Nota II.

Ibidem, pp. 274–281 (*).

Art. II.

1. Se X , Y , Z sono le derivate di una funzione φ delle linee L di un campo, abbiamo dimostrato che si ha

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 ,$$

ove α , β , γ sono i coseni degli angoli che la tangente alla curva L fa con gli assi coordinati. Potremo quindi porre:

$$X = \gamma B - \beta C$$
$$Y = \alpha C - \gamma A$$
$$Z = \beta A - \alpha B .$$

Le A , B , C non saranno determinate dalle precedenti equazioni. Se A_1 , B_1 , C_1 soddisfano ad esse, tutti gli altri sistemi di soluzioni saranno dati da

$$A_1 + k\alpha \quad , \quad B_1 + k\beta \quad , \quad C_1 + k\gamma .$$

con k arbitrario.

Diamo ora a ciascun punto di L uno spostamento $(\delta x , \delta y , \delta z)$. Avremo che la variazione corrispondente di φ risulterà

$$\delta\varphi = \int_L (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, ds ,$$

essendo s l'arco di L. Quindi:

$$\delta\varphi = \int_L \left\{ A(\beta\delta z - \gamma\delta y) + B(\gamma\delta x - \alpha\delta z) + C(\alpha\delta y - \beta\delta x) \right\} ds .$$

Si consideri ora il parallelogrammo infinitesimo descritto dall'arco ds per lo spostamento subìto e si supponga di percorrerne il perimetro muovendosi lungo l'arco ds nel senso positivo. Si conduca la normale n al parallelogrammo in modo che un osservatore disposto nella direzione positiva veda percorrere il perimetro nel senso in cui si muovono gli indici di un orologio. Avremo:

$$(\beta\delta z - \gamma\delta y)\, ds = d\sigma \cdot \cos nx$$
$$(\gamma\delta x - \alpha\delta z)\, ds = d\sigma \cdot \cos ny$$
$$(\alpha\delta y - \beta\delta x)\, ds = d\sigma \cdot \cos nz,$$

ove $d\sigma$ denota l'area del parallelogrammo descritto da ds.

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

Se ora si considera la striscia infinitamente sottile di superficie formata dalle congiungenti i punti di L con le posizioni da essi occupate dopo lo spostamento, n rappresenterà la normale a questa striscia e $d\sigma$ ne sarà l'elemento d'area, e avremo:

$$\delta\varphi = \int (\mathrm{A} \cos nx + \mathrm{B} \cos ny + \mathrm{C} \cos nz)\, d\sigma \,.$$

Abbiansi ora due curve L_1 e L_2. Si deformi con continuità la L_1 finché venga a coincidere con la L_2 in posizione ed in direzione. Si sarà in tal modo descritta una superficie anulare Σ di cui L_1 e L_2 formeranno gli orli e si dirà che si è *condotta una superficie* per L_1 e L_2. Se tracciamo le traiettorie descritte dai punti L_1 per andare nei corrispondenti di L_2, avremo sopra Σ due sistemi di curve formate rispettivamente dalle varie posizioni della L e dalle traiettorie ora considerate.

Preso un punto qualunque di Σ, ad esso corrisponderà un sistema di valori per A , B , C ed una normale n a Σ presa nella direzione indicata. Denotando con φ_1 e φ_2 i valori di φ corrispondenti alle linee L_1 e L_2, avremo:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\Sigma} (\mathrm{A} \cos nx + \mathrm{B} \cos ny + \mathrm{C} \cos nz)\, d\Sigma \,.$$

2. Quando si studiano delle funzioni φ di linee L è importante fare la seguente distinzione:

Si considerino due linee L_1 e L_2 che hanno un tratto l a comune, e si supponga che le direzioni di L_1 e L_2 siano tali che il tratto l debba venir percorso in senso opposto secondo che si ritiene essere appartenente all'una o all'altra linea. Tolto l le porzioni di L_1 e L_2 formeranno un'unica linea L_3 e ambedue le porzioni verranno percorse in uno stesso senso che si fisserà come direzione della L_3. Scriveremo:

$$L_3 = L_1 + L_2 \,.$$

Ora può darsi che si abbia:

$$\varphi\,|\,[L_1 + L_2]\,| = \varphi\,|\,[L_1]\,| + \varphi\,|\,[L_2]\,| \,,$$

ovvero

$$\varphi\,|\,[L_1 + L_2]\,| \gtrless \varphi\,|\,[L_1]\,| + \varphi\,|\,[L_2]\,| \,.$$

Se la prima condizione si verifica sempre, allora si dirà che φ è una funzione *semplice* delle linee.

3. Prendiamo a studiare più specialmente il caso di *funzioni semplici* di linee.

Consideriamo un punto M pel quale passano due linee L_1 e L_2, denotiamo con ds_1 e ds_2 gli elementi degli archi delle due curve che partono da M e con $(\alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1)$, $(\alpha_2 , \beta_2 , \gamma_2)$ i loro coseni di direzione. Supponiamo di dare a ciascun punto di ds_2 uno spostamento eguale e parallelo a ds_1: la variazione subìta da φ, a meno di infinitesimi di ordine superiore, sarà:

$$\delta_1 \varphi = (X_1 \alpha_2 + Y_1 \beta_2 + Z_1 \gamma_2) ds_1 \cdot ds_2$$

ove X_1, Y_1, Z_1, denotano i valori di $\varphi'_x \cdot \varphi'_y, \varphi'_z$ corrispondenti alla linea L_1 nel punto M.

Analogamente supponendo di dare a ciascun punto di ds_2 uno spostamento eguale e parallelo a ds_1, avremo per variazione di φ, a meno d'infinitesimi di ordine superiore,

$$\delta_2 \varphi = (X_2 \alpha_1 + Y_2 \beta_1 + Z_2 \gamma_1) ds_1 \cdot ds_2 ,$$

essendo X_2, Y_2, Z_2 i valori di $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$, corrispondenti ad L_2 nel punto M.

Ora se φ è una funzione *semplice* deve aversi a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$\delta_1 \varphi = \delta_2 \varphi .$$

Quindi:

$$X_1 \alpha_2 + Y_1 \beta_2 + Z_1 \gamma_2 = X_2 \alpha_1 + Y_2 \beta_1 + Z_2 \gamma_1 ;$$

ovvero indicando con (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) i valori di A, B, C, corrispondenti alle due linee L_1 e L_2 nel punto M

$$(A_1 - A_2)(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) + (C_1 - C_2)(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) = 0 .$$

Se n è la normale comune alle due linee L_1 e L_2 in M, avremo:

$$(1) \qquad (A_1 - A_2) \cos nx + (B_1 - B_2) \cos ny + (C_1 - C_2) \cos nz = 0 .$$

Prendiamo ora tre curve L_x, L_y, L_z, che passino per M, ed i cui elementi in M siano rispettivamente paralleli agli assi x, y, z. Denotiamo con (A_x, B_x, C_x), (A_y, B_y, C_y), (A_z, B_z, C_z) rispettivamente i valori di A, B, C, corrispondenti alle tre curve L_x, L_y, L_z in M.

Applicando la (1) alle coppie di linee (L_y, L_z), (L_z, L_x), (L_x, L_y) si otterrà:

$$\begin{cases} A_y = A_z , \\ B_z = B_x , \\ C_x = C_y . \end{cases}$$

Poniamo

$$A_y = A_z = P \quad , \quad B_z = B_x = Q \quad , \quad C_x = C_y = R .$$

Si conduca una linea qualunque L per M e supponiamo che l'elemento che passa per M abbia la direzione α, β, γ. Siano A, B, C i valori corrispondenti alla linea L nel punto M. Per applicare la (1) alle due linee L e L_z, bisognerà prendere:

$$\cos nx = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad , \quad \cos ny = - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad , \quad \cos nz = 0$$

e avremo:

$$(A - P)\beta - (B - Q)\gamma = 0 .$$

Analogamente applicando la (1) alle coppie di linee L, L_x e L, L_y, avremo:

$$(B - Q)\gamma - (A - P)\alpha = 0$$

$$(C - R)\alpha - (B - Q)\beta = 0$$

onde

$$P = A + k\alpha \quad , \quad Q = B + k\beta \quad , \quad R = C + k\gamma .$$

Per tutte le linee che passano per M potremo dunque prendere i valori di A , B , C in M eguali a P , Q , R. Quindi si ha:

Se φ *è una funzione semplice delle linee di un campo a tre dimensioni, esistono per ogni punto del campo tre valori* P , Q , R *che possono rispettivamente prendersi come valori di* A , B , C *in quel punto per tutte le linee che vi passano.*

4. *Conduciamo una superficie* Σ per le due linee L_1 e L_2 (se ciò è possibile) e tracciamo le normali n ad essa nei suoi vari punti nel modo indicato (art. II, § 1). Avremo:

$$\varphi \mid [L_2] \mid - \varphi \mid [L_1] \mid = \int_\Sigma (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\Sigma .$$

Se la linea L_1 può ridursi ad un punto, avremo al limite

$$\varphi \mid [L_1] \mid = 0$$

quindi

$$\varphi \mid [L_2] \mid = \int_\Sigma (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\Sigma .$$

In questo caso Σ è una superficie semplicemente connessa il cui contorno è formato dalla linea L_2. La direzione della normale n in un punto M è quella in cui disponendosi un osservatore vede girare nel senso degli indici di un orologio una linea che da M va ad un punto mobile sul contorno nel senso in cui esso deve esser percorso.

Se la superficie Σ va impiccolendosi indefinitamente riducendosi ad un punto M, avremo:

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz ,$$

in cui i valori di P , Q , R corrispondono al punto M. Scriveremo:

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = \frac{d\varphi}{d\Sigma} .$$

Il segno di $d\varphi/d\Sigma$ sarà noto soltanto quando si sia stabilita la direzione della normale n a Σ.

Se Σ fosse piana e normale ad x si avrebbe:

$$\lim \frac{\varphi\,|\,[L_2]\,|}{\Sigma} = P$$

mentre se fosse normale a y o a z

$$\lim \frac{\varphi\,|\,[L_2]\,|}{\Sigma} = Q$$

$$\lim \frac{\varphi\,|\,[L_2]\,|}{\Sigma} = R\,.$$

È perciò che si possono rappresentare P , Q , R rispettivamente coi simboli:

$$\frac{d\varphi}{d(y\,,z)}\quad,\quad \frac{d\varphi}{d(z\,,x)}\quad,\quad \frac{d\varphi}{d(x\,,y)}\,.$$

5. Conduciamo ora una superficie chiusa qualunque σ; si dovrà avere:

$$\int_\sigma (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma = 0\,.$$

Quindi P , Q , R dovranno soddisfare alla condizione:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0\,, \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{d(y\,,z)} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{d\varphi}{d(z\,,x)} + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial\varphi}{d(x\,,y)} = 0.$$

Reciprocamente se P , Q , R soddisferanno alla condizione (2) esisterà sempre una funzione delle linee del campo φ tale che

$$\frac{d\varphi}{d(y\,,z)} = P \quad,\quad \frac{d\varphi}{d(z\,,x)} = Q \quad,\quad \frac{d\varphi}{d(x\,,y)} = R.$$

La φ sarà determinata dalle P , Q , R a meno di una costante arbitraria.

6. Supponiamo di stabilire una corrispondenza univoca fra due campi a tre dimensioni mediante le relazioni:

$$x = x(\xi\,,\eta\,,\zeta) \quad,\quad y = y(\xi\,,\eta\,,\zeta) \quad,\quad z = z(\xi\,,\eta\,,\zeta).$$

Ad una funzione di linee nel primo campo corrisponderà una funzione di linee nel secondo. Si tratta di trovare le relazioni fra

$$\frac{d\varphi}{d(y\,,z)}\,,\quad \frac{d\varphi}{d(z\,,x)}\,,\quad \frac{d\varphi}{d(x\,,y)} \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{d(\eta\,,\zeta)}\,,\quad \frac{d\varphi}{d(\zeta\,,\xi)}\,,\quad \frac{d\varphi}{d(\xi\,,\eta)}\,.$$

A tal fine prendiamo una superficie S nel primo campo il cui contorno sia L, ad essa corrisponderà nel secondo una superficie Σ il cui contorno sarà Λ. I punti della superficie definiamoli mediante due parametri u , v. Avremo:

$$\varphi\,|\,[L]\,| = \int_S (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma$$

ovvero:

$$\varphi\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \int_{\mathrm{S}} \left\{ \mathrm{P}\,\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + \mathrm{Q}\,\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + \mathrm{R}\,\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right\} du\,dv\,,$$

in cui $d(y,z)/d(u,v)$, ecc., denotano i determinanti funzionali di y, z rispetto ad u, v, ecc.

Quindi posto

$$\pi = \mathrm{P}\,\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + \mathrm{Q}\,\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \mathrm{R}\,\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}$$

$$\chi = \mathrm{P}\,\frac{d(y,z)}{d(\zeta,\xi)} + \mathrm{Q}\,\frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + \mathrm{R}\,\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}$$

$$\rho = \mathrm{P}\,\frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + \mathrm{Q}\,\frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + \mathrm{R}\,\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}$$

avremo

$$\varphi\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \int_{\mathrm{S}} \left(\pi\,\frac{d(\eta,\zeta)}{d(u,v)} + \chi\,\frac{d(\zeta,\xi)}{d(u,v)} + \rho\,\frac{d(\xi,\eta)}{d(u,v)} \right) du\,dv$$

$$= \int_{\Sigma} (\pi \cos \nu\xi + \chi \cos \nu\eta + \rho \cos \nu\zeta)\, d\Sigma\,,$$

essendo ν la normale a Σ.

Ma $\varphi\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \varphi\,|\,[\Lambda]\,|$, quindi

$$\pi = \frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)}\quad,\quad \chi = \frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)}\quad,\quad \rho = \frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)}\,,$$

onde

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)} &= \frac{d\varphi}{d(y,z)}\,\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\varphi}{d(z,x)}\,\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\varphi}{d(x,y)}\,\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} \\ \frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)} &= \frac{d\varphi}{d(y,z)}\,\frac{d(y,z)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\varphi}{d(z,x)}\,\frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\varphi}{d(x,y)}\,\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)} \\ \frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)} &= \frac{d\varphi}{d(y,z)}\,\frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\varphi}{d(z,x)}\,\frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\varphi}{d(x,y)}\,\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}\,. \end{aligned} \right.$$

ART. III.

1. Se $\varphi\,|\,[\mathrm{L}]$ è una funzione dipendente dalle linee L ed è semplice, posto

$$\frac{d\varphi}{d(y,z)} = \mathrm{P}\quad,\quad \frac{d\varphi}{d(z,x)} = \mathrm{Q}\quad,\quad \frac{d\varphi}{d(z,y)} = \mathrm{R}\,,$$

avremo

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} = 0.$$

Potremo quindi trovare due funzioni λ e μ di x, y, z le quali soddisfanno alle condizioni

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial y}\,\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\,\frac{\partial\mu}{\partial y} &= \frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)} = \mathrm{P} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}\,\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\frac{\partial\mu}{\partial z} &= \frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)} = \mathrm{Q} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\,\frac{\partial\mu}{\partial x} &= \frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)} = \mathrm{R}\,. \end{aligned} \right.$$

A tal fine come è ben noto dalla teoria del moltiplicatore di Jacobi, basterà cominciare dal determinare una funzione μ la quale soddisfi alla condizione

$$P\frac{\partial \mu}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial y} + R\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

e quindi prendere

$$\lambda = \int \frac{1}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}(P\,dy - Q\,dx) + f(\mu), \tag{2}$$

essendo f una funzione arbitraria (Vedi JACOBI, *Vorl. ueb. Dynamik*, pag. 78).

2. Supponiamo ora di eseguire un cambiamento di variabili e di passare dalle x, y, z alle ξ, η, ζ lasciando inalterate le due funzioni λ e μ. Avremo

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\eta,\zeta)} = \frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)}\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}$$

$$= P\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + Q\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + R\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} = \frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)} = \pi$$

e analogamente

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\zeta,\xi)} = \frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)} = \chi$$

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\xi,\eta)} = \frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)} = \rho,$$

quindi le due funzioni λ e μ sono collegate alle derivate di φ dalle stesse relazioni, qualunque sia il sistema di coordinate che si sceglie.

3. Prendiamo una superficie qualunque σ e su di essa un sistema di coordinate curvilinee u, v, tali che il quadrato dell'elemento lineare sia

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e consideriamo $d\varphi/d\sigma$. Avremo

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = P\cos nx + Q\cos ny + R\cos nz = \frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)}\cos nx$$

$$+ \frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)}\cos ny + \frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)}\cos nz.$$

Quindi

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{d(\lambda,\mu)}{d(u,v)}. \tag{3}$$

4. Dalla formula precedente risulta che se sopra una superficie σ si ha $\lambda = \text{cost}$, oppure $\mu = \text{cost}$, ne viene che $d\varphi/d\sigma = 0$ e quindi φ è costante per tutte le linee della superficie. Dimostriamo ora reciprocamente che se φ è costante per tutte le linee della superficie σ, potremo fare in modo che

una almeno delle due funzioni λ o μ sopra σ abbia un valore costante arbitrario. Infatti se $d\varphi/d\sigma = 0$, avremo:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u} = 0.$$

Supponendo che μ non sia costante sopra σ, potremo scrivere:

$$\frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)}$$

e quindi lungo σ sarà

$$\lambda = f(\mu).$$

Ne segue che se invece di λ prendiamo

$$\lambda' = \lambda - f(\mu) + C$$

(con C costante arbitraria) il che è permesso (vedi Art. III. § 1), avremo che λ' avrà sopra σ il valore costante C.

5. Poniamo

$$\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x} = a \quad , \quad \lambda\frac{\partial\mu}{\partial y} = b \quad , \quad \lambda\frac{\partial\mu}{\partial z} = c,$$

avremo:

$$\frac{\partial c}{dy} - \frac{\partial b}{dz} = P \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = Q \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = R,$$

quindi presa una superficie σ limitata dalla linea L, si otterrà:

$$\varphi\,|\,[L]\,| = \int_\sigma (P\cos nx + Q\cos ny + R\cos nz)\,d\sigma$$

$$= \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial c}{dy} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\cos nx + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)\cos ny + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\cos nz \right\} d\sigma$$

e applicando il teorema di Stokes

$$\varphi\,|\,[L]\,| = \int_L (a\,dx + b\,dy + c\,dz) = \int_L \lambda\, d\mu.$$