremo che s genererà una porzione di spazio ad n dimensioni che si chiamerà un intorno di S_r. Consideriamo un punto P′ di s: mentre P

(2) La parola *direzione* attribuita ad un iperspazio va intesa nel modo seguente. Un iperspazio (ad n dimensioni) è caratterizzato dalla varietà di valori di n variabili indipendenti $x_1, x_2 \cdots x_n$. Un iperspazio S_r ad r dimensioni ($r < n$) in esso immerso corrisponde alla varietà di valori che assumono le $x_1, x_2 \cdots x_n$, quando esse sono legate fra loro da $n-r$ relazioni indipendenti, ovvero quando esse dipendono da r variabili indipendenti $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r$ a cui sono legate da n relazioni

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r) \qquad i = 1, 2 \cdots n.$$

Ammessa la differenziabilità delle precedenti relazioni formiamo la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial \omega_1}, \cdots \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_r}, \dfrac{\partial x_2}{\partial \omega_r}, \cdots \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_r} \end{matrix} \right\|$$

Sia Δ^2 il quadrato di questa matrice; ammetteremo che esso sia tale che fissato in un punto il segno di Δ, il segno stesso, per la continuità, resti fissato in tutti i punti. Quando si sarà stabilito il segno di Δ, si dirà che si è stabilita la *direzione* dell'iperspazio S_r. La quantità $dS = \Delta d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_r$ si dirà l'*elemento dell'iperspazio*. Prendiamo un determinante minore della matrice

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \Sigma \pm \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1} \cdots \frac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_r}$$

e formiamo $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_r} = \dfrac{\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_r}}{\Delta}$. Le $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ non muteranno sostituendo alle $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r$ altre variabili legate alle prime da relazioni qualunque, e il segno delle α cambierà mutando la direzione dell'iperspazio: esse si chiameranno i *coseni di direzione* dell'iperspazio, e soddisfaranno alle relazioni seguenti

$$\sum\nolimits_i \alpha^2_{i_1 i_2 \cdots i_r} = 1,$$

$$\sum_s^{r+1} (-1)^s \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \alpha_{i_s h_2 \cdots h_r} = 0$$

in cui Σ_i è una somma estesa a tutte le combinazioni degli indici $i_1 i_2 \cdots i_r$. Se uno spazio S_{n-r} ad $n-r$ dimensioni ha i coseni $\beta_{h_1 \cdots h_{n-r}}$ e in un punto comune con S_r si ha $\alpha_{i_1 \cdots i_r} = \beta_{h_1 \cdots h_{n-r}}$, essendo tutte le i differenti dalle h e la serie di numeri $i_1 \cdots i_r h_1 \cdots h_{n-r}$ una permutazione sempre pari o sempre dispari dei numeri $1, 2 \cdots n$, si dirà che i due iperspazî S_r e S_{n-r} sono fra loro normali.

www.rcin.org.pl

descrive S_r, P′ descriverà un nuovo iperspazio S'_r che si dirà appartenere all'intorno di S_r. La funzione $\varphi \mid [S_r] \mid$ sarà continua se, preso un numero σ piccolo ad arbitrio, si potrà trovare un intorno di S_r, tale che

$$\operatorname{mod} [\varphi \mid [S'_r] \mid - \varphi \mid [S_r] \mid] < \sigma,$$

appartenendo S'_r all'intorno scelto.

Oltre alla continuità di $\varphi \mid [S_r] \mid$ ammetteremo soddisfatta la seguente condizione. Si passi dall'iperspazio S_r all'iperspazio S'_r dando ad ogni punto di S_r uno spostamento ε variabile con continuità da punto a punto. Il luogo degli intervalli ε è un iperspazio ad $r+1$ dimensioni di ampiezza σ.

Ammetteremo che si possa rendere $\operatorname{mod} [\varphi \mid [S'_r] \mid - \varphi \mid [S_r] \mid]$ minore di un numero scelto ad arbitrio, purché σ sia minore di un certo valore σ_0.

4. Ciò premesso, preso in S_r un intorno s di un punto P, diamo ad s uno spostamento di ampiezza δx_i parallelamente ad x_i. Denotiamo con $\delta\varphi$ la variazione corrispondente di φ.

Supporremo che esista

$$\lim_{\substack{s=0 \\ \delta x_i = 0}} \frac{\delta\varphi}{s \cdot \delta x_i} = \varphi'_{x_i} \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Chiameremo φ'_{x_i} la *derivata* di φ *rispetto ad x_i nel punto* P *relativa ad* S_r. Ammettendo che il rapporto che comparisce nel primo membro della equazione precedente tenda uniformemente verso il suo limite, rispetto a tutti i possibili punti P ed iperspazî S_r, e ammettendo inoltre che questo limite sia continuo, si ha facilmente che, dando ad ogni punto di S_r uno spostamento risultante di $\delta x_1, \delta x_2 \cdots \delta x_n$, la variazione corrispondente di φ è data, a meno di infinitesimi d'ordine superiore alle δx_i, da

$$(1) \qquad \delta\varphi = \int_{S_r} \sum_1^n{}_i \varphi'_{x_i} \delta x_i \, dS_r .$$

Le φ'_{x_i} debbono soddisfare alla condizione che per tutti quei sistemi di spostamenti δx_i che portano lo spazio S_r in sè stesso, $\delta\varphi$ deve risultare nullo. Mediante questa osservazione si trova che le φ'_{x_i}, possono esprimersi mediante dei paramenti $\lambda_{q_1, q_2 \cdots q_{r+1}}$ che soddisfano alla condizione di cambiar segno per ogni trasposizione degli indici, nella maniera seguente:

$$(2) \qquad \varphi'_{x_i} = \Sigma_q \lambda_{i, q_1 \cdots q_r} \alpha_{q_1 q_2 \cdots q_r},$$

in cui Σ_q è estesa a tutte le combinazioni degli indici $q_1 \cdots q_r$ e $\alpha_{q_1 q_2 \cdots q_r}$ sono i coseni di direzione dell'iperspazio S_r. I parametri $\lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}}$, oltre a dipendere dall'iperspazio S_r, dipendono anche dal punto in cui si prende la derivata.

www.rcin.org.pl

5. Siano S'_r e S''_r due iperspazî aventi una porzione s a comune, la cui direzione sia differente, secondoché si ritiene appartenente al primo o al secondo iperspazio. Denotiamo con S'''_r l'iperspazio che si ottiene togliendo s dall'insieme di S'_r e S''_r e che ha per direzione quella dei due iperspazî.

Se è soddisfatta la condizione

$$\varphi \mid [S'''_r] \mid = \varphi \mid [S'_r] \mid + \varphi \mid [S''_r] \mid$$

diremo che φ è di *primo grado* (semplice). Quando è soddisfatta la precedente condizione si ha immediatamente che, se l'ampiezza di S_r diminuisce indefinitamente,

$$\lim \varphi \mid [S_r] \mid = 0. \tag{3}$$

Si può inoltre dimostrare il seguente teorema:

Se φ è una funzione di primo grado degli iperspazî S_r, immersi in un iperspazio S_n, esistono per ogni punto di S_n un sistema di valori che possono prendersi come parametri $\lambda_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}}$ per tutti gli iperspazî che passano per quel punto.

Dalle formule (1), (2) e (3), denotando con $\Lambda_{q_1, q_2 \cdots q_{r+1}}$ questi valori indipendenti da S_r che possono prendersi come parametri $\lambda_{q_1, q_2 \cdots q_{r+1}}$, si ha la formula

$$\varphi \mid [S_r] \mid = \int_{S_{r+1}} \Sigma_q \Lambda_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}} dS_{r+1}$$

in cui S_{r+1} è un iperspazio aperto ad $r+1$ dimensioni limitato dall'iperspazio S_r, e avente $\beta_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}}$ per coseni di direzione.

Se S_{r+1} si impiccolisce indefinitamente riducendosi ad un punto P, posto

$$S_{r+1} = \int_{S_{r+1}} dS_{r+1},$$

si avrà

$$\lim \frac{\varphi \mid [S_{r+1}] \mid}{S_{r+1}} = \Sigma_q \Lambda_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}} = \frac{d\varphi}{dS_{r+1}}$$

in cui le β rappresentano i coseni di direzione di S_{r+1} in P. Prendiamo S_{r+1} tale che in P tutti i coseni β siano nulli, eccettuato $\beta_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}} = 1$; avremo

$$\lim \frac{\varphi \mid [S_{r+1}] \mid}{S_{r+1}} = \Lambda_{i_1, i_2 \cdots i_{r+1}}.$$

Perciò porremo

$$\Lambda_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})}$$

e la chiameremo la *derivata di φ rispetto a $x_{i_1}, x_{i_2} \ldots x_{i_{r+1}}$.*

6. Per procedere alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare queste derivate è necessario estendere il teorema di STOKES al caso degli iperspazî. Una tale estensione si ottiene senza dif-

www.rcin.org.pl

ficoltà. Siano $L_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ delle funzioni *dei punti* di un iperspazio S_n finite e continue insieme alle loro derivate prime e tali che ogni trasposizione degli indici ne muti il segno.

Si formi

$$M_{i_1, i_2 \ldots i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} .$$

Denotiamo con S_r il contorno di un iperspazio S_{r+1} ad $r+1$ dimensioni aperto ed immerso in S_n; con $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}}$ i coseni di direzione di S_{r+1} e con $\beta_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ quelli di S_r.

La estensione del teorema di STOKES consiste nella formula seguente

$$\int_{S_{r+1}} \Sigma_i M_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} dS_{r+1} = \int_{S_r} \Sigma_i L_{i_1 i_2 \ldots i_r} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_r} dS_r .$$

Così stabilita questa formula fondamentale, se ne deduce che le condizioni *necessarie* e *sufficienti* a cui debbono soddisfare le derivate di una funzione di primo grado $\varphi \,|\, [S_r] \,|$ sono le seguenti:

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})} = 0 .$$

Queste condizioni si chiameranno le *condizioni di integrabilità* a cui debbono soddisfare le derivate di una funzione di primo grado.

7. Adottiamo il simbolo $\frac{d(y_1 y_2 \cdots y_n)}{d(x_1 x_2 \cdots x_n)}$ per denotare il determinante funzionale delle variabili y rispetto alle variabili x. Le formule ad un cambiamento di variabili per le funzioni di iperspazî possono allora scriversi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (x'_{h_1} x'_{h_2} \cdots x'_{h_{r+1}})} = \Sigma_i \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1} x'_{h_2} \cdots x'_{h_{r+1}})} .$$

8. Passiamo ora ad estendere alle funzioni di iperspazî il concetto fondamentale della *monogeneità*. A tal fine basterà considerare due funzioni f e φ complesse e di primo grado degli iperspazî S_r immersi in S_n, tali che, in un punto P qualunque dell'iperspazio totale S_n, il rapporto

$$\frac{d\varphi}{dS_{r+1}} : \frac{df}{dS_{r+1}}$$

dipenda da P soltanto. Il collegamento fra le due funzioni f e φ espresso dalla precedente condizione si dirà un *collegamento di isogeneità* o altrimenti si diranno *isogene* le due variabili complesse f e φ.

Poniamo, col separare le parti reali dalle immaginarie,

$$\frac{\partial f}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1 \ldots i_{r+1}} + i q_{i_1 \ldots i_{r+1}} = p_1 + i q_1 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = \tilde{\omega}_{i_1 \ldots i_{r+1}} + i \chi_{i_1 \ldots i_{r+1}} = \tilde{\omega}_1 + i \chi_1 ,$$

www.rcin.org.pl

denotando l'insieme degli indici $i_1 \cdots i_{r+1}$ con I, cioè ponendo $(i_1 i_2 \cdots i_{r+1}) \equiv \mathrm{I}$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché f e φ siano *isogene* sarà

$$\frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} + i\chi_{\mathrm{I}}}{p_{\mathrm{I}} + iq_{\mathrm{I}}} = \frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{H}} + i\chi_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}} + iq_{\mathrm{H}}}$$

essendo $\mathrm{H} \equiv (h_1, h_2 \cdots h_n)$ un'altra combinazione qualunque degli indici. Dalla equazione precedente si deduce

$$(4) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{H}} - \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}\, p_{\mathrm{I}} = \chi_{\mathrm{I}}\, q_{\mathrm{H}} - \chi_{\mathrm{H}}\, q_{\mathrm{I}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}\, q_{\mathrm{H}} - \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}\, q_{\mathrm{I}} = \chi_{\mathrm{H}}\, p_{\mathrm{I}} - \chi_{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{H}}\,. \end{cases}$$

Poniamo

$$p_{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{I}}\, q_{\mathrm{H}} = \mathrm{E}_{\mathrm{I,H}}$$
$$p_{\mathrm{I}}\, q_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{H}}\, q_{\mathrm{I}} = \mathrm{D}_{\mathrm{I,H}}\,.$$

Fra le E e D passeranno le relazioni

$$\mathrm{D}_{\mathrm{IH}}\, \mathrm{E}_{\mathrm{LK}} + \mathrm{E}_{\mathrm{HK}}\, \mathrm{E}_{\mathrm{LI}} + \mathrm{D}_{\mathrm{KI}}\, \mathrm{E}_{\mathrm{LH}} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\,, \mathrm{E}_{\mathrm{IL}} \\ \mathrm{E}_{\mathrm{KH}}\,, \mathrm{E}_{\mathrm{KL}} \end{vmatrix} = \mathrm{D}_{\mathrm{IK}}\, \mathrm{D}_{\mathrm{HL}}\,.$$

Risolvendo le (4) rispetto a $\tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$ e χ_{I} si otterrà

$$(5) \qquad \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\, \chi_{\mathrm{L}} - \mathrm{E}_{\mathrm{II}}\, \chi_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{HI}}}\,, \qquad \chi_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} - \mathrm{E}_{\mathrm{II}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{IH}}}\,.$$

Osservando ora che il primo membro delle precedenti equazioni è indipendente da H, mediante un calcolo semplice avremo

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\, \chi_{\mathrm{K}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}}\, \chi_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{HK}}}\,, \qquad \chi_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{KH}}}\,.$$

Dalle formule precedenti si deduce che, comunque si prendano I, H, K, si ha sempre

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathrm{HK}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} + \mathrm{D}_{\mathrm{KI}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} + \mathrm{D}_{\mathrm{IH}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} = 0 \\ \mathrm{D}_{\mathrm{HK}}\, \chi_{\mathrm{I}} + \mathrm{D}_{\mathrm{KI}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} + \mathrm{D}_{\mathrm{IH}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} = 0. \end{cases}$$

9. Riprendiamo le equazioni (5); da esse si deduce

$$(7) \qquad \Theta_{\mathrm{IL}} = \frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}\,, \chi_{\mathrm{I}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{L}}\,, \chi_{\mathrm{L}} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IK}}\, \chi_{\mathrm{K}}\, \chi_{\mathrm{L}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}}\, \chi_{\mathrm{H}}\, \chi_{\mathrm{L}} + \mathrm{E}_{\mathrm{LK}}\, \chi_{\mathrm{H}}\, \chi_{\mathrm{I}} - \mathrm{E}_{\mathrm{LH}}\, \chi_{\mathrm{K}}\, \chi_{\mathrm{I}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}\, \mathrm{D}_{\mathrm{HK}}}\,.$$

Scambiando I con H e L con K, l'ultimo membro della equazione precedente non muta. Quindi avremo

$$\frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}\,, \chi_{\mathrm{I}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{L}}\,, \chi_{\mathrm{L}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{HK}}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}\,, \chi_{\mathrm{H}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{K}}\,, \chi_{\mathrm{K}} \end{vmatrix}$$

vale a dire le Θ_{IL} sono indipendenti da I e da L e perciò le denoteremo tutte con Θ. Prendiamo nella (7) $\mathrm{I} \equiv \mathrm{H}$, $\mathrm{L} \equiv \mathrm{K}$; si avrà

$$\Theta = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{II}}\, \chi_{\mathrm{L}}^2 - 2\, \mathrm{E}_{\mathrm{IL}}\, \chi_{\mathrm{I}}\, \chi_{\mathrm{L}} + \mathrm{E}_{\mathrm{LL}}\, \chi_{\mathrm{I}}^2}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}^2} = \frac{(p_{\mathrm{I}}\, \chi_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{L}}\, \chi_{\mathrm{I}})^2 + (q_{\mathrm{I}}\, \chi_{\mathrm{L}} - q_{\mathrm{L}}\, \chi_{\mathrm{I}})^2}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}^2}\,.$$

www.rcin.org.pl

Questa formula dimostra che Θ è una quantità *positiva*.

Scambiando nella (7) $\tilde{\omega}$ con χ e p con q, la Θ non muta; avremo quindi per Θ l'altra espressione

$$\Theta = \frac{E_{IH}\,\tilde{\omega}_K\,\tilde{\omega}_L - E_{IK}\,\tilde{\omega}_H\,\tilde{\omega}_L + E_{LK}\,\tilde{\omega}_H\,\tilde{\omega}_I - E_{LH}\,\tilde{\omega}_K\,\tilde{\omega}_I}{D_{IL}\,D_{HK}}\,.$$

Separiamo in $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2$ la parte reale da quella immaginaria, e poniamo, adoperando i simboli già introdotti,

$$\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial\,(x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial\,(x_I)}$$

$$\chi_I = \chi_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial\,(x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial\,(x_I)}\,.$$

ove (x_I) sostituisce $(x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})$, ponendo cioè $(x_I) \equiv (x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})$. Le espressioni di Θ potranno scriversi

$$\Theta = \frac{E_{IH}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_K)}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_L)} - E_{IK}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_H)}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_L)} + E_{LK}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_H)}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_I)} - E_{LH}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_K)}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_I)}}{D_{IL}\,D_{HK}}$$

ove in luogo di ψ può porsi tanto φ_1 quanto φ_2.

10. Teniamo ora conto che le $\tilde{\omega}$ e le χ debbono soddisfare le condizioni di integrabilità (§ 6)

$$\sum_1^{r+1}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\,\tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}} = 0\,, \quad \sum_1^{r+2}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\,\chi_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}} = 0;$$

avremo quindi, a cagione delle (5),

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^{r+2}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\frac{\chi_K\,E_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}\,,\,H} - \chi_H\,E_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}\,,\,K}}{D_{HK}}\right\} = 0 \\ &\sum_1^{r+2}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\frac{\tilde{\omega}_K\,E_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}\,,\,H} - \tilde{\omega}_H\,E_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}\,,\,K}}{D_{HK}}\right\} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Adoperando dunque i noti simboli, si ha che tanto φ_1 quanto φ_2 dovranno soddisfare le equazioni seguenti (vedi form. 6)

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^{r+2}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\frac{E_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}\,,\,H}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_K)} - E_{i_1 \cdots i_{s-1}\,i_{s+1} \cdots i_{r+2}\,,\,K}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\,(x_H)}}{D_{HK}}\right\} = 0 \\ &D_{HK}\,\frac{\partial\psi}{\partial\,(x_I)} + D_{KI}\,\frac{\partial\psi}{\partial\,(x_H)} + D_{IH}\,\frac{\partial\psi}{\partial\,(x_K)} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Reciprocamente può dimostrarsi che se $\psi\,|\,[S_r]\,|$ funzione di primo grado reale soddisfa alle precedenti equazioni, essa potrà considerarsi come la parte reale di una funzione $\psi + i\theta$ che possiede un legame di isogeneità

www.rcin.org.pl

con f. Le equazioni (8) funzionano nel nostro caso come la equazione $\Delta^2 = 0$ nella ordinaria teoria delle funzioni di variabile complessa e le equazioni (E) da me date nella Nota I cit. *Sopra una estensione della teoria di Riemann* ecc.

11. La parte della teoria esposta sino a questo punto si mostra del tutto simile a quella che diedi già nelle Note citate per le funzioni di linee nello spazio ordinario. Però se si cercano le condizioni necessarie pel collegamento di isogeneità risulta chiaramente la differenza che passa fra il modo di comportarsi delle funzioni di linee nello spazio ordinario e quello delle funzioni generali negli iperspazî. Infatti mentre per le prime fu trovato che le dette condizioni si riducono solo a quella di essere funzioni di primo grado (semplici), per le altre una tale condizione non risulta più sufficiente.

Una funzione di primo grado negli iperspazî è suscettibile del collegamento di isogeneità solo quando esistono integrali comuni ad un certo sistema di equazioni lineari e omogenee alle derivate parziali.

La esposizione dello studio di un tale sistema, della estensione del collegamento di isogeneità fra funzioni di spazî di un numero diverso di dimensioni e finalmente la estensione al caso generale del teorema di CAUCHY spero potranno formare argomento di un'altra Nota.

www.rcin.org.pl