Sur les fonctions hyperharmoniques.

Par

Ladislas Nikliborc (Lwów).

Introduction.

Il serait inutile d'insister ici sur la portée de l'influence de la théorie des fonctions harmoniques sur le développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On sait en effet que l'étude d'une fonction d'une variable complexe est au fond équivalente à l'étude d'un système de deux fonctions harmoniques conjuguées de deux variables réelles.

Le cas des fonctions de deux variables complexes diffère profondément de celui des fonctions d'une seule variable complexe et voici comment M. Picard s'exprime à ce sujet[1]):

„On voit de suite la différence profonde qui doit séparer la théorie des fonctions de deux variables complexes de celle d'une variable. Dans celle-ci, la partie réelle P doit satisfaire à l'unique l'équation de Laplace, dans celle-là, au contraire, nous trouvons quatre équations pour cette seule partie réelle P. Il ne semble guère possible d'étudier ce système de quatre équations comme on a étudié l'équation de Laplace; aussi devrons-nous ici considérer la fonction $P+iQ$ dans son ensemble, sans étudier séparément P et Q".

Il n'est pas donc étonnant que, dans les travaux consacrés à la théorie des fonctions de deux variables complexes, on se soit servi jusqu'à présent presque exclusivement des grandeurs complexes en renonçant à la séparation des parties réelle et imaginaire; à notre connaissance, il n'existe qu'un seul mémoire où la séparation des parties réelle et imaginaire d'une fonction de deux va-

---

[1]) Traité d'Analyse. T. II. p. 257 (deuxième édit.).

riables complexes ait été employée avec succès et c'est le célèbre mémoire de Poincaré: „Sur les fonctions de deux variables“ [1]).

L'objet du présent mémoire consiste en l'étude des fonctions de quatre variables réelles x_1, y_1, x_2, y_2, susceptibles de représenter la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction analytique de deux variables complexes $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$. Ces fonctions se confondent avec celles qui vérifient le système suivant de quatre équations aux dérivées partielles:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0. \end{aligned}$$

On appelle le plus souvent [2]) les fonctions satisfaisant aux équations (1) „fonctions biharmoniques“, mais, comme en Physique mathématique, on donne le même nom aux intégrales de l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

(dite „l'équation biharmonique“), équation qu'on rencontre dans la théorie des plaques élastiques, nous donnerons aux fonctions qui vont nous occuper, c'est-à dire à celles qui vérifient le système (1), le nom de „fonctions hyper-harmoniques“.

Les principaux résultats du présent travail sont les suivants:

Dans le chapitre I, nous démontrons qu'on peut définir les fonctions hyperharmoniques, régulières dans un domaine déterminé, par la condition de satisfaire à un système de, trois seulement équations dont la forme en coordonnées hypersphéroïdales est particulièrement simple.

Dans le Chapitre II[me], nous étudions certains développements en série. Ces développements permettent de démontrer quelques

---

1) Acta Mathematica. T. II. 1883. p. 99 et T. XXII 1898, p. 112.

2) L. c. Aussi M. Osgood appelle les fonctions, qui nous occupent „fonctions biharmoniques“ dans son livre „Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II. 1[te] Lieferung“.

théorèmes intéressants sur les classes des fonctions satisfaisant à certains systèmes d'équations

Le Chapitre III^{me} est consacré à l'étude de l'intégrale de Poisson pour les fonctions hyperharmoniques et à l'étude du problème de Dirichtet pour ces fonctions. On peut ici poser le problème de Dirichtet de deux manières différentes, en définissant les conditions aux limites soit sur une multiplicité à deux, soit sur une multiplicité à trois dimensions. Mais il se trouve, que dans aucun cas on ne peut se donner les conditions limites d'une façon tout à fait arbitraire. En réalité ces conditions doivent s'exprimer par des fonctions appartenant à une classe spéciale de fonctions, classe qui est définie pour chaque domaine déterminé par une infinité de relations auxquelles les fonctions de cette classe doivent satisfaire. La solution du problème de Dirichtet est traité ici dans un cas particulièrement simple et nous réservons l'étude des cas plus généraux pour un mémoire ultérieur.

Ajoutons que quelques-uns des résultats exposés dans ce mémoire ont fait l'objet de deux notes insérées dans les „Comptes rendus" [1]).

En terminant cette introduction, je tiens à exprimer mes plus vifs remercîments à M. le Professeur S. Zaremba pour les observations qu'il a eu la bonté de me faire après avoir pris connaissance de mon travail et dont j'ai tiré grand parti pour la rédaction définitive de ce mémoire.

CHAPITRE I.

Les équations $\Delta_\varkappa u = 0$.

§ 1. **Définitions et notations.** Soit (T) un domaine, situé dans l'espace à quatre dimensions des variables x_1, y_1, x_2, y_2. En posant

$$z_\varkappa = x_\varkappa + i y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

envisageons une fonction $f(z_1, z_2)$ holomorphe dans (T).

La partie réelle $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ et de même la partie imagi-

---

[1]) „Sur les fonctions hyperharmoniques". T. 180, p. 1008. 1925, et T. 182 p. 110. 1926.

naire $v(x_1, y_1, x_2, y_2)$ de la fonction $f(z_1, z_2)$ ne sont pas indépendantes et on sait qu'elles sont liées par les quatre équations

$$
(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_\varkappa} &= \frac{\partial v}{\partial y_\varkappa} \\ \frac{\partial u}{\partial y_\varkappa} &= -\frac{\partial u}{\partial x_\varkappa} \end{aligned} \qquad (\varkappa = 1, 2)
$$

bien connues sous le nom d'„équations de Cauchy-Riemann“[1].

Il suit de là que la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$, [et de même la fonction v] doit satisfaire à quatre équations[2]:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} \Delta_1 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 \\ \Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0 \\ \Delta_3 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \\ \Delta_4 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0, \end{aligned}
$$

que nous appellerons „équations de Laplace“.

En dehors des équations (2), nous aurons à considérer l'équation

$$
(3) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0,
$$

que nous appellerons „équation complète de Laplace“.

Voici les définitions des trois classes des fonctions que nous allons étudier dans ce mémoire:

„Si la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ est définie et continue avec ses dérivées partielles du premier ordre à l'intérieur du domaine (T), si de plus les dérivées partielles du deuxième ordre dans ce domaine existent, nous disons que cette fonction est

1° **harmonique** dans (T) si

$$\Delta u = 0$$

2° **doublement harmonique** dans (T) si

---

[1]) Picard. Traité d'Analyse. Tome II. Deuxième éd. p. 255.

[2]) Picard. L. c.

$$\Delta_1 u = 0$$
$$\Delta_2 u = 0,$$

3° **hyperharmonique** dans (T) si elle satisfait au système (2) des équations".

On voit immédiatement que toute fonction doublement harmonique dans un domaine est aussi harmonique est de même, que toute fonction hyperharmonique dans un domaine est aussi doublement harmonique et alors „a fortiori" harmonique dans ce domaine.

En vertu des ces remarques, des définitions adoptées et d'un théorème de M. Wilkosz[1]), on peut affirmer que les fonctions qui appartiennent à l'une quelconque des classes précédentes, jouissent de la propriété d'avoir des dérivées partielles du deuxième ordre continues. Il suit de là que les fonctions qui nous occupent, possèdent des dérivées partielles continues de tous les ordres.

§ 2. **Les équations** $\Delta_\varkappa u = f_\varkappa$.

Envisageons le système d'équations

$$\Delta_\varkappa u = f_\varkappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

où les fonctions sont continues avec leurs dérivées partielles à l'intérieur du domaine (T).

Existe-t-il du moins une fonction u, qui satisfasse au système (3)?

Evidemment non et il est très facile d'établir des conditions nécessaires pour qu'une telle fonction existe. Laissons cette question de côté et en supposant que l'on ait identiquement

$$f_\varkappa = c_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

où les $c_\varkappa$ représentent des constantes, envisageons les équations

$$\Delta_\varkappa u = c_\varkappa. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

Il est très facile de voir que les conditions de compatibilité des équations (5) sont remplies.

§ 3. **Les équations** $\Delta_\varkappa u = c_\varkappa$.

Nous allons établir dans ce paragraphe quelques théorèmes intéressants sur le système (5). Notons que les démonstrations directes,

---

[1]) C. R, T. 174. (1922 I). p. 435.

exposées dans ce § sont dues à mon Collègue M. H. Äuerbach; celles que j'avais données d'abord ayant été basées sur les théorèmes du III^{me} Chapitre[1]) de ce mémoire.

Théorème: „Si la fonction u satisfait aux équations

$$\Delta_1 u = c_1,\ \Delta_2 u = c_2,\ \Delta_3 u = c_3,$$

il existe une constante c_4, telle qu'on ait

$$\Delta_4 u = c_4 .\text{“}$$

Dém. En effet, toute fonction $u(x_1\, y_1\, x_2\, y_2)$ vérifie identiquement les relations

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u - \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_3 u - \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_2 u$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_3 u - \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u$$
$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_2 u - \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_3 u,$$

dont notre théorème est une conséquence immédiate.

Corollaire: „A toute fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ satisfaisant au système

(6) $$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \Delta_3 u = 0$$

correspond une infinité de systèmes de deux constantes α et β telles que la fonction

(7) $$v = u + \alpha x_1 y_2 + \beta y_1 x_2$$

soit hyperharmonique“.

Dém. D'après un théorème déjà demontré, les équations (6) entraînent la suivante

$$\Delta_4 u = c_4 .$$

Il s'ensuit donc que si les constantes α et β satisfont à l'équation

$$\alpha + \beta + c_4 = 0,$$

---

[1]) V. la première de mes notes citées plus haut.

la fonction v, définie par (7), sera une fonction hyperharmonique.

Remarquons que les équations (6) n'entraînent pas l'équation $\Delta_4 u = 0$, comme le prouve l'exemple $u = 2x_1 y_2 - y_1 x_2$.

D'une manière analogue on peut démontrer le théorème suivant:

„Les équations

$$\Delta_1 u = c_1,\ \Delta_2 u = c_2,\ \Delta_4 u = c_4,$$

entraînent l'équation

$$\Delta_3 u = c_3.\text{“}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est le suivant:

„Pour toute fonction u qui satisfait au système

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \Delta_4 u = 0,$$

il existe un couple de nombres réels α, β, tel que la fonction

$$v = u + \alpha x_1 x_2 + \beta y_1 y_2$$

soit une fonction hyperharmonique“.

§ 4. Les équations $\bar{\nabla}_\varkappa u = 0$.

Envisageons maintenant les deux équations

$$(8)\qquad \begin{aligned} \bar{\nabla}_1 u &= (x_1 x_2 + y_1 y_2)\Delta_3 u + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\Delta_4 u = 0 \\ \bar{\nabla}_2 u &= (x_1 y_2 - y_1 x_2)\Delta_3 u - (x_1 x_2 + y_1 y_2)\Delta_4 u = 0 \end{aligned}$$

que nous appellerons „équations de Laplace transformées“.

Il est évident que toute l'intégrale des équations $\Delta_3 u = 0$ et $\Delta_4 u = 0$ est aussi l'intégrale des équations $\bar{\nabla}_1 u = 0$ et $\bar{\nabla}_2 u = 0$. La réciproque reste vraie, car on peut considérer les équations (8) comme les équations linéaires en $\Delta_3 u$ et $\Delta_4 u$, dont le déterminant est égal à l'expression

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

Il suit de là que pour qu'une fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ soit dans (T) hyperharmonique, il faut et il suffit qu'elle satisfasse au système

$$\Delta_1 u = 0,\ \Delta_2 u = 0,\ \bar{\nabla}_1 u = 0,\ \bar{\nabla}_2 u = 0.$$

Mais l'importance des équations (9), qui peuvent servir de définition aux fonctions hyperharmoniques, est beaucoup plus grande. Elle consiste en ce que dans le cas des fonctions régulières, le système (9) peut être réduit à un système de trois équations seulement.

C'est la première proposition fondamentale du notre travail; elle peut être énoncée comme il suit:

„Si le point $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ est situé à l'intérieur du domaine (T) et si la fonction $u(x_1 y_1, x_2 y_2)$ étant continue avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres[1]), satisfait à l'un des systèmes d'équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \overline{\nabla}_1 u = 0$$

ou

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \overline{\nabla}_2 u = 0,$$

elle est nécessairement hyperharmonique".

La démonstration est très simple. Supposons, par exemple, que les équations $\Delta_1 u = \Delta_2 u = \overline{\nabla}_1 u = 0$ soient satisfaites et partons des identités suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\nabla}_2 u = y_2 \Delta_3 u - x_2 \Delta_4 u + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_3 u - (x_1 x_2 + y_1 y_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_4 u$$

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial y_1}\overline{\nabla}_1 u = y_2 \Delta_3 u - x_2 \Delta_4 u + (x_1 x_2 - y_1 y_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u + + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u = 0.$$

Elles nous donneront

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\nabla}_2 u = -(x_1 x_2 + y_1 y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u + (x_1 y_2 - y_2 x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u.$$

D'un façon analogue on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\overline{\nabla}_2 u = \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{\nabla}_2 u = \frac{\partial}{\partial y_2}\overline{\nabla}_2 u = 0.$$

[1]) La supposition de la continuité des dérivées du 2$^{\text{me}}$ ordre n'est pas nécessaire, comme on le voit en s'appuyant sur le théorème cité de M. Wilkosz.

Donc dans tout le domaine (T) $\bar{\nabla}_2 u = \text{const.}$ et comme

$$\bar{\nabla}_2 u \Big/_{\substack{x_1=0\\ y_1=0\\ x_2=0\\ y_2=0}} = 0$$

on a identiquement

$$\bar{\nabla}_2 u = 0.$$

On démontre d'une façon analogue la deuxième partie du théorème.

Remarque: L'hypothèse que le point $(x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0)$ est à l'intérieur du domaine de régularité de la fonction u, est essentielle, comme nous le démontrerons plus tard.

§ 5. **Les fonctions doublement harmoniques.** Nous savons déjà qu'une fonction doublement harmonique n'est pas en général fonction hyperharmonique. Cependant on peut trouver deux fonctions hyperharmoniques étroitement liées à la fonction u.

En effet, d'après les formules (9), on a

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{\nabla}_2 u = \frac{\partial}{\partial y_1} \bar{\nabla}_1 u$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \bar{\nabla}_2 u = - \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{\nabla}_1 u$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \bar{\nabla}_2 u = - \frac{\partial}{\partial y_2} \bar{\nabla}_1 u$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \bar{\nabla}_2 u = \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{\nabla}_1 u.$$

Il suit de là que

$$\Delta_j(\bar{\nabla}_\varkappa u) = 0 \qquad \begin{array}{l}(j = 1, 2, 3, 4)\\ (\varkappa = 1, 2).\end{array}$$

On a donc le

théorème „La fonction

$$\varphi(z_1, \bar{z}_2) = \bar{\nabla}_2 u + i \bar{\nabla}_1 u,$$

où $\bar{z}_2 = y_2 + i x_2$, est analytique régulière“.

§ 6. **Coordonnées hypersphéroïdales.** Introduisons maintenant de nouvelles coordonnées $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$, c. à d. les quantités liées à x_1, y_1, x_2, y_2 par les relations

$$x_\varkappa + i y_\varkappa = r_\varkappa e^{i\varphi_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

Nous appellerons ces nouvelles coordonnées: „coordonnés hypersphéroïdales".

Par un calcul direct on trouve facilement des expressions pour $\Delta_\varkappa u$ en coordonnées $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$. On a

$$\begin{aligned}
&\Delta_\varkappa u = \frac{\partial^2 u}{\partial r_\varkappa^2} + \frac{1}{r_\varkappa} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_\varkappa} + \frac{1}{r_\varkappa^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_\varkappa^2} \qquad (\varkappa = 1, 2)\\
(10) \qquad &\Delta_3 u = \nabla_1 u \, . \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \nabla_2 u \, . \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\\
&\Delta_4 u = \nabla_1 u \, . \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \nabla_2 u \, . \cos(\varphi_2 - \varphi_1),
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
&\nabla_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{1}{r_1 r_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}\\
(11) \qquad &\nabla_2 u = \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_1 \partial r_2} - \frac{1}{r_2} \frac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial \varphi_2}.
\end{aligned}$$

Les expressions en coordonnées $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ pour $\overline{\nabla}_1 u$, $\overline{\nabla}_2 u$ s'obtiennent facilement et l'on a

$$\begin{aligned}
(12) \qquad &\overline{\nabla}_1 u = r_1 r_2 \nabla_1 u\\
&\overline{\nabla}_2 u = r_1 r_2 \nabla_2 u.
\end{aligned}$$

D'après les résultats du § 5me, le système

$$(13) \qquad \Delta_1 u = \Delta_2 u = \nabla_1 u = \nabla_2 u = 0$$

est complètement équivalent au système (2) et il peut de même être réduit à un des systèmes

$$\begin{aligned}
(14) \qquad &\Delta_1 u = 0, \ \Delta_2 u = 0, \ \nabla_1 u = 0\\
&\Delta_1 u = 0, \ \Delta_2 u = 0, \ \nabla_2 u = 0,
\end{aligned}$$

sous la condition que la fonction u soit régulière à l'origine.

§ 7. **Les équations** $\overline{\nabla}_1 u = 0$ **et** $\overline{\nabla}_2 u = 0$. Nous terminerons ce chapitre en démontrant la proposition suivante:

„Si la fonction $u(x_1 \, y_1 \, x_2 \, y_2)$ est continue avec ses dérivées partielles des trois premiers ordres à l'intérieur du domaine (T) comprenant l'origine et si

$$\bar{\nabla}_1 u = 0$$
$$\bar{\nabla}_2 u = 0,$$

alors on peut déterminer deux fonctions

$$f_1(x_1\, y_1),\ f_2(x_2\, y_2)$$

telles que la fonction

$$u(x_1, y_1, x_2, y_2) - f_1(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2)$$

soit hyperharmonique dans (T)".

Dém. En effet[1]) cherchons s'il est possible de trouver une fonction (15) satisfaisant aux équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \bar{\nabla}_1 u = \bar{\nabla}_2 u = 0.$$

Or on voit d'après l'hypothése qu'on a certainement

$$\bar{\nabla}_1(u - f_1 - f_2) = 0$$
$$\bar{\nabla}_2(u - f_1 - f_2) = 0,$$

les fonctions $f_1(x_1\, y_1)$ et $f_2(x_2, y_2)$ étant absolument quelconques et assujetties seulement à avoir des dérivées partielles des deux premiers ordres.

Il nous reste alors à montrer qu'on peut satisfaire aux équations

$$\Delta_1(u - f_1) = 0$$
$$\Delta_2(u - f_2) = 0.$$

A cet effet observons que les expressions $\Delta_1 u$ et $\Delta_2 u$ sont des fonctions bien définies et continues dans (T) et qu'elles possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues. Calculons les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u$ et $\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u$. On trouve immédiatement qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_3 u - \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_4 u = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u = \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_4 u = 0.$$

[1]) Je dois cette démonstration à M. Zaremba; ma démonstration primitive était basée sur les développements employés dans le IIme Chapitre; voir pour cela la deuxième de mes notes citée plus haut.

L'expression $\Delta_1 u$ est donc une fonction qui dépend seulement des variables (x_1, y_1) et on prouve d'une manière analogue que $\Delta_2 u$ dépend seulement des variables (x_2, y_2).

Posons

$$\Delta_\varkappa u = \varphi_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

et envisageons des équations

$$\Delta_\varkappa f_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) = \varphi_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

On peut évidemment intégrer ces équations[1]) et on voit que des fonctions $f_1(x_1, y_1)$ et $f_2(x_2, y_2)$ déterminées par ce procédé nous fournissent la solution du problème.

Remarque. On peut encore se demander si les fonctions $f_1(x_1\, y_1)$ et $f_2(x_2\, y_2)$ sont entièrement déterminées. Evidemment non, car en désignant par $H_1(x_1, y_1)$ et $H_2(x_2, y_2)$ des fonctions harmoniques quelconques, on voit que l'expression

$$u - (f_1 + H_1) - (f_2 + H_2)$$

est aussi une fonction hyperharmonique.

Mais on peut aussi démontrer la réciproque.

Si nous avions

$$u - f_1(x_1\, y_1) - f_2(x_2\, y_2) = v$$
$$u - \varphi_1(x_1, y_1) - \varphi_2(x_2, y_2) = w,$$

où v et w désigneraient des fonctions hyperharmoniques, nous aurions

$$(\varphi_1 - f_1) + (\varphi_2 - f_2) = v - w,$$

donc

$$\Delta_1(v - w) = \Delta_1(\varphi_1 - f_1) = 0$$
$$\Delta_2(v - w) = \Delta_2(\varphi_2 - f_2) = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

---

[1]) Voir p. e. Goursat. Cours d'Analyse. T. III. 2me éd. p. 227 et suiv.

CHAPITRE II.

Développements en séries.

§ 1. Développément d'une fonction harmonique.

Envisageons la fonction $f(r_1, \varphi_1)$ harmonique dans la couronne circulaire définie par des inégalités

$$R' < r < R.$$

On démontre, dans la théorie du potentiel logarithmique, qu'une telle fonction peut être mise sous la forme d'une série

$$(1)\quad f(r, \varphi) = c \log r + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{(a_\varkappa r^\varkappa + a_{-\varkappa} r^{-\varkappa}) \cos \varkappa\varphi + (b_\varkappa r^\varkappa + b_{-\varkappa} r^{-\varkappa}) \sin \varkappa\varphi)\},$$

où les $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, c représentent des constantes. La série (1) converge uniformément dans tout domaine fermé situé entiérement à l'intérieur de la couronne circulaire considérée.

Réciproquement, la série (1) supposée uniformément convergente, représente une fonction harmonique à l'intérieur du domaine de convergence.

Nous allons montrer ici que la fonction $f(r, \varphi)$ peut être mise aussi sous la forme suivante:

$$f(r, \varphi) = c \log r + \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}{}' (a_\varkappa \cos \varkappa \varphi + b_\varkappa \sin \varkappa \varphi) r^\varkappa.$$

Soient r_1 et r_2 deux nombres positifs

$$R' < r_2 < r_1 < R.$$

Il existe évidemment un nombre positif M tel qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} |\ A_\varkappa(\varphi) r_1^\varkappa + A_{-\varkappa}(\varphi) r_1^{-\varkappa}\ | < M \\ |\ A_\varkappa(\varphi) r_2^\varkappa + A_{-\varkappa}(\varphi) r_2^{-\varkappa}\ | < M \end{array}\right\} \quad (\varkappa = 1. 2, \ldots),$$

où l'ou a posé

$$A_\varkappa(\varphi) = a_\varkappa \cos \varkappa\varphi + b_\varkappa \sin \varkappa\varphi \quad (\varkappa = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On obtient donc immédiatement des inégalités

$$\left.\begin{aligned} |A_\varkappa(\varphi)| &< \frac{M}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \\ |A_{-\varkappa}(\varphi)| &< \frac{M \cdot r_1^\varkappa \cdot r_2^\varkappa}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

d'où on tire les relations:

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} |a_\varkappa| &< \frac{M}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa}, \quad |b_\varkappa| < \frac{M}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \\ |a_{-\varkappa}| &< \frac{M r_1^\varkappa r_2^\varkappa}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa}, \quad |b_{-\varkappa}| < \frac{M r_1^\varkappa r_2^\varkappa}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \end{aligned}\right\} (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Il suit de ce qui précède que la série

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{ |a_\varkappa| + |b_\varkappa| \} r^\varkappa,$$

(dont la convergence pour $r < r_1$ peut être prouvée directement en vertu des relations (2)) est une majorante pour la série

$$\sum_{\varkappa=1}^{+\infty} A_\varkappa(\varphi) r^\varkappa.$$

On peut démontrer de la même façon la convergence de la série

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} A_{-\varkappa}(\varphi) r^{-\varkappa}$$

pour les $r > r_2$. C. q. f. d.

§ 2. **Développement d'une fonction doublement harmonique.** Considérons maintenant l'hypersphéroïde (T_H), c. à d. l'ensemble des points $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ où

$$r_1 \leqq R_1$$
$$r_2 \leqq R_2.$$

Les nombres R_1 et R_2 porteront le nom de „rayons du hypersphéroïde".

Envisageons maintenant deux hypersphéroïdes $(T_H^{(1)})$ et $(T_H^{(2)})$ et soient $(R_1^{(1)}, R_2^{(1)})$, respectivement $(R_1^{(2)}, R_2^{(2)})$, leurs rayons. L'ensemble des points communs aux $(T_H^{(1)})$ et $(T_H^{(2)})$ forme un domaine que nous appellerons „couronne hypersphéroïdale" (C_H).

Soit maintenant $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ une fonction, supposée être doublement harmonique à l'intérieur du (C_H). En se basant sur les considérations du numéro précédent, on démontre facilement la formule

$$(3) \qquad u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a^{(1)}_{mn} \cos m\varphi_1 \,.\, \cos n\varphi_2 +$$

$$+ a^{(2)}_{mn} \cos m\varphi_1 \sin n\varphi_2 + a^{(3)}_{mn} \sin m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + a^{(4)}_{mn} \sin m\varphi_1 \sin n\varphi_2],$$

où l'on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{(1)}_{0,0} = \alpha^{(1)}_{0,0} + \beta^{(1)}_{0,0} \log r_1 + \gamma^{(1)}_{0,0} \log r_2 + \delta^{(1)}_{0,0} \log r_1 \,.\, \log r_2 \\ a^{(i)}_{0,0} = 0 \qquad (i = 2, 3, 4) \\ a^{(i)}_{m,0} = [\alpha^{(i)}_{m,0} + \beta^{(i)}_{m,0} \log r_2] r_1^{m} + [\gamma^{(i)}_{m,0} + \delta^{(i)}_{m,0} \log r_2] r_1^{-m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 1, 3 \text{ et } m > 0 \\ a^{(i)}_{m,0} = 0 \qquad \text{pour } i = 2, 4 \text{ et } m > 0 \\ a^{(i)}_{0,n} = [\alpha^{(i)}_{0,n} + \beta^{(i)}_{0,n} \log r_1] r_2^{n} + [\gamma^{(i)}_{0,n} + \delta^{(i)}_{0,n} \log r_1] r_2^{-n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } n > 0 \\ a^{(i)}_{0,n} = 0 \qquad \text{pour } i = 3, 4 \text{ et } n > 0 \\ a^{(i)}_{m,n} = \alpha^{(i)}_{m,n} r_1^{m} r_2^{n} + \beta^{(i)}_{m,n} \,.\, r_1^{m} \,.\, r_2^{-n} + \gamma^{(i)}_{m,n} r_1^{-m} r_2^{n} + \delta^{(i)}_{m,n} r_1^{-m} r_2^{-n} \\ \qquad\qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } m > 0,\ n > 0. \end{array} \right.$$

Les lettres $\alpha^{(i)}_{m,n}, \beta^{(i)}_{m,n}, \ldots\ldots$ représentent des constantes. En effet, pour la démonstration, il suffit de considérer (r_2, φ_2) comme les constantes et de développer la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ en une série de la forme (1). Les $a_\varkappa, b_\varkappa, c$ seront naturellement des fonctions des variables r_2, φ_2 et il est facile de voir que ces fonctions seront harmoniques en r_2, φ_2. En développant à nouveau les $a_\varkappa, b_\varkappa, c$ de la même manière, on parvient à la formule (3), avec les expressions (4) pour les $a^{(i)}_{m,n}$.

Ajoutons que la série (3) converge dans (C_H), la convergence étant uniforme dans tout domaine fermé, situé entièrement à l'intérieur du (C_H).

Réciproquement, si la série (3), avec les expressions (4) pour les $a^{(i)}_{m,n}$, converge uniformément à l'intérieur du (C_H), elle représente une fonction doublement harmonique à l'intérieur du (C_H).

On peut aussi, en s'appuyant sur la remarque faite à la fin du numéro précédent, démontrer que

„toute fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ doublement harmonique à l'intérieur d'une couronne hypersphéroïdale, peut être développée en une série

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = A_{0\cdot 0} \log r_1 \log r_2 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A'_{m,0}(\varphi_1, \varphi_1) \cdot r_1^m \log r_2 +$$

$$(5) \qquad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_{0,n}(\varphi_1, \varphi_2) r_2^n \log r_1 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_{m,n}(\varphi_1, \varphi_2) \cdot r_1^m r_2^n$$

où les $A_{m,n}(\varphi_1, \varphi_2)$ s'expriment simplement par les fonctions $\cos m\varphi_1$. $\cos n\varphi_2$, $\sin m\varphi_1$, $\sin n\varphi_2$.

§ 3. Singularités des fonctions doublement harmoniques.

On sait qu'une fonction harmonique peut avoir des singularités isolées et cette propriété est de la plus grande importance pour la théorie du potentiel.

Il en est tout autrement des fonctions doublement harmoniques et „a fortiori“ des fonctions hyperharmoniques et c'est de là que dérive peut-être la différence la plus essentielle entre la théorie des fonctions d'une variable complexe et celle des fonctions de plusieurs variables complexes.

En effet, je dis que les singularités des fonctions doublement harmoniques ne sont jamais isolées.

Pour la démonstration revenons aux considérations du § 2me du texte.

Supposons que la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ soit doublement harmonique dans le voisinage du point $(0, 0, 0, 0)$, en ne supposant rien au sujet des circonstances qui se présentent au point $(0, 0, 0, 0)$ lui-même. En introduisant des coordonnées hypersphéroïdales, nous supposons donc que la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ est doublement harmonique pour tous les points $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ où r_1 et r_2 sont suffisamment petits et $r_1^2 + r_2^2 > 0$.

On voit donc, en employant les notations du § 2me que les coefficients $a_{m,n}^{(i)}$ sont des fonctions régulières de r_1 et r_2 pour tout couple des valeurs (r_1, r_2) positives et suffisamment petites, à l'exception du couple $r_1 = r_2 = 0$.

Distinguons plusieurs cas:

I. $m > 0$, $n > 0$. On a dans ce cas:

$$a_{m,n}^{(i)} = [\alpha_{m,n}^{(i)} r_2^n + \beta_{m,n}^{(i)} r_2^{-n}] r_1^m + [\gamma_{m,n}^{(i)} r_2^n + \delta_{m,n}^{(i)} r_2^{-m}] r_1^{-m}.$$

Prenons un couple $(r_1 \neq 0, r_2 = 0)$. La fonction $a_{m,n}^{(i)}$ est pour ce couple régulière, ce qui est possible seulement si

$$\gamma_{m,n}^{(i)} r_2^n + \delta_{m,n}^{(i)} r_2^{-n} = 0,$$

et alors si

$$\gamma_{m\,n}^{(i)} = 0$$
$$\delta_{m,n}^{(i)} = 0.$$

L'expression pour $a_{m,n}^{(i)}$ doit donc se réduire à l'expression suivante

$$a_{m,n}^{(i)} = \alpha_{m,n}^{(i)} r_1^m r_2^n + \beta_{m,n}^{(i)} r_1^m r_2^{-n}.$$

Prenons maintenant un point $(r_1 = 0,\ r_2 \neq 0)$. La fonction $a_{m,n}^{(i)}$ est, d'après ce qu'on a vu plus haut, régulière dans ce point et alors on doit avoir aussi $\beta_{m,n}^{(i)} = 0$.

Nous voyons donc que, dans le cas considéré, on doit avoir

$$a_{m,n}^{(i)} = \alpha_{m,n}^{(i)} r_1^m r_2^n \qquad (i = 1, 2, 3, 4,\ m > 0 \\ n > 0),$$

II. On démontre, par une voie analogue, qu'on a

$$\begin{aligned} a_{m,n}^{(i)} &= \alpha_{m,0}^{(i)} r_1^m && \text{pour } i = 1,3 \text{ et } m > 0 \\ a_{0,n}^{(i)} &= \alpha_{0,n}^{(i)} r_2^n && \text{pour } i = 1,2 \text{ et } n > 0 \\ a_{0,0}^{(i)} &= \alpha_{0,0} && \text{pour } i = 1. \end{aligned}$$

Le développement (5) devient donc simplifié et on obtient la formule

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(\varphi_1, \varphi_2) r^m r_2^n,$$

qui converge pour $r_1 = r_2 = 0$.

Nous voyons donc qu'on peut attribuer à notre fonction u pour $r_1 = r_2 = 0$ une valeur telle que la fonction u sera régulière au point $(r_1 = r_2 = 0)$ lui même. C. q. f. d.

§ 4. **Fonctions doublement harmoniques et l'équation** $\nabla_1 u = 0$. Supposons maintenant que la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ satisfasse à l'intérieur du (C_H) au système des équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \nabla_1 u = 0. \tag{6}$$

Le développement (3) avec les formules (4) pour les coefficients $a_{m,n}^{(i)}$ est naturellement valable, mais on peut se demander si la condition $\nabla_1 u = 0$ ne nous permettrait pas de simplifier des formules. Or on peut „a priori“ affirmer que la réponse doit être affirmative, parce qu'il existe des fonctions doublement harmoniques qui ne satisfont pas à l'équation $\nabla_1 u = 0$.

Cherchons donc l'expression générale pour les fonctions satisfaisant au système (6) et, comme point de départ, prenons les formules (3) et (4).

En posant

$$u_{mn} = a^{(1)}_{mn} \cos m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + a^{(2)}_{m,n} \cos m\varphi_1 \sin n\varphi_2 +$$
$$+ a^{(3)}_{m,n} \sin m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + a^{(4)}_{m,n} \sin m\varphi_1 \sin n\varphi_2,$$

on voit que

$$\nabla_1 u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_1 u_{m,n},$$

et la somme double étant une série de Fourier, la condition $\nabla_1 u = 0$ est équivalente au système des conditions

$$\nabla_1 u_{m,n} = 0, \qquad (m,n = 0, 1, \ldots\ldots).$$

Nous avons à distinguer quatre cas.

Cas I: $m > 0$, $n > 0$.

On a

$$\nabla_1 u_{m,n} = \Phi^{(1)}_{m,n}[a^{(1)}_{m,n}, a^{(4)}_{m,n}] \cos m\varphi_1 \cos n\varphi_2 +$$
$$+ \Phi^{(2)}_{m,n}[a^{(2)}_{m,n}, a^{(3)}_{m,n}] \cos m\varphi_1 . \sin n\varphi_2 +$$
$$+ \Phi^{(2)}_{m,n}[a^{(3)}_{m,n}, a^{(2)}_{m,n}] \sin m\varphi_1 . \cos n\varphi_2 +$$
$$+ \Phi^{(1)}_{m,n}[a^{(4)}_{m,n}, a^{(1)}_{m,n}] \sin m\varphi_1 . \sin n\varphi_2,$$

où on a posé:

$$\Phi^{(1)}_{m,n}[A, B] = \frac{\partial^2 A}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{mn}{r_1 r_2} B$$

$$\Phi^{(2)}_{m,n}[A, B] = \frac{\partial^2 A}{\partial r_1 \partial r_2} - \frac{mn}{r_1 r_2} . B.$$

On doit donc avoir

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi^{(1)}_{m,n}[a^{(i)}_{m,n}, a^{(j)}_{m,n}] = 0 \qquad (i,j = 1, 4 \ i \neq j) \\ &\Phi^{(2)}_{m,n}[a^{(i)}_{m,n}, a^{(j)}_{m,n}] = 0 \qquad (i,j = 2, 3, \ i \neq j). \end{aligned} \right.$$

En substituant les expressions (4) pour les $a^{(i)}_{m,n}$ et ${}^{(j)}_{m,n}$ dans (7) on voit, que des constantes $a^{(i)}_{m,n},\ldots$ doivent être assujeties aux conditions

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha^{(1)}_{m,n}+\alpha^{(4)}_{m,n}=0\\ \beta^{(1)}_{m,n}-\beta^{(4)}_{m,n}=0\\ \gamma^{(1)}_{m,n}-\gamma^{(4)}_{m,n}=0\\ \delta^{(1)}_{m,n}+\delta^{(4)}_{m,n}=0 \end{array}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha^{(2)}_{m,n}-\alpha^{(3)}_{m,n}=0\\ \beta^{(2)}_{m,n}+\beta^{(3)}_{m,n}=0\\ \gamma^{(2)}_{m,n}+\gamma^{(3)}_{m,n}=0\\ \delta^{(2)}_{m,n}-\delta^{(4)}_{m,n}=0, \end{array}\right.$$

ce qui entraîne, que la formule pour $u_{m,n}$ peut être mise dans ce cas sous la forme suivante:

$$(9)\qquad \begin{aligned} u_{m,n}=&\left[\alpha^{(1)}_{m,n}r_1^m r_2^n+\delta^{(1)}_{m,n}r_1^{-m}r_2^{-n}\right]\cos(m\varphi_1+n\varphi_2)+\\ &+\left[\beta^{(1)}_{m,n}r_1^m r_2^{-n}+\gamma^{(1)}_{m,n}r_1^{-m}r_2^{n}\right]\cos(m\varphi_1-n\varphi_2)+\\ &+\left[\alpha^{(2)}_{m,n}r_1^m r_2^n+\delta^{(2)}_{m,n}r_1^{-m}r_2^{-n}\right]\sin(m\varphi_1+n\varphi_2)+\\ &+\left[\beta^{(2)}_{m,n}r_1^m r_2^{-n}+\delta^{(2)}_{m,n}r_1^{-m}r_2^{n}\right]\sin(m\varphi_1-n\varphi_2).\qquad (m,n=1,2,\ldots.). \end{aligned}$$

Cas II: $m>0$, $n=0$. On a

$$\nabla_1 u_{m,0}=\frac{\partial^2 a^{(1)}_{m,0}}{\partial r_1\partial r_2}\cos m\varphi_1+\frac{\partial^2 a^{(3)}_{m,0}}{\partial r_1\partial r_2}\sin m\varphi_1.$$

Donc les $a^{(i)}_{m,0}$ doivent pour $i=1,3$ et $m>0$ remplir l'équation

$$\frac{\partial^2 a^{(i)}_{m,0}}{\partial r_1\partial r_2}=0,$$

ce qui entraîne, qu'on a

$$a^{(i)}_{m,0}=\alpha^{(i)}_{m,0}r_1^m+\gamma^{(i)}_{m,0}r_1^{-m}\qquad (i=1,3)$$

et alors

$$(10)\qquad u_{m,0}=\left[\alpha^{(1)}_{m,0}r_1^m+\gamma^{(1)}_{m,0}r_1^{-m}\right]\cos m\varphi_1+\left[\alpha^{(3)}_{m,0}r_1^m+\gamma^{(3)}_{m,0}r_1^{-m}\right]\sin m\varphi_1.$$

Cas III. $m=0$, $n>0$. On trouve, que

$$(11)\qquad u_{0,n}=\left[\alpha^{(1)}_{0,n}r_2^n+\gamma^{(1)}_{0,n}r_2^{-n}\right]\cos n\varphi_2+\left[\alpha^{(2)}_{0,n}r_2^n+\gamma^{(2)}_{0,n}r_2^{-n}\right]\sin n\varphi_2.$$

Cas IV. $m=0$, $n=0$, On trouve facilement, que

$$(12)\qquad u_{0,0}=\alpha^{(1)}_{0,0}+\beta^{(1)}_{0,0}\log r_1+\gamma^{(1)}_{0,0}\log r_2.$$

Réciproquement supposons, que la série

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$$

est uniformément convergente dans la couronne hypersphéroïdale, et que les $u_{m,n}$ sont définis par les formules (9)—(12). D'après § 2me la fonction u est doublement harmonique, elle possède alors des derivées partielles de tous les ordres, donc on peut écrire la relation

$$\nabla_1 u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_1 u_{m,n},$$

et comme $\nabla_1 u_{m,n} = 0$ (ce qu'on vérifie immédiatement), on a aussi $\nabla_1 u = 0$.

§ 5. **Les fonctions doublement harmoniques et l'équation** $\nabla_2 u = 0$. Passons maintenant au cas, ou la fonction u, supposée doublement harmonique dans la couronne (C_H), satisfait encore à l'équation $\nabla_2 u = 0$. Par des considérations tout à fait semblables à celles du paragraphe précédent, ou trouve, que le développement de la fonction u est donné par la formule

(13) $$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n},$$

où les expressions pour les $u_{m,n}$ sont dans le cas $m^2 + n^2 > 0$ précisement les mêmes, lesquelles nous avons trouvées plus haut. [Formules (9)—(11)]; c'est seulement le terme $u_{0,0}$, qui peut avoir dans ce cas la forme plus genérale:

(14) $$u_{0,0} = \alpha_{0,0}^{(1)} + \beta_{0,0}^{(1)} \log r_1 + \gamma_{0,0}^{(1)} \log r_2 + \delta_{0,0}^{(1)} \log r_1 \, . \log r_2 .$$

Réciproquement, si nous supposons, que la série (13) converge uniformément dans (C_H), et que les $u_{m,n}$ sont donnés par par les formules (9)—(11) et (14), la fonction u satisfait au système

(15) $$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \nabla_2 u = 0.$$

Nous allos tirer de là une conséquence importante:

Soit $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ une fonction uniforme, qui dans la couronne (C_H) remplit les équations (6). En prenant la fonction u sous la forme (13) on obtient pour les $u_{m,n}$ des formules (9)—(12). La fonction u est alors l'intégrale de l'équation

$$\nabla_2 u = 0.$$

On a donc le théorème, qui est une généralisation d'une partie du théorème démontré dans le § 4me du I Chapitre:

„Toute fonction uniforme $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$, satisfaisant dans (C_H) au système des équations (6) est nécessairement hyperharmonique dans cette couronne".

Mais on peut aller plus loin. Soit $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ une fonction uniforme, satisfaisant dans (C_H) au système (15). Prenons encore la fonction u sous la forme (13), les $u_{m,n}$ étant définis par des formules (9)—(11) et (14). Nous voyons, que c'est le terme $u_{0,0}$ seulement, qui ne satisfait pas en général à l'équation $\nabla_1 u = 0$, pendant que les autres termes sont des fonctions hyperharmoniques.

On a donc le théorème, qui est une généralisation de la deuxième partie du théorème, démontré dans le § 4me du Ier Chapitre:

„Pour toute fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$, uniforme dans (C_H), satisfaisant au système (15) on peut trouver une constante c telle, que la fonction

$$u - c \log r_1 \log r_2$$

sera hyperharmonique dans (C_H).

Pour que la fonction u soit d'elle même hyperharmonique il faut et il suffit que

$$c = 0".$$

CHAPITRE III.

Intégrale de Poisson et Problème de Dirichlet.

§ 1. **Théorème sur maximum et minimum.** Avant d'aborder le sujet propre du chapitre, nous allons donner un théorème, qui nous sera utile dans ce qui va suivre.

Soit u une fonction doublement harmonique dans un domaine (T). Cette fonction étant harmonique jouit alors de la propriété, d'avoir des points, où elle devient extremum, toujours sur la frontière du (T). Or dans le cas d'une certaine classe des domaines, on peut pour les fonctions doublement harmoniques donner des renseignements plus précis sur les points d'extremum.

Les domaines en question sont des domaines „cylindriques„[1]), dont on a déjà fait l'usage dlan la théorie de deux variables complexes.

La définition des ces domaines est suivante:

Soit (D_1) un domaine, situé dans le plan de la variable complexe z_1 et (D_2) un domaine, situé dans le plan de la variable complexe z_2. L'ensemble des points (x_1, y_1, x_2, y_2), (où on a posé $z_\varkappa = x_\varkappa + iy_\varkappa$) tels, que (x_1, y_1) appartient à (D_1) et (x_2, y_2) à D_2, est évidemment un domaine (T_c) à quatre dimensions, domaine, qu'on appelle „cylindrique" [formé par (D_1) et (D_2)]".

Un exemple simple d'un tel domaine nous est fourni par l'hyperspéroïde.

La variété à deux dimensions, située sur la frontière du (T_c) qu'on obtient, en choisissant à la fois (x_1, y_1) sur la frontière du (D_1) et (x_2, y_2) sur la frontière du (D_2) s'appellera „contour" du domaine.

Ceci posé, on peut maintenant démontrer la proposition suivante:

„Si la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ est doublement harmonique dans un domaine cylindrique (T_c) et continue dans ce domaine fermé, alors un du moins d'entre les points du maximum (absolue) de la foncion u est situé sur le contour du (T_c)".

Dém. Soient (D_1) et (D_2) deux domaines planes à l'aide desquelles (T_c) est défini et soit $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$ un des points, où la fonction u devient maximum. Nous savons, que ce point est sur la frontière du (T_c) (en dehors du cas trivial $u =$ const), et alors une au moins de deux circonstances doit se présenter:

(x_1^0, y_1^0) doit être point frontière du (D_1), ou (x_2^0, y_2^0) doit être point frontière du (D_2). Supposons, que par exemple c'est le premier cas, qui a lieu. Or, on voit sans peine, que la fonction $u(x_1^0, y_1^0, x_2, y_2)$, considerée comme la fonction des variables (x_2, y_2), a un des points du maximum (absolue) sur la frontière du (D_2). Soit $(\bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0)$ un d'entre tels points.

---

[1]) V. p. e. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie II Bd. I Lieferung.

Je dis, que le point $(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0)$ est le point du maximum (absolue) pour la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ dans (T_c).

En effet, on a

$$u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0) \geqq u(x_1^0, y_1^0, x_2, y_2)$$

tans tout (D_2) et alors

(1) $$u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0) \geqq u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0).$$

D'autre part d'après l'hypothèse l'inégalité

$$u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) \geqq u(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

est valable dans tout (T_c) et alors

(2) $$u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) \geqq u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0).$$

On a donc

$$u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0) = u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0).$$

ce qui nous montre, que le point $(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0)$, (qui est situé sur le contour!) est aussi un point, où la fonction u devient maximum. C. q. f. d.

Remarque. Il est évident, qu'une proposition analogue pour les points du minimum (absolue) est vraie.

§ 2. **Problème de Dirichlet dans le cas du hypersphéroïde.** Nous allons maintenant donner l'énocé du problème, dont la solution constitue l'objet principale de ce chapitre.

Nous l'appellerons **„problème de Dirichlet"** par analogie à la théorie du potentiel, en ajoutant, que nous nous bornerons, aussi bien dans l'énoncé, que dans la solution, au cas le plus simple, à savoir du hypersphéroïde.

Voici l'énoncé du problème:

„Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ une fonction définie et continue sur le contour du hypersphéroïde (T_H), dont le centre se confond avec l'origine des coordonnées. Soient R_1 et R_2 les rayons du (T_H).

Déterminer une fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$

1° doublement harmonique à l'intérieur du (T_H),

2° telle, qu'on ait

$$\lim_{(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) \to (R_1, \theta_1, R_2, \theta_2)} [u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - f(\theta_1, \theta_2)] = 0,$$

le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ étant situé toujours à l'intérieur du (T_H) et $(R_1, \theta_1, R_2, \theta_2)$ étant un point quelconque sur le contour".

Dans ce qui va suivre nous allons montrer que la solution du problème proposée existe toujours et qu'elle est unique. Ici nous voulons seulement faire encore une remarque.

Si on compare l'enoncé du problème formulé plus haut à celui, qu'on donne au problème de Dirichlet dans la théorie du potentiel, on voit, qu'il y a une différence entre ces problèmes. Dans la théorie des fonctions harmoniques on demande la fonction u, continue dans tout domaine fermé, tandis que dans le problème, formulé plus haut, nous avons omis cette condition. On trouvera l'explication de cette différence pendant la démonstration du théorème d'unicité de solution.

§ 3. Théorème d'unicité.

En passant à la solution du problème de Dirichlet, nous allons démontrer la proposition suivante:

„Le problème de Dirichlet possède au plus une solution".

Voici quelques lemmes, qui dans leur ensemble sont équivalents à notre assertion.

I. „Il existe au plus une solution du problème, qui est continue dans (T_H) fermé".

Ceci est évidemment une concéquence immédiate du théorème sur les extrema des fonctions doublement harmoniques.

II. „Une solution, continue dans (T_H) fermé, existe".

Nous démontrerons ce lemme dans le § 4[me], naturellement d'une manière indépandante des considérations du paragraphe présent.

III. „Si u est une solution du problème, alors u est continue dans le domaine fermé (T_H)".

En effet, supposons, que la fonction u est une solution du problème de Dirichlet dans le cas particulièr

$$f(\theta_1, \theta_2) \equiv 0.$$

La fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend donc vers zéro, lorsque le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers un point du contour, en restant à l'intérieur du (T_H). En vertu de la remarque, que le contour est un ensemble fermé, on peut affirmer, que cette convergence est uniforme. On peut donc à tout $\varepsilon > 0$ faire adjoindre un autre nombre positif δ, tel qu'on ait

$$R_1 - r_1 < \delta,\ R_2 - r_2 < \delta \supset |\, u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)\,| < \varepsilon.$$

Soit maintenant (T'_H) un hypersphéroïde concentrique avec (T_H), dont les rayons R'_1 et R'_2 sont assujettis aux conditions

$$R_1 - R'_1 < \delta$$
$$R_2 - R'_2 < \delta.$$

On a donc

$$|\, u(R'_1, \varphi_1, R'_2, \varphi_2)\,| < \varepsilon$$

et alors d'après le théorème sur l'extremum on a

$$|\, u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)\,| < \varepsilon$$

dans tout (T'_H) fermé.

Des nombres ε et δ étant aussi petits, que l'on les veut, on voit, que

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) \equiv 0$$

dans tout l'intérieur du (T_H).

Notre lemme étant démontré dans ce cas particulièr, on peut maintenant donner une démonstration rapide dans le cas général.

Supposons, qu'il existe une solution v du problème de Dirichlet, qui n'est pas continue dans (T_H) ferme. On sait, la validité du lemme II étant admis, qu'il existerait encore une autre solution u, qui serait continue dans (T_H) fermé. La différence $v - u$ était alors une solution du problème de Dirichlet avec des données $f(\theta_1, \theta_2) \equiv 0$, qui ne serait pas continue dans (T_H) fermé, ce qui est impossible. C. q. f. d.

Remarque. Ces trois lemmes prouvent, que notre proposition énoncée au début de ce paragraphe, est vraie. Il nous reste sseulement à démontrer le lemme II^{me}, c'est à dire à prouver, qu'une olution continue dans (T_H) fermé, existe.

§ 4. Intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques.

L'existence d'une solution du problème de Dirichlet et de plus la forme de cette solution, peut nous être facilement suggérée, par les théorèmes de la théorie du potentiel logarithmique. On sait, que dans cette théorie dans le cas d'un cercle, le problème de Dirichlet est resolu à l'aide de l'intégrale de Poisson[1]).

Dans la théorie des fonctions doublement harmoniques on peut aussi considérer un algorithme intégrale, qui nous fournira la solution du problème de Dirichlet dans le cas du hypersphéroïde, auquel nous réserverons le nom „intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques".

Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ une fonction continue sur le contour du (T_H). Par „l'intégrale de Poisson" appartenant à cette fonction nous entenderons la formule

$$(3) \qquad u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, H_1 \,.\, H_2 \, d\theta_1, d\theta_2$$

où

$$(4) \qquad H_\varkappa = \frac{R_\varkappa^2 - r_\varkappa^2}{l_\varkappa^2} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

et où $l_\varkappa$ désigne la distance des points $(R_\varkappa, \theta_\varkappa)$ et $(r_\varkappa, \varphi_\varkappa)$.

On voit immédiatement que la fonction (3) est doublement harmonique à l'intérieur du (T_H).

§ 5. **Solution du problème de Dirichlet.** Comme nous avons dit plus haut, on peutésperer, que la solution du problème de Dirichlet est fournie par la fonction (3). Pour cela il nous reste à démontrer, que cette fonction tend vers $f(\theta_1, \theta_2)$, lorsque le point $(r_1, \varphi_1, r_2 . \varphi_2)$ en restant à l'intérieur du (T_H) tend vers $(R_1, \theta_1, R_2, \theta_2)$. D'autre part, il nous faut, en vertu du lemme II^me du § précédent, démontrer, que u est continue dans (T_H) fermé.

Prouvons d'abord, que la fonction u tend vers une limite déterminée, quand le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers un point de frontière, point, qui n'est pas situé sur le contour du (T_H).

Pour fixer les idées supposons, que les coordonnées hypersphéroïdales de ce point sont $(R_1, \theta_1, r_2^{(0)}, 0)$, ce qu'on peut toujours

---

[1]) V. p. e. Goursat. Cours d'Analyse. T. III. II Éd. p. 138 et suiv. ou Picard. Traité d'Analyse. T. II. Éd, II. p. 15 et suiv.

obtenir par une simple transformation des variables. On a naturellement

$$r_2^{(0)} < R_2$$

et il nous faut prouver, que la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers une limite, lorsque le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend, en restant à l'intérieur du (T_H), vers le point $(R_1, 0, r_2^{(0)}, 0)$.

Nous ferons ceci, en démontrant, que dans ce cas, la différence

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \theta_2)\, H_2^0\, d\theta_2 \tag{5}$$

$\left(\text{où on a posé} \quad H_2^0 = \dfrac{R_2^2 - r_2^{(0)2}}{R_2^2 + 2R_2 r_2^{(0)} \cos\theta_2 + r_2^{(0)2}}\right)$,

tend vers zéro.

Soit δ un nombre positif arbitraire. En modifiant convenablement des raisonnéments classiques, on obtient:

$$\left| u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \theta_2)\, H_2^0\, d\theta_2 \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} H_1 \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(\theta_1, \theta_2)\, H_2 - f(0, \theta_2)\, H_2^0 \right| d\theta_2\right] d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} H_1 \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(\theta_1, \theta_2) \right| \cdot \left| H_2 - H_2^0 \right| d\theta_2\right] d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} H_1 \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(\theta_1, \theta_2) - f(0, \theta) \right| H_2^0\, d\theta_2\right] d\theta_1.$$

Désignons les trois intégrales du second membre de cette inégalité par I_1, I_2, I_3 et par M la plus petite limite supérieure de la fonction $| f(\theta_1, \theta_2) |$. Soit ε un nombre positif arbitraire et δ un autre nombre positif choisi de tel façon, que les relations

$$\begin{gathered} | r_2 - r_2^0 | < \delta \\ | \varphi_2 | < \delta \\ r_3 < R_2 \end{gathered} \tag{6}$$

entraînent l'inégalité

$$| H_2 - H_2^0 | < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Supposons de plus, qu'on a

$$| \theta_1 | < \delta \supset | f(\theta_1, \theta_2) - f(0, \theta_2) | < \frac{\varepsilon}{3 \,.\, \max H_2^0}.$$

Il est évident, qu'on peut toujours satisfaire à ces inégalités, dont une conséquence immédiate sont des inégalités

$$| I_2 | \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$| I_3 | \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il s'agit encore de prouver, que l'intégrale I_1 tend vers zéro avec $R_1 - r_1$.

Désignons par N le nombre

$$N = \max | f(\theta_1, \theta_2) H_2 - f(0, \theta_2) \,.\, H_2^0 | ,$$

où la fonction $f(\theta_1, \theta_2) \,.\, H_2 - f(0, \theta_2) H_2^0$ est considerée comme la fonction des variables $\theta_1, \theta_2, r_2, \varphi_2$ dans le domaine (6) pour les variables r_2, φ_2, des variables θ_1, θ_2 étant arbitraires.

On voit facilement, que

$$| I_1 | \leqq \frac{N}{2\pi} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} H_1 d\theta_1,$$

et comme d'après un théorème classique sur l'intégrale de Poisson nous savons que la second nombre tend vers zéro avec $R_1 - r_1$, nous voyons, que l'intégrale I_1 tend aussi vers zéro.

D'après cela nous pouvons dire:

„L'intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques, appartenant à une fonction continue, tend vers une limite déterminée, quand le point variable tend, en restant à l'intérieur du (T_H), vers un point frontière du (T_H), qui n'appartient pas au contour du (T_H)“.

Envisageons maintenant un point du contour, p. ex. le point $(R_1, 0, R_2, 0)$ (ce qu'on peut toujours supposer sans diminuer la généralité des raisonnements) et examinons ce qui se passe, quand le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend, en restant à l'intérieur du (T_H), vers ce point. Il est facile de prévoir, que la différence

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - f(0, 0)$$

tend dans ces circonstances vers zéro.

En effet. On a

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - f(0,0) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} [f(\theta_1, \theta_2) - f(0,0)]\, H_1 \,.\, H_2\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi_2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \{ \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} [f(\theta_1, \theta_2) - f(0,0)]\, H_1\, H_2\, d\theta_2 \}\, d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} \{ \int\limits_{-\delta}^{+\delta} [f(\theta_1, \theta_2) - f(0,0)]\, H_1\, H_2\, d\theta_2 \}\, d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \int\limits_{-\delta}^{+\delta} [f(\theta_1, \theta_2) - f(0,0)] \,.\, H_1\, H_2\, d\theta_1\, d\theta_2 .$$

Nous avons donc

$$| u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - f(0,0) | \leqq \frac{2M}{4\pi^2} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} H_1\, H_2\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{2M}{4\pi^2} \int\limits_{-\delta}^{+\delta} [\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} H_1\, H_2\, d\theta_2]\, d\theta_1 + \frac{2M}{4\pi^2} \int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} [\int\limits_{-\delta}^{+\delta} H_1\, H_2\, d\theta_2]\, d\theta_1$$

$$+ | f(\theta_1', \theta_2') - f(0,0) | ,$$

où on a par (θ_1', θ_2') désigné le point, pour lequel la fonction

$$| f(\theta_1, \theta_2) - f(0,0) |$$

devient maximum absolue dans le domaine

$$| \theta_1 | \leqq \delta$$
$$| \theta_2 | \leqq \delta .$$

On voit maintenant facilement, que tous les termes d'inégalité (7) peuvent être rendus si petits, qu'on les veut, ce qui nous montre. que

„l'intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques, appartenant à la fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ tend vers cette fonction (et même uniformément), quand le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers uu point déterminé du contour".

Remarque. Les considérations précédentes nous démontrent, que notre solution est continue dans (T_B) fermé; nous avons donc démontré aussi le II^me lemme du paragraphe précédent.

En faisant un résumé, nous obtenons la deuxième proposition fondamentale de ce mémoire:

„Il existe toujours une et uue seule solution du problème de Dirichlet, dans le cas du hypersphéroïde. Cette solution est nécessairement continue dans (T_H) fermé“.

§ 6. Remarques sur le problème de Dirichlet dans le cas, où les données sont définies sur toute la frontière du (T_H).

Il existe une différence profonde entre le problème de Dirichlet traité dans la théorie du potentiel et entre le problème traité plus haut. Cette différence consiste en le fait, que dans la théorie du potentiel la fonction donnée est définie sur toute la frontière du domaine, pendant que dans la théorie des fonctions doublement harmoniques la fonction donnée est définie sur une partie de la frontière, partie, qui est une multiplicité à deux dimensions, pendant que la frontière même est une multiplicité à trois dimensions.

Or on peut naturellement aussi dans le cas des fonctions doublement harmoniques formuler le problème de Dirichlet avec des données définies sur toute la frontière du (T_H), mais d'après les résultats déjà obtenus on peut affirmer, que ce problème n'est pas en général possible [1]).

Précisons le problème:

„Soit $f(M)$ une fonction continue du point de la frontière du (T_H). Détérminer une fonction $u(P)$:

1° continue dans (T_H) fermé

2° doublement harmonique à l'intérieur du (T_H),

3° vérifiant la conditon

$$u(P) \to f(M),$$

lorsque le pont P, étant à l'intérieur du (T_H) tend vers M“.

La solution decoule immédiatement des considérations du § 5^me^:

Théorème: „Pour que la solution du problème existe, il faut et il suffit, que les valeurs de la fonc-

[1]) Poincaré à déjà remarque ceci dans le cas des fonctions hyperharmoniques. On voit pour cela des mémoires citées plus haut.

tion $f(M)$ s'expriment par les valeurs de cette fonction, qu'elle prend sur le contour, au moyen des formules:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M') \, H_1 \, d\theta_1$$

$$f(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M') \, H_2 \, d\theta_2{}^{\text{“}}.$$

§ 7. Développement de l'intégrale de Poisson en série de Fourier.

En términant ce mémoire nous allons appliquer des résultats obtenus plus haut à la théorie des fonctions hyperharmoniques.

A cet but, en suivant la marche indiquée par la théorie du potentiel, développons l'ntégrale de Poisson en série de Fourier.

Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ une fonction continue du point du contour du (T_H). L'intégrale de Poisson, qui correspond à cette fonction peut être mis sous la forme

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \, H_1 \, d\theta_1 \right] . \, H_2 \, d\theta_2 .$$

Mais on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \, H_1 \, d\theta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \, d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^{\varkappa} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa (\theta_1 - \varphi_1) \, . \, d\theta_1 \, ^{1)},$$

et alors

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \, d\theta_1 \, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^{\varkappa} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa (\theta_1 - \varphi_1) \, d\theta_1 \, d\theta_2 +$$

[1]) V. p. e. Goursat l. c. p. 187 et suiv.

$$(8) \qquad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^l \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos l\,(\theta_2 - \varphi_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^\varkappa \cdot \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^l \cdot \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa(\theta_1 - \varphi_1) . \cos l\,(\theta_2 - \varphi_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 .$$

La série (8) converge dans tout l'intérieur du (T_H) et cette convergence est uniforme dans tout domaine fermé, situé entièrement à l'intérieur du (T_H). La manière dont on peut établir ces points essentiels est classique, et on peut pour cela consulter p. ex. le livre cité de M. Goursat.

§ 8. **L'intégrale de Poisson et les fonctions hyperharmoniques.** La fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ définie par la formule (3), où la fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ est supposée intégrale est évidemment doublement harmonique, mais elle peut ne pas être hyperharmonique. D'atre part, on sait, que toute fonction hyperharmonique dans un hypersphéroïde (T_H), situé à l'intérieur du domaine de regularité de la fonction u peut être toujours mis sous la forme (3). Nous sommes donc d'une manière naturelle conduits au problème: „Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes, pour que la fonction (3) soit hyperharmonique à l'intérieur du (T_H)".

Pour résoudre cette question, prenons comme le point de départ le développement (8) et calculons la valeur du $\nabla_1 u$.

On a

$$\nabla_1 u = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \nabla_1 \left[\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^\varkappa \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^l \cdot \right.$$

$$(9) \qquad \left. \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa\,(\theta_1 - \varphi_1) \cos l\,(\theta_2 - \varphi_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varkappa \,.\, l}{R_1 \,.\, R_2} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{\varkappa-1} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{l-1} \cdot$$

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos [(\varkappa\theta_1 - l\theta_2) - (\varkappa\varphi_1 - l\varphi_2)]\, d\theta_1\, d\theta_2 .$$

Cherchons d'abord les conditions nécessaires. On doit avoir $\nabla_1 u = 0$ dans (T_H), donc tous les coefficients de la série entière (9) doivent être nuls:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos[(\varkappa\theta_1 - l\theta_2) - (\varkappa\varphi_1 - l\varphi_2)]\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots.)$$

Cettes relations doivent être vérifiées pour toutes les valeurs des variables φ_1, φ_2, donc on doit avoir

$$(10)\quad \left|\begin{array}{l} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0 \\ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \sin(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots.).$$

Les relations (10) sont nécessaires, pour que l'intégrale (3) satisfasse à l'équation $\nabla_1 u = 0$, donc pour qu'elle représente une fonction hyperharmonique. Ces relations sont d'ailleurs — comme il est facile de voir — suffisantes, ce qui implique la troisième proposition fondamentale du présent travail:

„La fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ étant supposée intégrable sur le contour du (T_H), les relations (10) expriment des conditions nécessaires et suffisantes, pour que l'intégrale (3) soit une fonction hyperharmonique à l'intérieur du (T_H)".

Remarque. On peut à l'aide de ce théorème facilement démontrer le théorème fondamentale du § 4$^{\text{me}}$ [1]).

§ 9. **Problème de Dirichlet dans le cas des fonctions hyperharmoniques.**

Prenons maintenant le problème de Dirichlet pour les fonctions hyperharmoniques, c'est à dire celui qu'on obtient du problème énoncé dans le § 2$^{\text{me}}$, en remplaçant les mots „doublement harmonique" par le mot „hyperharmonique".

---

[1]) On voit pour cela la première des notres notes, citées plus haut.

On voit immédiatement, que ce problème n'est pas en général possible, parceque la solution sera une fonction doublement harmonique, parfaitement détérminée, qui ne sera pas en général hyperharmonique.

Voici le théorème, qui donne la réponse complète:

„Pour que le problème de Dirichlet pour les fonctions hyperharmoniques soit possible, il faut et il suffit, qu'on ait

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \sin(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0\text{“}$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Remarque. En vertu du théorème, énoncé dans le § 6^{me} et des remarques faites plus haut, on peut facilement énoncer le théorème sur la possibilité du problème de Dirichlet pour les fonctions hyperharmoniques dans le cas, où les données sont définies sur toute la frontière du (T_H).

§ 10. **Étude des relations (10).** Ce dernier paragraphe est consacré à l'étude de la classe des fonctions $f(\theta_1, \theta_2)$, définies sur le contour du (T_H) et satisfaisantes aux relations (10). Dans cette étude nous nous bornerons aux fonctions développables en séries de Fourier uniformément convergentes.

Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ définie par la série

$$(11)\quad \begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} [\alpha_{rs} \cos r\theta_1 \cos s\theta_2 + \beta_{rs} \cos r\theta_1 \,.\, \sin s\theta_2 + \\ + \gamma_{rs} \sin r\theta_1 \cos s\theta_2 + \delta_{rs} \sin r\theta_1 \sin s\theta_2], \end{aligned}$$

dont nous supposons, qu'elle converge uniformément.

L'intégration de la série terme à terme étant legitime, on trouve facilement des relations

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = \pi^2(\alpha_{\varkappa, l} + \delta_{\varkappa, l})$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \sin(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = \pi^2(\gamma_{\varkappa l} - \beta_{\varkappa l})$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Pour qu'on ait donc les relations (10) satisfaites, il faut et il suffit, qu'on ait

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{\varkappa l} + \delta_{\varkappa l} = 0 \\ \beta_{\varkappa l} - \gamma_{\varkappa l} = 0 \end{aligned} \right. \qquad (\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Dans le même temps nous voyons, que les coefficients $\alpha_{\varkappa 0}$, α_{0l} sont entièrement arbitraires.

Les considérations précédentes nous montrent que pour r et s naturels, le polynome trigonométrique constituant un terme de la série (11) peut renfermer seulement deux constantes arbitraires et qu'il peut être mis sous la forme

$$\alpha_{r,s} \cos(r\theta_1, + s\theta_2) + \beta_{r,s} \,.\, \sin(r\theta_1, + s\theta_2).$$

Ceci implique la proposition suivante:

„Pour que la fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ définie sur le contour du (T_H) et développable en série (11) uniformément convergente satisfasse aux relations (10), il faut il suffit qu'elle soit de la forme

$$f(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta_1) + \varphi(\theta_2) + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} [\alpha_{rs} \cos(r\theta_1 + s\theta_2) + \beta_{rs} \sin(r\theta_1 + s\theta_2)]$$

où les fonctions $\varphi(\theta_1)$ et $\varphi(\theta_2)$ sont arbitraires, assujetties seulement à la condition d'être développables en séries de Fourier uniformément convergentes et où les constantes α_{rs}, β_{rs} sont entièrement arbitraires".