Sur les géométries de Cayley et sur une géométrie plane particulière.

Par

Stefan Glass (Wilno).

Introduction.

L'idée de Cayley de rattacher la métrique de Lobatschewski à une courbe invariable de second degré, a conduit F. Klein[1]) à une classification rationnelle des géométries planes de Cayley, c'est à dire des géométries dont les mouvements laissent invariable l'absolu — courbe de second degré, dégénérée ou non. Cette classification, qui est tout simplement la classification des formes que peut prendre l'absolu, permet de saisir immédiatement les rapports qui existent entre les différentes géométries. On remarque que la place occupée par la géométrie d'Euclide n'a rien de particulier. Cette clasification contient tous les types des géométries planes au sens de Riemann, s'il s'agit de petites portions du plan, car sur une telle portion a lieu approximativement une des géométries de Cayley.

J'exposerai dans ce qui suit:

1) la classification des géométries planes de Cayley;

2) la construction et la démonstration des théorèmes les plus importants de la plus simple des géométries, qui est la dégénérescence de toutes les autres, y compris celle d'Euclide. Je l'appelle la géométrie G. Elle a été mentionnée par M. E. Borel[2]) et M. H. Beck[3]) s'en est occupé.

---

[1]) F. Klein. „Nichteuklidische Geometrie". Goettingen 1893.

[2]) E. Borel. „Introduction géométrique à quelques théories physiques". Paris 1914, voir page 38.

[3]) Ce n'est qu'après avoir écrit le présent travail que j'ai eu connaissance du mémoire de M. H. Beck: „Zur Geometrie auf der Minimalebene". (Sitzungs-

Je termine par quelques remarques ayant trait à la physique et à la philosophie. Au commencement je passe en revue les notions fondamentales des géométries de Cayley en insistant sur le principe de dualité.

Introduction de la métrique sur le plan projectif tout entier.

Nous prendrons comme point de départ le plan projectif réel (plan de la géométrie euclidienne avec la droite à l'infini) que nous appellerons plan tout court et nous introduirons la métrique sur ce plan tout entier. Nous définissons les points x et les droites v à l'aide des coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3), (v_1, v_2, v_3). Les rapports entre les deux catégories des éléments du plan est le suivant: si $\sum_{i=1}^{3} x_i v_i = 0$, alors on dit que le point x est situé sur la droite v, ou que la droite v passe par le point x. Vu l'identité des définitions on peut transposer dans les théorèmes les mots: point, droite. Deux points d'une droite divisent les autres points de la droite en deux classes appelées segments. De même deux droites déterminent deux angles.

Considérons une conique non dégénérée. Nous la définirons dès le commencement d'une manière duale: comme lieu de ses points: $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$, $(i, k = 1, 2, 3)$ et comme enveloppe de ses tangentes: $\sum_{i,k} A_{ik} v_i v_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Les coefficients a_{ik} sont réels, le déterminant $|a_{ik}| = \Delta \neq 0$, A_{ik} est le complément algébrique de a_{ik} divisé par Δ. Considérons les collinéations (transformations linéaires) laissant invariable cette conique, appelée absolu. On dit que ces collinéations appartiennent à l'absolu. Le dualisme dans les définitions de l'absolu est important, puisque la même courbe peut dégénérer de façons différentes, suivant qu'on la considère comme lieu de points ou comme enveloppe de droites (par conséquent les propriétes des segments peuvent devenir différentes des propriétés des angles, si l'on envisage une géométrie à l'absolu dégénéré).

Une collinéation appartenant à l'absolu s'appelle mouvement,

---

ber. d. Berl. Math. Ges. 12. pages 14—30). L'auteur y considère la géométrie sur un plan minimal de l'espace euclidien. Elle est identique à la géométrie G. Le mémoire de M. Beck traite donc un des sujets du travail présent. Cependant il y a des différences de méthode et de développements ulterieurs.

si l'on peut passer d'elle à la collinéation - identité par une série continue de collinéations appartenant à l'absolu.

La conique-absolu est réelle ou imaginaire, suivant qu'elle a ou non des points (droites) réels. Les coniques réelles d'une part et les coniques imaginaires de l'autre, ainsi que les groupes de mouvements qui leur appartiennent, sont toutes semblables entre elles par rapport au groupe des collinéations aux coefficients réels. On a donc deux sortes de géométries, définies par l'absolu non dégénéré: la géométrie de Riemann (géométrie R) à l'absolu imaginaire, et la géométrie de Lobatschewski-Poincaré (géométrie L-P) à l'absolu réel [1]).

On dit qu'un point réel en dehors de l'absolu est elliptique, hyperbolique ou parabolique, suivant que les deux droites passant par ce point et appartenant à l'absolu (tangentes à la conique absolu) sont imaginaires (conjuguées), réelles et différentes ou qu'elles se confondent (et sont nécessairement réelles). On définit d'une façon analogue les trois espèces de droites. Dans la géométrie R, on n'a que des éléments elliptiques; dans la géométrie L-P des éléments elliptiques et hyperboliques; les éléments paraboliques n'apparaissent que dans les géométries à l'absolu dégénéré.

Deux éléments de la même catégorie en dehors de l'absolu sont parallèles, si l'élément de l'autre catégorie qu'elles déterminent appartient à l'absolu.

Parmi les élements réels le parallélisme ne peut avoir lieu pour des éléments elliptiques.

Rappelons maintenant comment on introduit la métrique. Considérons une géométrie particulière définie par l'absolu α. Prenons deux éléments en dehors de l'absolu, de la même catégorie, de la même espèce, non parallèles, p. ex. deux points A, A'. Ces points déterminent une droite a et sur elle deux segments. La droite coupe l'absolu en deux points différents B, B'. Suivant que B, B' sont réels ou imaginaires, a est hyperbolique ou elliptique. Considérons le premier cas. On entend par segment AA' le segment ne contenant pas

---

[1]) La géométrie esquissée par Poincaré dans son mémoire: „Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie“ (Bulletin de la Soc. Math. de France, 1888) c'est la géométrie à l'extérieur de la conique-absolu, la géométrie de Lobatschewski, c'est la géométrie à l'intérieur de cette conique. Si l'on considère le plan projectif comme un tout, sur lequel l'absolu détermine la métrique, il faut regarder ces deux géométries comme parties d'une seule.

B, B' et par sa longueur $\overline{AA'}$ le produit de la valeur réelle du logarithme du birapport $(AA'BB')$ des points A, A', B, B' par une constante c, choisie une fois pour toutes, pour la géométrie que l'on considère. On procède d'une manière analogue dans le second cas, pour définir les longueurs des deux segments AA' de la droite elliptique. On choisit alors les valeurs de logarithme du birapport satisfaisant à la condition: la somme des modules des longueurs des deux segments AA' est égale à 2π multipliés par le module de c. Si ces longueurs sont égales, on dit que les points A, A' sont perpendiculaires. La longueur ainsi définie est un invariant par rapport aux mouvements et l'on a en outre pour trois points alignés:

$$\overline{AA''} = \overline{AA'} + \overline{A'A''}.$$

Pour obtenir par dégénérescence des valeurs réelles pour les longueurs dans la géométrie d'Euclide, nous prendrons c purement imaginaire dans la géométrie R (ce qui fait que les longueurs sont réelles) et c réel dans la géométrie L-P (donc les longueurs des droites hyperboliques sont réelles). Nous obtenons ainsi dans la géométrie L-P des valeurs purement imaginaires pour les longueurs des segments elliptiques (segments des droites elliptiques), mais le rapport des deux nombres de cette espèce étant réel, on peut bien comparer ces longueurs entre elles. Cependant on ne peut pas donner un sens à la comparaison des longueurs de deux segments dont l'un est elliptique et l'autre hyperbolique, mais il n'y a pas non plus de mouvement qui transporte l'un de ces segments sur l'autre. La longueur d'une droite elliptique est $2\pi i c$.

Nous définissons d'une manière analogue la grandeur des angles et nous introduisons une nouvelle constante c', analogue à c, que pour des raisons semblables nous choisissons purement imaginaire.

Il y a une infinité de géométries L-P et R et chacune d'elles est caractérisée par les paramètres $-\frac{1}{4c^2}, -\frac{1}{4c'^2}$ dont le premier s'appelle courbure.

Faisons maintenant dégénérer l'absolu considéré comme ensemble de points p. ex. en une droite (double) et considéré comme ensemble de droites en deux faisceaux aux centres imaginaires. Pour que les longueurs ne deviennent pas toujours égales à zéro, c doit tendre à l'infini, c' restant arbitraire. D o n c i l y a u n e infinité de géométries euclidiennes. Quand enfin les centres des faisceaux mentionnés ci-dessus convergent vers un seul point (réel), alors c' doit aussi devenir infini pour que les angles ne deviennent pas tous nuls.

Je vais esquisser la métrique pour l'absolu dégénéré en prenant comme exemple la géométrie d'Euclide. Comme définition de la longueur nous prenons la limite de l'expression $c \,.\, \lg (AA' \, BB')$ mentionnée ci-dessus. La définition de l'angle ne change pas. Si l'on prenait comme mouvements les collinéations (formant un groupe G) qui laissent invariable l'absolu (avec la restriction de la page 21—22, relative aux mouvements), on verrait que la longueur n'est pas un invariant. Donc nous appellerons mouvements des collinéations (avec la même restriction) qui laissent invariable la longueur et l'angle. On peut obtenir ces mouvements comme dégénérescence de mouvements appartenant à un absolu qui dégénère. Elles forment un sous-groupe du groupe G. Les autres collinéations de G sont des similitudes.

Si l'on ne peut pas définir la mesure pour des „parties" (segments ou angles) des éléments d'une catégorie comme le produit d'une constante par le logarithme du birapport (p. ex. pour les segments de droites dans la géométrie d'Euclide), alors on dit que cette mesure est relative. Cela a lieu, si l'absolu, considéré comme lieu des éléments de l'autre catégorie, est doublement dégénéré (p. ex. la double droite ponctuée „à l'infini" dans la géométrie d'Euclide). Dans le cas contraire on dit que la mesure est absolue (p. ex. les angles dans la géométrie d'Euclide dont l'absolu, considéré comme formé de droites, se compose de deux faisceaux dont les centres sont les points „cycliques").

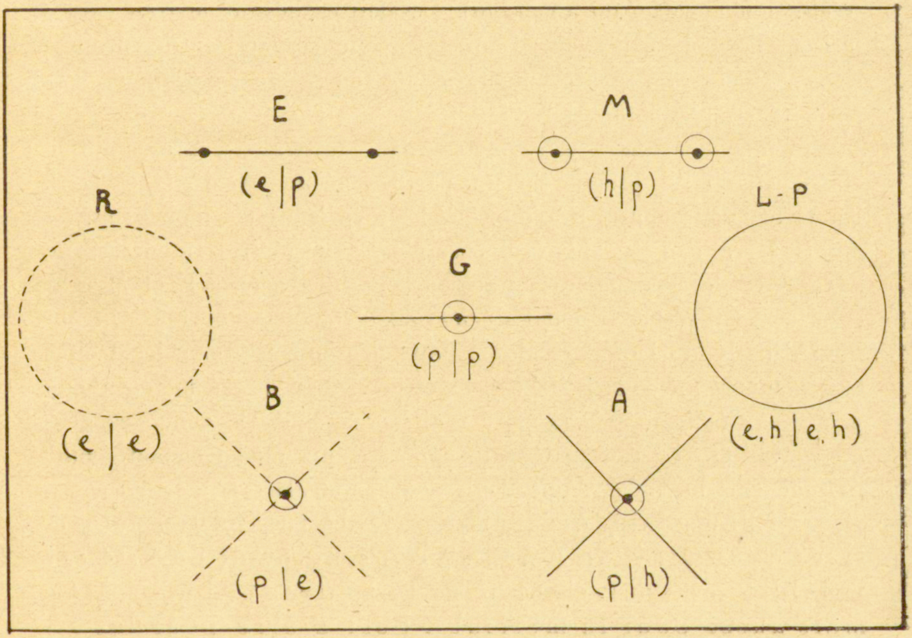
Considérons deux points d'une droite qui coupe l'absolu en deux points réels (différents ou se confondant entre eux). Si un de ces points reste fixe et l'autre tend vers un point de l'absolu, alors la longueur du segment tend vers l'infini. Cette remarque et une remarque analogue pour les angles conduisent à appeler infini, ce qui est réel dans l'absolu.

Classification des géométries.

Chaque géométrie est désignée par une majuscule et par un dessin symbolisant son absolu. R — Riemann, L-P — Lobatschewski-

Poincaré, E — Euclide, M — Minkowski[1]), B — Blaschke[2]), G — Galilée, A désigne une géométrie peu intéressante.

Voilà le sens des symboles: signifie une conique non dégénérée, réelle, une conique non dégénérée imaginaire, une droite réelle, une droite imaginaire, un point réel, · un point imaginaire. On voit p. ex. que l'absolu de la



géométrie B, si on le considère comme ensemble de points, est formé par deux droites ponctuées imaginaires; si on le considère comme ensemble de droites, il est formé par un faisceau réel (double). Le dessin symbolique fait voir immédiatement les propriétés fondamen-

---

[1]) Minkowski. »Raum und Zeit". Leipzig 1909.

[2]) W. Blaschke. „Euklidische Kinematik u. nichteuklidische Geometrie". Zeitschrift f. Math. u. Physik. Bd. 60, page 61. M. Blaschke considère une géométrie à 3 dimensions. Sur les plans réels qui coupent l'absolu de cette géométrie suivant deux droites (imaginaires) a lieu la géométrie B.

tales de la géométrie considérée. Prenons p. ex.  . Comme l'absolu — n'est pas complètement dégénéré dans le cas considéré (deux droites et non une droite double), on a la mesure absolue pour les segments. Comme il est imaginaire, cette mesure est limitée — la droite a une longueur finie. Considérons cet absolu comme ensemble de droites. Comme il est réel (faisceau double, donc réel), on a des angles aussi grands que l'on veut. Comme la dégénération de l'absolu est complète, la mesure des angles est relative

Enfin les minuscules caractérisent les éléments dans le fini (réels, non appartenant à l'absolu). Les lettres devant le trait caractérisent les points, les lettres après le trait caractérisent les droites; *e*, *h*, *p* signifient respectivement: points (ou droites) elliptiques, hyperboliques, paraboliques

On a deux axes de symétrie dans le dessin représentant la classification. Le premier passe par les géométries R, G et L-P. En transposant dans les axiomes et les théorèmes les mots droite — point et segment — angle on permute les géométries au-dessus de l'axe avec les géométries au-dessous. Les géométries E et M sont dans ce sens respectivement duales aux géométries B et A. On obtient l'absolu de l'une de l'absolu de l'autre en substituant les droites aux points et vice versa. Une géométrie change en géométrie duale p. ex. par polarité par rapport à un cercle fixe. Chacune des géométries R, G, L-P est duale par rapport à elle même ou autoduale, puisque l'absolu de chacune d'elles est autodual.

Si l'on considère l'ensemble de toutes les géométries de Cayley, on voit que le principe de dualité est valable non seulement pour les points et les droites, mais aussi pour la métrique, c'est-à-dire pour les segments et les angles.

L'autre axe de symétrie, perpendiculaire au précédent, passe par la géométrie G. Ce qui est imaginaire dans l'absolu dans une géométrie à gauche de cet axe, est réel dans la géométrie à droite, symétrique à celle-ci.

En ne considérant que des élements dans le fini, on dira que deux points sont parallèles, s'il n'existe pas de droite passant par ces deux points. Alors on peut formuler le postulat des parallèles pour les points de la manière suivante:

Il existe sur une droite arbitraire qui ne passe pas par un point donné, un et un seul point parallèle au point donné.

On exprime d'une manière analogue l'axiome des parallèles pour les droites.

Les géométries situées le plus loin du centre. à l'absolu non dégénéré: R et L-P ne possèdent pas de postulat de parallèles. Chacune des géométries intermédiaires, à l'absolu non entièrement dégénéré; possède un postulat de parallèles: E et M pour les droites, B et A pour les points. La géométrie G en possède deux: pour les droites et pour les points.

Géométrie de Galilée.

La géométrie de Galilée est la dégénérescence complète de toute autre géométrie de Cayley. Nous l'obtiendrons comme dégénérescence de la géométrie d'Euclide. Pour passer de E à G il faut que les „points cycliques" se confondent. Nous y parviendrons en „étirant" infiniment le plan euclidien dans une direction fixe. Prenons un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et étirons le plan dans la direction de l'axe des x par la collinéation:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= y \end{aligned}, \qquad a \to \infty$$

La droite à l'infini reste immobile, les „droites minimales" passant par l'origine c. à d. $y = \pm ix$ changent en $y' = \pm \frac{i}{a} x$, donc à la limite pour $a = \infty$ elles se confondent, devenant l'axe des x; donc les points cycliques se confondent en devenant le point à l'infini sur l'axe des x. Nous obtenons l'absolu de G de l'absolu de E et notre système de coordonnées est choisi de façon que l'absolu de G, considéré comme ensemble de points, soit la droite à l'infini, et considéré comme ensemble de droites, soit le faisceau de droites parallèles à l'axe des x.

Ayant trouvé les dégénérescences des mouvements euclidiens et les dégénérescences des grandeurs euclidiennes suivantes: distance, angle et surface, nous vérifierons que les dégénérescences de ces grandeurs, ainsi que la droite à l'infini et le faisceau de parallèles à l'axe des x, sont des invariants pour les dégénérescences de mouvements. Ainsi nous aurons démontré l'existence de la géométrie G et les dégénérescences obtenues en seront les mouvements et les mesures.

Pour obtenir des rotations après l'étirement, il faut substituer dans les formules de rotation eclidienne d'angle $-\alpha$

$$X = x\cos\alpha + \sin\alpha$$
$$Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

les coordounées x', y' des formules (1). On obtient

(2)
$$X' = x'\cos\alpha + y'a\sin\alpha$$
$$Y' = -x'\frac{\sin\alpha}{a} + y'\cos\alpha$$

Faisons tendre α vers 0, tandis que a tend vers ∞ de façon que $a\sin\alpha$ tende vers une limite finie k. (2) donnent alors à la limite:

(3)
$$X = x + ky$$
$$Y = y$$

C'est la formule de rotation dégénérée.

Les formules de translation euclidienne:

$$X = x + \gamma$$
$$Y = y + \beta$$

donnent après l'étirement:

$$X' = x' + a\gamma$$
$$Y' = y' + \beta$$

Quand γ tend vers 0 de façon que $a\gamma$ tende vers une limite finie α, on obtient à la limite:

(4)
$$X' = x + \alpha$$
$$Y' = y + \beta$$

La formule de translation reste donc la même. La formule de la distance de deux points (x_1, y_1), $(x_2, 4_2)$ est $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Elle donne après l'étirement $\sqrt{\left(\frac{x_1' - x_2'}{a}\right)^2 + (y_1' - y_2')^2}$ et à la limite:

(5)
$$\delta = y_1 - y_2$$

Telle est la dégénérescence de la distance. L'angle entre l'axe des y et la droite $y = mx$ est $\operatorname{arctg}\frac{1}{m} = \operatorname{artg}\frac{x}{y}$. Après l'étirement nous en obtenons $\operatorname{arctg}\frac{x'}{ay'} = \operatorname{arctg}\frac{1}{am'}$. En multipliant par a nous obtenos à la limite $\lim\limits_{a=\infty} a \operatorname{arctg} \frac{1}{am} = \frac{1}{m} = \frac{x}{y}$. C'est la dégénérescence de l'angle entre l'axe des y et la droite au coefficient angulaire m. Donc la dégénérescence de l'angle entre deux droites aux coefficients angulaires m, m' sera:

$$(6) \qquad \Delta = \frac{1}{m} - \frac{1}{m'}$$

Nous trouvons d'une manière analogue l'expression pour la dégénérescence P de la surface du parallélogramme aux sommets $(x_1\, y_1)$, (x_2, y_1), $(x_2\, y_2)$, (x_1, y_2).

$$(7) \qquad P = (x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2)$$

On vérifie avec la plus grande facilité que les dégénérescences définies par les formules (5), (6), (7) sont des invariants pour les transformations (3) et (4) et qu'elles possèdent la propriété additive. On voit immédiatement que la droite à l'infini et le faisceau de droites parallèles à l'axe des x sont changés en eux-mêmes par les transformations (3) et (4). Donc l'existence de la géométrie G est démontrée. La direction de l'axe des y n'est pas invariable pour la transformation (3). Dans un système d'axes oblique, où l'axe des x appartient au faisceau de droites-absolu et l'axe des y a une direction arbitraire, (3) et (4) représentent des mouvements de la géométrie G, (5), (6), (7) sont les expressions de la distance de l'angle et de la surface.

Il est facile de voir que le mouvement le plus général, laissant invariable la distance (5) et l'angle (6) est une combinaison des mouvements (3) et (4). En effet, comme la droite à l'infini doit changer en elle même, on n'a qu'à considérer des collinéations entières. La longueur doit rester invariable, donc

$$(8) \qquad Y_1 - Y_2 = y_1 - y_2$$

Soit $Y = ax + by + c$ la transformation de l'y. En substituant cette expression dans (8) on obtient $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = y_1 - y_2$, d'où $a = 0$, $b = 1$. Donc, dans un mouvement, la transformation de Y est $Y = y + c$.

Les droites $X = Ay + B$, $X = A_1 y + B_1$ forment l'angle $A - A_1$. Appliquons le mouvement $x = aX + bY + c$, $y = Y + d$; les droites deviennent:

$$\begin{aligned} aX+bY+c &= AY+\dots \\ aX+bY+c &= A_1Y+\dots \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} X &= \frac{A-b}{a}Y+\dots \\ X &= \frac{A_1-b}{a}Y+\dots \end{aligned}$$

vu l'invariabilité de l'angle on doit avoir $\frac{A-b}{a}-\frac{A_1-b}{a}=A-A_1$ d'où $a=1$. Donc le mouvement le plus général de G est

$$(9) \qquad \begin{aligned} X &= x+ky+\alpha \\ Y &= y+\beta \end{aligned}$$

On l'obtient en exécutant la rotation (3) suivie de la translation (4). Chacune des paraboles appartenant au faisceau à l'axe parallèle au faisceau de droites absolues

$$(10) \qquad x=\frac{k}{2\beta}y^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{k}{2}\right)y+c \qquad (c \text{ arbitraire})$$

est changée en elle-même par le mouvement (9). Ces paraboles jouent ici le rôle des cercles.

Un faisceau de droites a ici la métrique identique à la métrique sur une droite: les distances et les angles peuvent être arbitrairement grands, chaque droite contient un point *inaccessible* dans lequel un autre point de la droite ne peut être transporté par un mouvement; dans chaque faisceau existe une droite *inaccessible* (dans notre système de coordonnées — une droite parallèle à l'axe des x).

Si l'on prend un point accessible et une droite accessible ne le contenant pas, allors il existe sur cette droite un seul point accessible tel qu'avec le point donné il ne détermine aucune droite accessible (dans notre système de coordonnées c'est le point où la parallèle à l'axe des x passant par le point donné coupe la droite donnée). Deux points (droites) accessibles ne déterminant aucune droite (aucun point) accessible, sont dits *parallèles*.

Comme les mouvements s'expriment par des formules linéaires, entières en x, y, on a pour les droites l'axiome de parallèles. On a pareillement un axiome de parallèles pour les points.

La rotation (3) laisse immobile tout point de l'axe des x, chaque point d'une droite inaccessible est transporté en un point parallèle, et la grandeur de cette translation est proportionnelle à la distance de ce point de l'axe des x.

Une rotation euclidienne autour de l'origine (0, 0) laisse invariable le cercle au centre (0, 0). Après la transformation (2) on a à la place du cercle l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = r^2$ qui, à la limite, se divise en deux droites $y = \pm r$; ce couple de droites peut donc être regardé comme „cercle" pour la rotation (3). Son centre est situé en un point arbitraire de l'axe des x. Ce „cercle" est le lieu de points équidistants d'un point arbitraire de l'axe des x. C'est une dégénérescence du cercle général (10).

Comment caractériser un couple de droites parallèles indépendamment du système de coordonnées? S'il s'agit de droites inaccessibles, il suffit de prendre la distance de deux points arbitraires

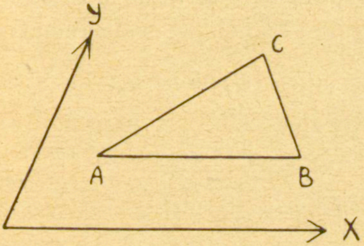


Fig. 1.

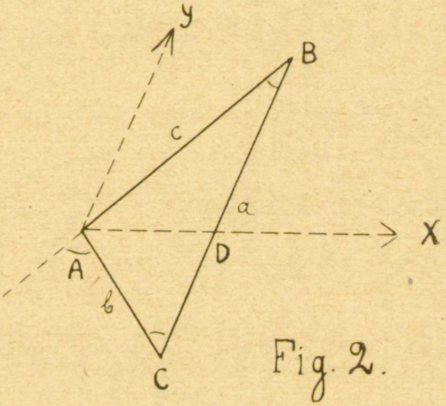


Fig. 2.

situés sur deux droites différentes. S'il s'agit de droites accessibles a, a', on prend deux points parallèles A, A', situés l'un sur a, l'autre sur a', on conduit par ces points deux droites, se coupant au point B sous un angle égal à l'unité. La longueur $AB = A'B$ ne change pas, si on transporte le couple de droites, donc elle le caractérise.

On caractérise d'une façon analogue les points parallèles. Vu la dégénération complète de l'absolu, la notion de perpendicularité n'existe ni pour les points ni pour les droites.

En définissant la longueur d'une courbe comme limite d'une ligne brisée inscrite, on voit que d'après (5) la longueur de la courbe sans points parallèles est égale à la longueur du segment de droite qui joint les points extrêmes de la courbe (ceci rappelle la notion du temps newtonien).

Un triangle peut être impropre ou propre selon q'il a ou non deux sommets parallèles. Dans un triangle impropre (fig. 1), le côté joignant les sommets parallèles A, B a la longueur 0, les angles en $A\ B$ sont infinis, les autres côtés sont égaux.

Un triangle propre, ou triangle tout court, a un angle (p. ex. en A, fig. 2) infiniment grand. Nous appellerons angle du triangle l'angle fini qui est adjacent au précédent. Le côté le plus grand (respectivement l'angle le plus grand) d'un triangle est égal à la somme des deux autres. Cherchons à exprimer la surface du triangle indépendamment des coordonnées. Désignons ses angles par A, B, C, ses côtés par a, b, c. Soit A le plus grand des angles. Alors $A=B+C$, $a=b+c$. Prenons la droite inaccessible passant par A comme l'axe des x, la parallèle par A au côté a comme l'axe des y. Soit D le point d'intersection de l'axe des x avec le côté a, t son abscisse. Pour la surface P de ABD, la formule (7) donne évidemment: $P_{ABD}=\frac{t.c}{2}$. La formule (6) donne $C=\frac{t}{b}$ ou $t=Cb$, donc $P_{ABD}=\frac{Cbc}{2}$.

On obtient d'une façon analogue: $P_{ACD}=\frac{Bcb}{2}$, donc $P_{ABC}=P_{ABD}+$ $+P_{ACD}=\frac{(B+C)b.c}{2}=\frac{Abc}{2}$. De $t=Cb=Bc$ il suit:

$$\frac{C}{c}=\frac{B}{b}=\frac{C+B}{c+b}=\frac{A}{a}. \tag{11}$$

On a donc pour la surface du triangle les formules:

$$P_{ABC}=\frac{Abc}{2}=\frac{Bca}{2}=\frac{Cab}{2}. \tag{12}$$

La surface du triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés par l'angle fini qu'ils contiennent.

Dans les formules des géométries non dégénérées exprimant les rapports entre angles et côtés du triangle, les côtés et les angles sont des arguments de fonctions transcendantes. Dans une géométrie semi-dégénérée (comme p. ex. E) une catégorie des élements (les côtés dans E) sort pour ainsi dire de la fonction transcendante. Dans la géométrie G, complètement dégénérée, toutes les formules sont élémentaires: il n'y a que des opérations arithmétiques. On peut dire que, ainsi que E est la géométrie dans le voisinage d'un point de R, G est la géométrie dans le voisinage d'une droite de E ou géométrie dans une bande euclidienne infiniment mince. La trigonométrie de E donne les formules de G, en remplaçant $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ par x et $\cos x$ par 1. P. ex. (11) est la dégénérescence du théoreme des sinus, (12) donne la surface d'un triangle euclidien dont deux angles sont infiniment petits etc.

Disons quelques mots sur les similitudes en G. La transformation $x' = ax$, $y' = ay$ ne change pas les angles, les côtés sont changés en segments proportionnels. La transformation $x' = bx$, $y' = y$ produit un effet contraire: les côtés ne changent pas, les angles sont changés en angles proportionnels. La similitude générale

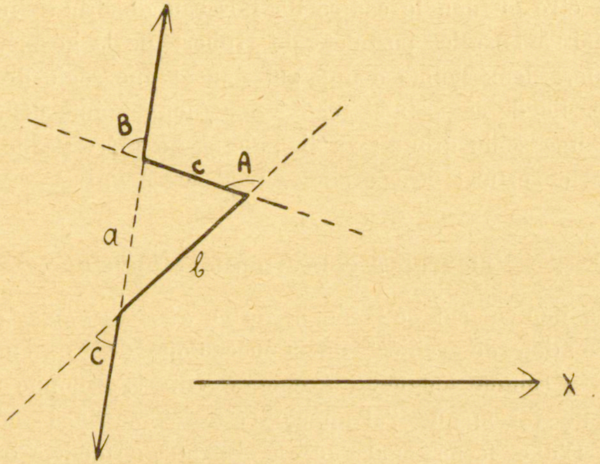


Fig. 3.

change un triangle aux éléments A, b, c, en un triangle aux éléments nA, mb, mc. Ces deux triangles ont pour les côtés le coefficient de proportionnalité m, pour les angles le coefficient n.

Il n'y a dualité ni dans la forme du triangle ni dans la formule exprimant sa surface. Il faut compléter le triangle par une figure duale qui existe dans la géométrie B, duale par rapport à E.

Ce „triangle dual" (fig. 3, dessiné à plein trait), a trois angles finis A, B, C, deux côtés finis et un côté infini. Convenons de prendre comme longueur de ce dernier la longueur du segment complémentaire. La surface du triangle pouvant être considérée comme mesure de l'ensemble des points à l'intérieur du triangle, la „surface duale" $\dfrac{ABc}{2}$ peut être considérée comme mesure de l'ensemble des droites qui coupent deux côtés d'un triangle dual. La surface duale a la propriété additive.

Trois points (ou droites) définissent un triangle ordinaire et un triangle dual. Le rapport de la surface duale à la surface du triangle $\frac{ABc}{abC} = \frac{A}{a}$ est égal au paramètre de la parabole à l'axe inaccessible (cercle de la géométrie G) qui passe par ces trois points. On a cinq espèces de courbes du second degré: l'ellipse, et deux espèces d'hyperboles et de paraboles, un point à l'infini sur la courbe pouvant être ou non le centre du faisceau de droites inaccessibles. G satisfait à tous les postulats de Hilbert de la géométrie E, sauf le premier: deux points définissent une et une seule droite. La seconde partie de ce postulat reste vraie (deux points définissent tout au plus une seule droite); au lieu de la première partie il faut introduire le postulat des parallèles pour les points.

Remarques concernant la physique.

Un mouvement de G de la forme $x' = x + ky$, $y' = y$ est „la transformation de Galilée" de la mécanique de Newton, si l'on interprète x comme longueur, k comme vitesse, y comme temps. C'est pour cette raison que j'ai appelé cette géométrie, la géométrie de Galilée. D'une façon analogue on obtient un modèle de l'„univers newtonien" — au sens de Minkowski — à trois dimensions, en considérant un espace dont l'absolu est formé par: un plan réel — ensemble de points, une droite de ce plan — ensemble de plans contenant cette droite, deux points imaginaires de cette droite — faisceaux de droites. Enfin le modèle de l'univers newtonien à quatre dimensions a pour absolu: un espace réel — ensemble de points, un plan réel de cet espace — ensemble d'espaces à trois dimensions, une conique imaginaire non dégénérée située sur le plan — ensemble de plans et de droites. En général l'absolu d'un espace riemannien à $n - 1$ dimensions appartient à l'absolu de l'espace euclidien à n dimensions et ce dernier est contenu dans l'absolu de l'univers newtonien à $n + 1$ dimensions. „Le moment présent" dans l'univers à quatre dimensions — l'espace existant à un certain moment — est un espace réel à trois dimensions contenant le plan réel-absolu. On peut construire dans cet espace trois axes de coordonnées de l'espace. L'axe du temps est une droite qui n'a qu'un point de commun avec cet espace à trois dimensions. Ainsi la notion du „même moment du temps pour deux points différents de l'espace", critiquée par les einsteiniens du point de vue de leur théorie de la connaissance, trouve une expression adéquate dans une géométrie à laquelle conduit la géométrie G, donc dans une géométrie qui, du point de vue de la logique, existe tout aussi bien qu'une autre.

Remarques philosophiques.

La classification rationnelle des géométries de Cayley fait voir que la géométrie E n'occupe point de place „privilégiée“ parmi les autres géométries: elle est une des quatre géométries „semi-dégénérées“ qui possèdent un postulat de parallèles. Sont distinguées de manière essentielle: la géométrie G — la plus simple de toutes et la géométrie R — sans l'infini, pour laquelle tous les éléments réels d'une catégorie sont équivalents entre eux, par rapport au groupe des mouvements.

Il paraît que malgré cela, pour tout homme sans parti pris, ce ne sont point ces géométries-là, mais c'est la géométrie d'Euclide — qui joue un rôle tout particulier. On la ressent comme quelque chose de naturel, les autres paraissent „contradictoires en elles-mêmes“. Comment expliquer ce fait?

Pour nous la géométrie d'Euclide n'est pas seulement un système de conséquences tirées de certains postulats, mais elle exprime ce qui correspond à nos représentations de la droite, du point, des segments égaux etc. Je ne pose pas la question de l'origine de ces représentations, je ne demande pas si elles sont innées ou acquises par l'expérience. Ce qui m'importe c'est de constater d'une manière certaine leur existence:

I. Précisément la sensation du „contradictoire“ chez un homme qui rencontre pour la première fois un théorème non-euclidien provient de ce qu'en entendant les paroles: droite, point etc. il les rapporte aux représentations euclidiennes et le théorème lui présente des rapports en contradiction avec ces représentations.

II. Il est vrai qu'on dit que: „du plan euclidien on passe au plan projectif en introduisant le groupe de toutes les collinéations, et qu'en y choisissant un sous-groupe différent du groupe des mouvements euclidiens, on obtient une nouvelle géométrie“, — mais notre imagination est incapable de suivre ce procès. Les mouvements non-euclidiens sont pour nous des déformations des longueurs et des angles, puisque toujours, d'une manière plus ou moins consciente, nous nous imaginons ces mouvements sur un „fond euclidien“. Chaque „réalisation imaginable“ des géométries non-euclidiennes, comme celles de Beltrami, de Poincaré etc., est une réalisation à l'aide de la géométrie euclidienne.

III. Celui qui prétend pouvoir se représenter la géométrie non-euclidienne aussi bien que la géométrie euclidienne devrait essayer de s'imaginer que la somme des longueurs des côtés d'un triangle est une constante (géométrie B) ou que l'angle peut être arbitrairement grand (géométries G, B, M)! Le fait, en apparence étrange, que les géométries telles que A ou G, du point de vue formel plus simples que L-P ou R, sont restées inaperçues si longtemps, s'explique par la remarque qu'elles sont plus éloignées de nos représentations.

Nous arrivons à la conclusion que le mot géométrie comporte au moins une double signification: 1) descriptton de rapports correspondants à notre imagination, 2) système de conséquences tirées de postulats d'un certain caractère [1]). Dans le premier sens du mot il existe une seule géométrie — la géométrie euclidienne; la place „subalterne“ qu'elle occupe parmi les autres géométries formelles, fait voir que l'importance toute particulière qu'elle a pour nous est fondée sur des bases qui n'appartiennent pas au domaine des Mathématiques pures.

---

[1]) Je ne touche pas ici au problême des rapports entre la géométrie et la physique, c.-à-d. à la question de la structure qui convient au monde qu'explore le physicien.