XX.

SULLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo II (1888), pp. 69–75.

1. In una Nota pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (1) ho accennato come la teoria delle equazioni differenziali lineari possa ridursi al calcolo infinitesimale relativo alle sostituzioni, e nella prima parte di una Memoria pubblicata dalla « Società dei XL » (2) ho esposto il calcolo infinitesimale delle sostituzioni nel caso in cui esse fossero funzioni di variabili reali.

Queste ricerche costituiscono uno studio preliminare alla teoria delle sostituzioni i cui elementi sono funzioni di una variabile complessa.

Mi pregio di presentare a cotesta Onorevole Società alcuni risultati ottenuti nello studio delle sostituzioni funzioni di una variabile complessa.

2. Chiamo *sostituzione olomorfa* in un campo σ *una sostituzione* S i cui elementi considerati come funzioni di una variabile complessa z sono olomorfi entro il campo σ di variabilità della z.

Estendendo il concetto di integrazione (dato nella Memoria citata, pel caso di sostituzioni funzioni di variabili reali) al caso di una sostituzione funzione di una variabile complessa, si ottiene una generalizzazione del teorema di CAUCHY che può enunciarsi:

Se T (som. 0) *è una sostituzione olomorfa di z entro un campo semplicemente connesso* σ, *e s una linea chiusa contenuta entro* σ, *si ha*

$$\int_s \mathrm{T}\, dz = 1,$$

rappresentando col simbolo 1 *la identità.*

La dimostrazione di questa proposizione si ottiene applicando i teoremi dati nel § 4 della Memoria citata.

Consideriamo ora il caso in cui entro σ esistono dei luoghi singolari della sostituzione T. Si prendano due linee qualunque s_1 e s_2 nel cui interno giac-

(1) *Sulle equazioni differenziali lineari* «Rend. Acc. Lincei», ser. 4ª, vol. III (1887), 1° semestre, pagine 393–396; [in questo vol.: XVI, pp. 290–292].

(2) «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. 3ª, volume VI. n. 8; [in questo vol.: XV, pp. 209–289]. Per i termini ed i simboli usati nella presente Nota rimando a questa Memoria.

ciono gli stessi punti singolari, e percorrendole nello stesso senso, si formino

$$S_1 = \int_{s_1} T\, dz \quad , \quad S_2 = \int_{s_2} T\, dz\,.$$

Questi due integrali saranno in generale diversi dalla identità e diversi fra loro; ma se essi si riducono alla forma normale (Vedi Memoria citata § 2: preliminari) avremo

$$S_1 = V_1 \overline{\left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_h S_i^{(h)} \right\}} V_1^{-1}$$

$$S_2 = V_2 \overline{\left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_h S_i^{(h)} \right\}} V_2^{-1}$$

e le $S_i^{(h)}$ saranno le stesse tanto nell'una quanto nell'altra formula.

La sostituzione

$$W = \overline{\left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_h S_i^{(h)} \right\}}$$

si chiamerà la *caratteristica delle sostituzioni* integrali S_1 e S_2, quindi:

Gli integrali estesi nello stesso senso a linee nel cui interno si trovano gli stessi punti singolari hanno eguali caratteristiche.

Si ha pure il teorema correlativo per gli integrali destri e le caratteristiche relative agli integrali destri si ottengono immediatamente, note quelle degli integrali sinistri.

Se entro s_1 e s_2 giace un solo punto singolare, la caratteristica comune agli integrali estesi alle linee s_1 e s_2, percorse in modo da lasciare a sinistra il campo che esse racchiudono, si chiama *il residuo del punto singolare.*

Se gli elementi di T hanno in un dato punto un polo del primo ordine, *il residuo della sostituzione non dipende che dai residui degli elementi e, noti questi, può calcolarsi il residuo della sostituzione.*

3. Una sostituzione viene chiamata monodroma sopra una superficie di RIEMANN se i suoi elementi sono monodromi sulla superficie stessa. Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN li chiamo sostituzioni abeliane semplici e le distinguo fra loro col nome di *sostituzione abeliana sinistra* e *sostituzione abeliana destra.*

Eseguiti sulla superficie di RIEMANN i tagli normali si ha il teorema: *Se si considera un taglio o una porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, i valori della sostituzione abeliana sinistra su uno degli orli del taglio saranno eguali ai valori sull'altro orlo moltiplicati a destra per una sostituzione costante.*

Per le sostituzioni abeliane destre vale il teorema correlativo. Il teorema reciproco si trova pure verificato, cioè *se si ha una sostituzione tale che su* *di una superficie di* RIEMANN (*convenientemente sezionata*) *si conserva monodroma e i valori lungo un orlo di un taglio sono eguali ai valori lungo l'orlo opposto moltiplicati a destra per una sostituzione costante lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, la sostituzione sarà abeliana sinistra.*

Fra le sostituzioni abeliane destra e sinistra passa poi la relazione che *la sostituzione inversa di una sostituzione abeliana sinistra è una sostituzione abeliana destra, e reciprocamente.*

4. È evidente l'analogia che presentano le sostituzioni abeliane semplici cogli integrali abeliani e più in generale cogli integrali di funzioni monodrome sopra superficie di RIEMANN. Però le sostituzioni abeliane dànno luogo ad altre classi di sostituzioni di cui le corrispondenti non esistono per gli integrali abeliani o per dir meglio si confondono colle funzioni monodrome sopra le superficie di RIEMANN e cogli integrali stessi.

Le sostituzioni a cui alludo sono le *sostituzioni abeliane doppie* e le *sostituzioni trasformanti*.

Sotto il nome di *sostituzione abeliana doppia* intendo una sostituzione i cui valori ai due orli di ciascun taglio eseguito sulla superficie di RIEMANN si ottengono gli uni dagli altri mediante la moltiplicazione a destra e a sinistra per sostituzioni costanti (a det. = 1) lungo tutto il taglio o la porzione compresa fra nodi consecutivi. Nel caso in cui i valori lungo un orlo si ottengono da quelli sull'altro eseguendo una trasformazione mediante una sostituzione costante (det. = 1) lungo il taglio o la porzione compresa fra nodi consecutivi, chiamo la sostituzione una *sostituzione abeliana trasformante*.

I teoremi fondamentali per queste due classi di sostituzioni sono i seguenti:

Le derivate destra e sinistra di una sostituzione abeliana doppia sono sostituzioni trasformanti.

Gli integrali destro e sinistro di sostituzioni abeliane trasformanti, sono sostituzioni abeliane doppie.

Moltiplicando a destra una sostituzione abeliana semplice destra per una sostituzione abeliana semplice sinistra si ottiene una sostituzione abeliana doppia.

Trasformando una sostituzione monodroma mediante una sostituzione abeliana sinistra, si ottiene una sostituzione trasformante.

5. È utile distinguere le sostituzioni abeliane semplici in due classi: le *sostituzioni abeliane apparenti* e quelle *essenziali*. Se una sostituzione i cui elementi sono funzioni di h variabili $y_1, y_2, \cdots, y_h$, è tale che, se si sostituiscono in luogo di queste variabili un sistema qualunque di integrali di funzioni monodrome sopra una stessa superficie di RIEMANN, la sostituzione diviene abeliana semplice destra o sinistra, diremo che la sostituzione abeliana è apparente. Ogni sostituzione abeliana semplice che non può farsi rientrare in una classe di sostituzioni abeliane apparenti, la diremo una sostituzione abeliana essenziale.

Per esempio le sostituzioni del 2^0 ordine

$$\begin{Bmatrix} y+1, & 1 \\ y, & 1 \end{Bmatrix} , \quad \begin{Bmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{Bmatrix},$$

in cui y è l'integrale di una funzione monodroma, sono sostituzioni abeliane apparenti; mentre se fra le tre funzioni $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, monodrome sopra una stessa superficie di RIEMANN, non passa nessuna relazione lineare

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 = 0$$

con A_1, A_2, A_3 costanti, avremo che

$$\int \begin{Bmatrix} \varphi_1, & \varphi_1 \\ \varphi_3, & -\varphi_2 \end{Bmatrix} dz$$

sarà una sostituzione abeliana essenziale.

Tutte le sostituzioni abeliane sinistre apparenti sono date da

$$S = \int \prod_1^h {}_i T_i \, dy_i$$

ove le T (som. o) *sono sostituzioni costanti.*

Ora, se le T_i sono costanti, affinché

$$\prod_1^h {}_i T_i \, dy_i$$

sia un differenziale esatto destro o sinistro, è necessario e sufficiente che *le* T_i *siano sostituzioni fra loro permutabili*. Ciò premesso si ha facilmente

$$S = \prod_1^h S_i(y_i) \cdot C$$

ove

$$S_i = \int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i$$

e C è una sostituzione costante.

6. Le considerazioni precedenti conducono alle sostituzioni fra loro permutabili. Giova in un tale studio il teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le sostituzioni permutabili con una sostituzione data siano permutabili fra loro, è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro.

Una sostituzione che soddisfa alla precedente condizione la chiameremo una *sostituzione elementare*. Posto questo si hanno i teoremi:

Se la derivata sinistra (o destra) di una sostituzione abeliana sinistra (o destra) è permutabile con una sostituzione elementare costante, la sostituzione sarà abeliana apparente.

Fra le sostituzioni abeliane non vi sono che quelle apparenti le quali trasformino un gruppo di sostituzioni costanti (*fra le quali si trova una sostituzione elementare*) *in un gruppo isomorfo formato da sostituzioni pure costanti.*

Presa una sostituzione abeliana apparente si potranno sempre trovare due gruppi isomorfi di sostituzioni costanti trasformabili mediante essa l'uno nell'altro.

Se una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN *è permutabile con una sostituzione elementare costante, gli integrali destro e sinistro si otterranno mediante quadrature da funzioni monodrome.*

Sul modo di eseguire i tagli normali sopra una superficie di RIEMANN mi riferirò all'opera di C. NEUMANN, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der* ABEL'SCHEN *Integrale.*

Eseguiremo tre sistemi di tagli, i tagli a_i, b_i, c_i (3). Questi ultimi a differenza di quanto fa il NEUMANN, li faremo partire da un punto O della superficie di RIEMANN fino a giungere ai tagli a_i.

Finalmente eseguiremo un taglio l, il quale partendo da O attraversi tutti i punti singolari della sostituzione abeliana che si considera e non tolga la connessione alla superficie di RIEMANN già sezionata mediante i tagli a_i, b_i, c_i.

La sostituzione costante, per cui devonsi moltiplicare i valori della sostituzione abeliana lungo l'orlo sinistro, per ottenere i valori sull'orlo destro, si chiamerà la costante del taglio. Ad ogni taglio a_i, corrispondono due costanti, ad ogni taglio b_i e c_i una sola costante. Queste costanti sono legate dalle relazioni:

Delle due sostituzioni costanti corrispondenti ad uno stesso taglio a_i *l'una è la trasformata dell'altra mediante la costante del taglio* b_i.

La sostituzione costante corrispondente ad un taglio c_i *è il prodotto della sostituzione costante corrispondente ad una porzione del taglio* a_i, *moltiplicata per la inversa della costante corrispondente all'altra porzione dello stesso taglio* a_i.

La costante corrispondente alla porzione di L *adiacente ad* O *è il prodotto delle costanti dei tagli* c_i.

Dai teoremi dimostrati nel paragrafo precedente si deduce finalmente:

Se le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana saranno permutabili con una stessa sostituzione elementare, la sostituzione abeliana sarà apparente.

Pisa, 10 marzo 1888.

(3) NEUMANN, opera citata, pag. 175 e seguenti.