Sull' insieme dei valori che annullano una funzione analitica a più variabili complesse.

Nota di

W. Wilkosz (Cracovia).

Un fatto caratteristico per la teoria delle funzioni analitiche a più variabli complesse è ben noto: i teoremi semplicissimi nel loro ennunciato sono in molti casi dimostrati male o non dimostrati del tutto.

Ecco una quistione di tal genere suggerita a me dal dott. Leja:

Consideriamo una $f(x_1 \ldots x_n)$ analitica nelle variabili complesse $x_1 \ldots x_n$ — non identicamente nulla. Sia (D) il suo campo totale d'esistenza (cioè insieme di tutti i punti di regolarità in distanza finita); (D) com'è noto, è un campo connesso, ogni punto di cui è interno relativamente allo spazio delle variabili. Sia E insieme di tutti i punti di (D) per le quali

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0.$$

Occupiamoci soltanto delle funzioni monodrome. — Ne sorge la domanda: Insieme E taglia (D) in pezzi distinti o no? La risposta data in questa nota è negativa. È vero un teorema ancora più ampio:

Teor.: Sia $(\overline{D})$ un campo[1]) connesso, contenuto in (D). Sia $(\overline{E})$ la parte di E contenuta in $(\overline{D})$ — Allora $\overline{E}$ non taglia $(\overline{D})$ — cioè: ogni due punti distinti di $(\overline{D}) - (\overline{E})$ si possono far congiungere con una curva continua passante in $(\overline{D})$ lungo la quale $f(x_1 \ldots x_n)$ non s'annulla mai.

---

[1]) Un campo nel senzo di Weierstrass — soli punti interni!

§ 1. Incomincio con $n = 1$ — ciò ch'è il caso semplice e già noto:

Sia $f(x_1) \neq 0 \qquad f(x_2) \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2 \qquad$ in $(\overline{D})$.

Giungo x_1 con x_2 per mezzo di una curva continua passante in $(\overline{D})$ del resto arbitraria.

Sia
$$x = \varphi(t)$$
la sua equazione ove:

(1) $\varphi(t)$ continua in $[0, 1]$

(2) $\varphi(0) = x_1 \qquad \varphi(1) = x_2$

(3) $\varphi(t)$ cade in $(\overline{D})$ per $0 \leqq t \leqq 1$.

Esiste (se in tutto) soltanto un insieme discreto dei valori:
$$t_1 \ldots t_p.$$
tali che $f(\bar{x}_i) = 0$ per $\bar{x}_i = \psi(t_i)$ $i/1 \ldots p$.

Bisogna modificare (se necessario) leggermente la $\varphi(t)$ per evitare i punti $\bar{x}_1 \ldots x_p$ non sorgendo dal campo $(\overline{D})$ ciò che è evidentemente possibile.

Il teorema viene in tal modo dimostrato per $n = 1$.

§ 2. Passiamo al caso $n = 2$.

Sieno: $M_1(x_1 y_1)$ $M_2(x_2 y_2)$ due punti distinti in $(\overline{D})$ non appartenenti alla $\overline{E}$.

Dimostreremo un lemma che dà la soluzione della quistione quasi immediatamente.

Lemma: Sia $A(x_A, y_A)$ un punto di $(\overline{D})$ — allora ogni campo cilindrico (Poincaré)
$$\Delta\varrho \begin{Bmatrix} |x - x_A| < \varrho \\ |y - y_A| < \varrho \end{Bmatrix} \varrho < 0.$$

(1) contenuto in $(\overline{D})$ col suo limite

(2) ove l'elemento corrispondente al centro A, della $f(xy)$ è convergente in modo assoluto,

gode le seguenti proprietà:

Ogni due punti di $\Delta\varrho$ ove $f \neq 0$ si possono giungere per mezzo d'una curva continua, passante in $\Delta\varrho$, lungo la quale $f(xy)$ non s'annulla.

Dim: Consideriamo
$$F(y) = f(x_p, y) \quad \text{ove} \quad P(x_p y_p),\ Q(x_q y_q)$$
$$\text{sono due tali punti } \{P \neq Q\}$$

Abbiamo qui una funzione analitica per $|y-y_A| < \varrho$ — sieno

$$y_{s_1} \dots y_{s_k}$$

gli zeri della $F(y)$ in $|y-y_A| < \varrho$ — quelli esistono soltanto in numero finito — oppure $F(y)$ non s'annulla in $|y-y_A| < \varrho$.

Distinguo due casi

(1) $f(x_p y_q) \neq 0$
(2) $f(x_p y_q) = 0$.

Nel caso $f(x_p y_q) \neq 0$ sia $\varphi(t)$ una funzione continua di t in $[0,1]$

(1) $|\varphi(t)-y_A| < \varrho$ in $[0,1]$
(2) $\varphi(0) = \varphi_p$ $\qquad \varphi(1) = y_q$
(3) $\varphi(t) \neq y_{s_m}$ $\qquad m/1 \dots k$ in $[0,1]$.

La sua esistenza è sicura per quello che precede.

Allora arco continuo:

$$(L_1) \begin{cases} x = x_p \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad \text{in} \qquad [0,1]$$

cade in $\Delta\varrho$ e lungo (L_1) abbiamo $f \neq 0$.

Quest' arco trasporta P in $S(x_p y_q)$ caminando in $\Delta\varrho$ ed evitando la $\overline{E}$.

Sia poi $G(x) = f(xy_q)$ ch'è analitica in $|x-x_A| < \varrho$.

Sieno

$$x_{r_1} \dots x_{r_s}$$

i suoi zeri in $|x-x_A| < \varrho$ {numero finito!}.

Prendiamo $\psi(t) = x$ tale che:

(1) $\psi(t)$ continua in $[0,1]$
(2) $\psi(0) = x_p$ $\quad \psi(1) = x_q$
(3) $|\psi(t)-x_A| < \varrho$ in $|x-x_A| < \varrho$
(4) $\psi(t) \neq x_{r_m}$ $\qquad m/1 \dots s$; t in $[0,1]$.

Allora arco:

$$(L_2) \left\{ \begin{array}{l} x = \psi(t) \\ y = y_p \end{array} \right\} \text{continuo in } [0,1]$$

transporta S in Q evitando E e passando in $\Delta\varrho$. Quindi arco composto di L_1 e L_2 trasmette P i Q in modo desiderato.

Passiamo al caso $f(x_p y_q) = 0$.

Si può trovare una $\varepsilon_0 > 0$ tale, che per ogni $y = y_q - \varepsilon$ ove $|\varepsilon| < \varepsilon_0$

abbiamo:

(1) $F(y_q - \varepsilon) \neq 0.$

(2) $|y_q - \varepsilon - y_A| < \varrho$

(3) $f(x_q y_q - \varepsilon) \neq 0.$

Allora passiamo dal $(x_p y_p)$ al $(x_p y_q - \varepsilon)$ d'onde al $(x_q, y_q - \varepsilon)$ e finalmente dal $(x_q, y_q - \varepsilon)$ al $(x_q y_q)$ direttamente.

Il lemma è gia dimostato.

Torniamo al teorema primitivo:

Osserviamo che in ogni campo (D') contenuto in (D) vi sono infiniti punti ove $f(xy) \neq 0$, perché Σ non ha punti interni se $f(xy) \equiv\!\!|\,0$.

Giungo adesso $M_1(x_1 y_1)$ e $M_2(x_2 y_2)$ con un arco (C) arbitrario in $(\overline{D})$ — per ogni punto di (C) facciamo corrispondere un campo $\Delta\varrho$ definito come di sopra il cui centro cade in questo punto. — Secondo il teorema di Heine-Borel, un numero finito

$$\Delta_0 \ldots \Delta_k$$

delle Δ esiste, le quali

(1) riccoprono tutta la (C)

(2) Δ_0 ha per centro M_1; Δ_k il punto M_2

(3) la parte comune alle

$$\Delta_{i-1}, \Delta_i \quad (i|1 \ldots k)$$

che indico con ϑ_i è un campo connesso cadente in $(\overline{D})$.

Scelgo da ogni ϑ_i un punto P_i ove $f(P_i) \neq 0$. — Allora servendosi del lemma

(1) giungo M_1 con P_1 per mezzo d'un arco continuo evitante $\overline{E}$

(2) poi P_1 con $P_1 \ldots P_{k-1}$ con P_k

(3) e finalmente P_k con M_2 nello stesso modo.

L'arco composto congiunge M_1 con M_2 in modo richiesto.

§ 3. Passiamo adesso al caso generale. La dimostrazione sia fatta per induzione. Poniamo il teorema vero per n, e dimostriamo la sua esattezza per $n+1$. — Basta evidentemente generalizzare soltanto il nostro lemma. Il resto si dimostra facilmente.

Sia $$\Delta_\varrho^{(n+1)} \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_1^A| < \varrho \\ \vdots \\ |x_{n+1} - x_{n+1}^{(A)}| < \varrho \end{array} \right\} \varrho > 0.$$

analogo al Δ_ϱ in § 2 ma formato per $f(x_1 \ldots x_{n+1})$.

Sieno $P(x_1^p \ldots x_{n+1}^p)$, $Q(x_1^q \ldots x_{n+1}^q)$ i punti distinti da congiungere.

Sia $g(x_1 \ldots x_n) \equiv f(x_1 \ldots x_n x_{n+1}^p)$.

Allora:

$$\Delta_\varrho^{(n)} \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_1^A| < \varrho \\ \\ |x_n - x_n^A| < \varrho \end{array} \right\} (\varrho \text{ la stessa!})$$

costituisce un campo analogo per $g(x_1 \ldots x_n)$.

Se $$g(x_1^q \ldots x_n^q) \neq 0$$

allora trasporto

$$(x_1^p \ldots x_n^p) \quad \text{in} \quad (x_1^q \ldots x_n^q)$$

per mezzo d'una via in $\Delta_\varrho^{(n)}$ non annullante; quindi:

$$(x_1^{(p)} \ldots x_{n+1}^p) \quad \text{in} \quad (x_1^q \ldots x_n^q x_{n+1}^p).$$

per $f(x_1 \ldots x_{n+1})$ in Δ_ϱ^{n+1}.

Poi $(x_1^q \ldots x_n^q x_{n+1}^p)$ in $(x_1^q \ldots x_{n+1}^q)$.

Ma se $g(x_1^q \ldots x_n^1) = 0$

allora trasporto

$$(x_1^p \ldots x_{n+1}^p)$$

in qualche:

$$(x_1^q \ldots x_n^q - \varepsilon, x_{n+1}^p) \text{ opportuno}$$
$$\text{ove} \quad g = f \neq 0; \quad \text{d'onde in}$$
$$(x_1^q \ldots x_{n+1}^q x_n^q - \varepsilon, \quad x_{n+1}^q)$$

— e scelta la ε convenientemente

$$\text{in} \quad (x_1^q \ldots x_{n+1}^q).$$

Il lemma, e quindi il teorema stesso, viene per ciò completamente dimostrato.

Abbiamo omesso la considerazione dei cosidetti „punti in infinito", perché ci vorrebbe dapprima fissare il senso del teorema in diversi spazî usati nella teoria in quistione (Cf. M. Bôcher: Infinite regions of various geometries, Bull. Amer. Math. Soc. v 20 (1914) o W. F. Osgood: Selected topics in the theory of functions of several complex variables. Madison Colloquium 1914). Il teorema è ancora vero, almeno, nel cosidetto „spazio d'analisi".