XVIII.

SOPRA LE FUNZIONI DIPENDENTI DA LINEE

Nota I.

« Rend. Lincei », ser. IV, vol. III 1887, pp. 225-230 (*)

ART. I.

1. In alcune Note che ebbi l'onore di presentare recentemente [1], ho considerato le quantità che dipendono dai valori di una funzione continua in un dato intervallo. Lo studio di tale dipendenza è analogo a quello delle funzioni di una variabile. Ora è ben nota l'utilità della rappresentazione geometrica del campo di variabilità d'una funzione. È perciò che invece di parlare di funzioni di una variabile reale, si usa spesso parlare di funzioni dei punti di una linea e invece di parlare di funzioni di due o di tre variabili, è utile parlare di funzioni dei punti di un campo a due o a tre dimensioni.

2. Una immagine geometrica analoga si potrà avere per le funzioni che dipendono da un'altra funzione. Così per esempio preso un certo campo a due dimensioni potremo considerare tutte le linee continue che possono tracciarsi in esso e ad ognuna di tali linee potremo far corrispondere un valore di una variabile. Otterremo ciò che si chiamerà una *funzione di una linea entro il campo* S. Potremmo porre la condizione che queste linee dovessero essere rientranti, in tal caso si avrebbe una *funzione delle linee chiuse del campo*.

Analogamente prendiamo un campo a tre dimensioni e consideriamo tutte le linee chiuse possibili che possono tracciarsi entro di esso, e ad ognuna di tali linee percorsa in una certa direzione facciamo corrispondere il valore di una variabile; avremo ciò che potrà chiamarsi una *funzione delle linee chiuse del campo a tre dimensioni*.

Una tale idea è famigliare ai fisici; essa si presenta spontaneamente quando si pensa a certi fenomeni elettrici.

Si consideri una corrente elettrica che percorra un circuito lineare chiuso con intensità eguale ad 1 e che si trovi in un campo magnetico. La energia potenziale della corrente dipenderà soltanto dalla forma, dalla posizione del circuito e dal senso in cui la corrente lo percorre; quindi ad ogni linea chiusa

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

(1) « Rend. Lincei », ser. IV, vol. III, 1887, pp. 97-105, 141-146, 153-158; [in questo vol. XVII, pp. 293-313].

che si traccerà nel campo magnetico percorsa in una certa direzione, corrisponderà un valore della energia potenziale. Siamo per conseguenza nel caso di una funzione delle linee chiuse di un campo a tre dimensioni.

3. Per alcuni studi che spero di poter comunicare quanto prima, giova considerare le funzioni delle linee di un campo a tre dimensioni. È perciò che mi permetto di darne qui qualche cenno.

Le linee che considereremo le supporremo sempre chiuse o, nel caso in cui si tratti di campi limitati da superficie, le supporremo chiuse o che finiscano al contorno. Inoltre ammetteremo che queste linee non abbiano nodi, e che, escluso un numero finito di punti singolari, in tutti i rimanenti possiedano una tangente. Ad ognuna di tali linee. che denoteremo con L, corrisponderà il valore di una variabile reale φ. Scriveremo, per denotare questa dipendenza,

$$\varphi = \varphi\,|\,[L]\,|\,.$$

Prendiamo una linea L e una linea ad essa concatenata; se spostiamo questa linea conservandola sempre concatenata alla L, essa descriverà una superficie tubulare σ nel cui interno giacerà la L. Lo spazio S racchiuso entro la superficie σ si dirà un *intorno della linea* L. Ogni altra linea la quale, come L, traversa longitudinalmente lo spazio tubolare S si dirà una *linea longitudinale* di S.

La funzione φ, *funzione delle linee* L, sarà continua se, preso un numero δ piccolo ad arbitrio, potrà trovarsi un intorno S di L tale che i valori di φ corrispondenti a tutte le linee longitudinali di S differiscano dal valore di φ in L meno di δ.

4. Riferiamoci ora ad una terna di assi ortogonali x, y, z. Prendiamo un arco $l = AB$ della curva L e conduciamo per tutti i punti di l un segmento eguale ad ε parallelo all'asse delle x. Il luogo degli estremi di questi segmenti sia CD. Alla curva che si ottiene da L sostituendo all'arco di curva l la linea spezzata ACDB, corrisponderà per la funzione φ il valore $\varphi_1 + \Delta_x \varphi$, supponendo che alla L corrisponda il valore φ_1. Facciamo impiccolire indefinitamente ε ed l in modo che l'arco l contenga sempre nel suo interno un punto G; supporremo che esista

$$\lim_{\substack{\varepsilon = 0 \\ l = 0}} \frac{\Delta_x \varphi}{\varepsilon l} = X. \tag{1}$$

Il valore di X dipenderà in generale dalla curva L e dal punto G della curva; la posizione di G sulla curva potrà essere determinata dalla lunghezza dell'arco s della curva L compreso fra un punto fisso e il punto G, contato nel senso in cui deve percorrersi la curva. Quindi avremo

$$X = X\,|\,[L\,,s]\,|\,.$$

Ammetteremo che il rapporto $\Delta_x \varphi / \varepsilon l$ tenda verso il suo limite uniformemente rispetto a tutti i punti G e a tutte le curve L; inoltre supporremo che X sia continuo rispetto alla L e alla s.

Analogamente supponendo di condurre i segmenti ε parallelamente all'asse y e considerando il limite analogo a quello precedente otterremo

$$Y = Y \mid [L , s] \mid$$

e così pure potremo ottenere rispetto all'asse z

$$Z = Z \mid [L , s] \mid$$

per i quali porremo le stesse condizioni precedentemente stabilite. Finalmente supporremo che $\varphi \mid [L] \mid - \varphi \mid [L_1] \mid$ possa ridursi minore di un numero arbitrariamente piccolo, quando le aree comprese fra le proiezioni delle curve L e L_1 sui piani coordinati si siano rese inferiori a dati valori. Ciò premesso è facile risolvere la seguente questione.

5. Si prenda una curva L_1 e si facciano corrispondere univocamente e con continuità i punti delle due curve L e L_1. Al punto di coordinate x , y , z di L sia coniugato sulla L_1 un punto di coordinate x_1 , y_1 , z_1 e la corrispondenza sia tale che, mentre (x , y , x) percorre L nella direzione fissata per questa curva, (x_1 , y_1 , z_1) si muova nel senso stabilito per la L_1. Avremo

$$x = x(s) \qquad y = y(s) \qquad z = z(s)$$

$$x_1 = x_1(s) \qquad y_1 = y_1(s) \qquad z_1 = z_1(s)$$

$$\delta x = x_1 - x \qquad \delta y = y_1 - y \qquad \delta z = z_1 - z\,.$$

Poniamo

$$\delta x = \varepsilon\xi \quad , \quad \delta y = \varepsilon\eta \quad , \quad \delta z = \varepsilon\zeta$$

e facciamo impiccolire indefinitamente ε; avremo che la curva L_1 si avvicinerà indefinitamente ad L. Denotiamo con $\Delta\varphi$ la differenza fra i valori di φ corrispondenti alle due curve L e L_1; si tratta di trovare

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\varepsilon}\,.$$

Il risultato a cui si giunge è il seguente:

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\varepsilon} = \int_L (X\xi + Y\eta + Z\xi)\, ds \tag{2}$$

in cui con $\int_L$ si intende l'integrale esteso a tutta la curva L nel senso in cui essa deve percorrersi.

Tralasceremo la dimostrazione di questo teorema, essendo essa perfettamente analoga a quella esposta nel 2° Art. della Nota I, citata precedentemente.

La proprietà ora enunciata può esprimersi anche osservando che la parte del primo ordine dell'infinitesimo $\Delta\varphi$ è

$$\delta\varphi = \int_L (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, ds \tag{3}$$

che potrà chiamarsi *la variazione prima* di φ. Analogamente X, Y, Z, potranno chiamarsi le *derivate di* φ *rispetto ad* x, y, z e indicarsi con

$$X = \varphi'_x \quad , \; Y = \varphi'_y \quad , \quad Z = \varphi'_z .$$

6. Le tre quantità X, Y, Z non sono fra loro indipendenti, esse soddisfano ad una condizione che può trovarsi nel seguente modo.

Prendiamo la curva L_1 coincidente colla curva L in posizione e direzione, ma i punti (x_1, y_1, z_1) e (x, y, z) non coincidenti fra loro. Ciò equivale a far corrispondere univocamente i punti di L con altri punti di L stessa. In questo caso sarà $\Delta\varphi = 0$, quindi

$$\int_L (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, ds = 0.$$

Ora si ha in questo caso

$$\frac{\xi}{\cos t_1 x} = \frac{\eta}{\cos t_2 y} = \frac{\xi}{\cos t_3 z} = K$$

essendo t_i le tangenti alla curva L, in punti compresi entro l'arco che da (x, y, z) va a (x_1, y_1, z_1). Quindi

$$\int_L K\,(X \cos t_1 x + Y \cos t_2 y + Z \cos t_3 z)\, ds = 0.$$

Poiché questa relazione deve valere qualunque sia la corrispondenza fra i punti (x, y, z) e (x_1, y_1, z_1), così dovremo avere

$$X \cos tx + Y \cos ty + Z \cos tz = 0$$

in cui t rappresenta la tangente ad L nel punto s in cui sono presi i valori di X, Y, Z.

Prendendo nella direzione degli assi x, y, z tre segmenti eguali a X, Y, Z e poi tre segmenti eguali a δx, δy, δz, otterremo due resultanti R e δr. Avremo evidentemente

$$\delta\varphi = \int_L R\delta r \cdot \cos(R \cdot \delta r)\, ds.$$

Da questa formula si deduce facilmente che cambiando gli assi coordinati e da x, y, z passando a x_1, y_1, z_1 le quantità X_1, Y_1, Z_1 corrispondenti alle X, Y, Z saranno legate a queste dalle relazioni

$$X_1 = X \cos(x_1 x) + Y \cos(x_1 z) + Z \cos(x_1 z), \text{ ecc.}$$

Riferendoci per ogni punto della curva L alla terna di rette formata dalla tangente t dalla normale principale n e dalla binormale b, avremo che le quantità analoghe alle X, Y, Z, relative a questa terna saranno

$$T = 0$$

$$N = X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz$$

$$B = X \cos bx + Y \cos by + Z \cos bz.$$

Si conduca ora per ogni punto di L un piano perpendicolare ad R. Ognuno di questi piani conterrà la tangente alla curva ed essi inviluppperanno una superficie che passerà per L. A tutti gli spostamenti infinitesimi di L sopra questa superficie corrisponderanno delle variazioni nulle di φ.

7. Se si considerano le tre quantità

$$X|[L, s]| \quad , \quad Y|[L, s]| \quad , \quad Z|[L, s]|$$

e mantenendo fisso s si fa variare L, avremo che a ciascuna di esse potremo applicare le considerazioni fatte per la φ, supponendo verificate per ognuna le condizioni precedentemente poste per la φ. Quindi sussisteranno le nove quantità

$$\begin{array}{ccc} X'_x|[L, s, s_1]| & , \quad X'_y|[L, s, s_1]| & , \quad X'_z|[L, s, s_1]| \\ Y'_x|[L, s, s_1]| & , \quad Y'_y|[L, s, s_1]| & , \quad Y'_z|[L, s, s_1]| \\ Z'_x|[L, s, s_1]| & , \quad Z'_y|[L, s, s_1]| & , \quad Z'_z|[L, s, s_1]| \end{array}$$

cioè le derivate di X, Y, Z, rispetto ad x, y, z. Supponendole continue rispetto a tutti gli elementi da cui dipendono, esse godranno delle seguenti proprietà:

1° $\quad X'_x|[L, s, s_1]| \quad , \quad Y'_y|[L, s, s_1]| \quad , \quad |Z'_z[L, s, s_1]|$

saranno funzioni simmetriche di s e s_1.

2° Si avrà

$$(4) \qquad \begin{cases} X'_y|[L, s, s_1]| = Y'_x|[L, s_1, s]| \\ X'_z|[L, s, s_1]| = Z'_x|[L, s_1, s]| \\ Y'_z|[L, s, s_1]| = Z'_y|[L, s_1, s]| . \end{cases}$$

3° Denotando con t e t_1 rispettivamente le tangenti in s e s_1, avremo

$$(5) \qquad \begin{cases} X'_x \cos t_1 x + X'_y \cos t_1 y + X'_z \cos t_1 z = 0 \\ Y'_x \cos t_1 x + Y'_y \cos t_1 y + Y'_z \cos t_1 z = 0 \\ Z'_x \cos t_1 x + Z'_y \cos t_1 y + Z'_z \cos t_1 z = 0 . \end{cases}$$

8. Resta finalmente da considerare il caso in cui esistano dei punti eccezionali per i quali la condizione (1) non sia verificata, come pure non siano soddisfatte le condizioni analoghe relative all'asse y e all'asse z.

Se si ha

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ l=0}} \frac{\Delta_x \varphi}{l} = 0 \quad , \quad \lim \frac{\Delta_y \varphi}{l} = 0 \quad , \quad \lim \frac{\Delta_z \varphi}{l} = 0$$

in tal caso le formule (2) e (3) seguitano a sussistere. Ma se per gli intorni di certi punti s_i si ha invece

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ l=0}} \frac{\Delta_x \varphi}{l} = L_i \quad , \quad \lim \frac{\Delta_y \varphi}{l} = M_i \quad , \quad \lim \frac{\Delta_z \varphi}{l} = N_i ,$$

allora sussisterà la formula

$$\delta\varphi = \int_L (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,ds + \sum_1^n{}_i (L_i\,\delta x_i + M_i\,\delta y_i + N_i\,\delta z_i)\,.$$

In modo analogo si otterrebbero le formule nel caso in cui φ dipendesse in modo speciale dalle coordinate e dalle derivate delle coordinate di un punto della curva. Per queste considerazioni rimando alla Nota II, citata precedentemente, ove sono trattate delle questioni analoghe.