Sur un groupe de transformations qui se présente en électrodynamique[1].

Par

S. Zaremba

Professeur à l'université de Cracovie.

Les équations qui subsistent entre des éléments qui ont une signification physique jouissent ordinairement de certaines propriétés d'invariance faciles à apercevoir avec sûreté a priori. D'autre part, des propriétés de ce genre bornent à elles seules, d'une façon considérable, la variété des hypothèses admissibles, en ce qui concerne la forme des équations correspondantes.

Par conséquent, dans la recherche des équations de la Physique, il serait peut être avantageux de commencer par tirer parti des propriétés d'invariance des équations demandées d'une façon plus systématique qu'on ne le fait d'ordinaire. C'est ce que je me propose de faire voir sur un exemple qui présente peut-être quelque intérêt.

Dans ce qui va suivre, j'adopterai la conception traditionnelle de l'espace-temps parce que, jusqu'à présent, on ne sait pas, comme je l'ai fait voir ailleurs[2], établir, d'une façon satisfaisante, une correspondance entre les valeurs numériques des grandeurs considérées dans la théorie de la relativité et des opérations de mesure.

1. Pour définir un champ électromagnétique *(C)*, dans le vide, il suffit de choisir un système de coordonnées déterminé *(S)* et de faire connaître deux vecteurs comme fonctions du temps t et des

---

[1]) Des circonstances imprévues ayant retardé considérablement la publication des C. R. du Congrès de Toronto, je publie ici la communication que j'avais faite à ce Congrès en y joignant une addition où je démontre quelques propositions qui n'ont pu être qu'énoncées dans le corps de la communication.

[2]) S. Zaremba. La théorie de la Relativité et les faits observés. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1922, p. 105.

coordonnées x_1, x_2, x_3 de l'origine de chacun d'eux; l'un de ces vecteurs, soit e, représentera alors la force électrique au point (x_1, x_2, x_3) à l'époque t, c'est-à-dire la force qui solliciterait à l'époque t un point matériel M chargé de l'unité d'électricité et situé au point (x_1, x_2, x_3); quant au second vecteur, soit m, il représentera la force magnétique au point et à l'époque considérées, c'est-à-dire la force qui solliciterait à l'époque t un pôle magnétique P, d'intensité égale à l'unité, situé au point (x_1, x_2, x_3). Les définitions précédentes impliquent que, par rapport au système de coordonnées (S) (que nous allons nous représenter comme un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires), les vitesses du point M et du pôle P sont nulles. Nous avons formulé les définitions considérées de façon à ce que la circonstance précédente se présente parce que la force dérivant du champ et sollicitant un point électrisé dépend en général non seulement de sa position à l'époque considérée, mais aussi de sa vitesse par rapport au système de coordonnées (S) et qu'il en est peut-être de même pour un pôle magnétique. Cela posé, il est indiqué de donner aux vecteurs e et m les noms de force électrique et force magnétique du champ (C) *relatives* au système de coordonnées (S); c'est ce que nous allons faire dorénavant.

Voici maintenant un problème qui se présente de lui-même: *Connaissant la force électrique e et la force magnétique m d'un champ électromagnétique (C) relatives à un système de coordonnés déterminé (S), déterminer les éléments analogues e' et m', relatifs à un système de coordonnées (S') qui se déplace d'une façon donnée par rapport au système (S).*

Je me propose d'étudier ce problème dans le cas particulier où le système (S') est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au système S.

2. Les notations précédentes étant conservées, désignons par, u la vitesse constante du système (S') par rapport au système (S). Nous admettrons ce qu'admettent d'une façon plus ou moins explicite tous les physiciens, à savoir que la solution de notre problème peut être représentée par l'ensemble des deux équations vectorielles suivantes:

$$(1) \qquad \begin{cases} e' = \varphi(e, m, u) \\ m' = \psi(e, m, u) \end{cases}$$

où φ et ψ représentent des caractéristiques qu'il s'agit de déterminer.

Désignons d'une façon générale par

$$e_i', m_i', e_i, m_i, u_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les projections orthogonales respectives des vecteurs e', m', e, m, et u sur l'axe de numéro i dans le système de coordonnées *(S)*. Chacune des équations vectorielles (1) se décomposera en trois équations scalaires de sorte, qu'en définitive, nous aurons le système suivant de six équations scalaires:

$$(2) \qquad \begin{cases} e_i' = \varphi_i(e_1, e_2, e_3, m_1, m_2, m_3, u_1, u_2, u_3) \\ m_i' = \psi_i(e_1, e_2, e_3, m_1, m_2, m_3, u_1, u_2, u_3) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Voici d'abord une proposition qui résulte immédiatement de la nature vectorielle des égalités (1):

(A) Si l'on désigne par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les projections orthogonales d'un vecteur quelconque sur les axes du système S, chacune des expressions:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{3} \xi_i \varphi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{3} \xi_i \psi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

représentera un invariant du groupe des rotations.

Pour aller plus loin, considérons un troisième système de coordonnées *(S'')* animé, par rapport au système *(S')*, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme avec une vitesse u'. Désignons par

$$e_i'', m_i'', u_i' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les projections orthogonales respectives sur l'axe de numéro i, dans le système *(S)*, des forces électrique e'' et magnétique m'' du champ *(C)*, relatives au système *(S'')*, ainsi que celle du vecteur u'. Pour obtenir les expressions des e_i'' et m_i'' en fonction des quantités

$$e_k', m_k', u_k' \qquad (k = 1, 2, 3)$$

il suffit évidemment de substituer, dans les équations (2), aux symboles:

$$e_i', m_i', e_i, m_i, u_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

respectivement les symboles

$$e_i'', m_i'', e_i', m_i', u_i'.$$

Nous aurons donc:

$$(5) \qquad \begin{cases} e_i'' = \varphi_i(e_1', \ldots, m_1', \ldots, u_1', \ldots) \\ m_i'' = \psi_i(e_1', \ldots, m_1', \ldots, u_1', \ldots) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Cherchons maintenant les expressions des e_i'' et m_i'' au moyen des quantités

$$e_i, m_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il y a deux manières d'obtenir les formules demandées:

1° On peut porter les valeurs (2) des e_i' et m_i' dans les formules (5).

2° Le système (S'') se déplaçant par rapport au système (S) avec une vitesse dont les projections orthogonales sur les axes de ce système ont les valeurs

$$u_i + u_i' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

on obtiendra encore les formules demandées en substituant, dans les formules (2), aux symboles

$$e_i', m_i', u_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les symboles

$$e_i'', m_i'', u_i + u_i' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ce qui donne:

$$\left.\begin{aligned} e_i'' &= \varphi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1 + u_1', \ldots) \\ m_i'' &= \psi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1 + u_1', \ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Evidemment, les deux procédés doivent conduire aux mêmes expressions des e_i'' et m_i''. Cela posé, on reconnaît sans peine que l'on a la proposition suivante:

(**B**) L'ensemble des formules (2) définit un groupe G de transformations ponctuelles bi-univoques à trois paramètres u_1, u_2, u_3 de l'espace arithmétique à 6 dimensions; dans ce groupe, les paramètres du produit de deux transformations sont toujours égaux aux sommes des paramètres homologues des facteurs.

Le groupe désigné par G dans l'énoncé précédent jouit encore évidemment de la propriété que voici:

(**C**) Le groupe G contient la transformation identique et cette transformation correspond aux valeurs nulles des paramètres.

3. Pour appliquer la méthode de Sophus Lie à la détermination des transformations du groupe G, il suffirait de connaître les fonctions.

$$\xi_{si} \text{ et } \eta_{si} \qquad (s, i = 1, 2, 3)$$

définies par les formules:

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi_{s\,i} = \left(\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial u_i}\right)_{u_1 = u_2 = u_3 = 0} \\ \eta_{s\,i} = \left(\dfrac{\partial \psi_s}{\partial u_i}\right)_{u_1 = u_2 = u_3 = 0.} \end{cases}$$

En effet, dans ce cas, les fonctions cherchées seraient définies sans ambiguité par les conditions suivantes:

1⁰ Chacune de ces fonctions devra être une intégrale commune du système jacobien:

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{s=1}^{3} \xi_{s\,i} \frac{\partial f}{\partial e_s} + \sum_{s=1}^{3} \eta_{s\,i} \frac{\partial f}{\partial m_s} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

2⁰ Pour

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

et en vertu de la proposition (**C**), les fonctions φ_s et ψ_s $(s = 1, 2, 3)$ devront se réduire respectivement à e_s et m_s.

Cherchons donc les expressions des $\xi_{s\,i}$ et des $\eta_{s\,i}$.

A cet effet posons:

$$(9) \qquad I = \sum_{s=1}^{3} \xi_s \varphi_s(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

Les formules (7) et (9) nous donneront alors:

$$(10) \qquad \xi_{s\,i} = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi_s \, \partial u_i}\right)_{u_1 = u_2 = u_3 = 0} \qquad (s, i = 1, 2, 3).$$

Pour aller plus loin, adoptons la convention suivante: un symbole de la forme F_i étant défini seulement pour les valeurs 1, 2 et 3 de l'indice i, nous considérerons le symbole F_k, où k représente un entier quelconque, comme défini par la formule:

$$F_k = F_i$$

où i représente l'entier déterminé par l'ensemble des relations

$$i \equiv k \qquad (\text{mod. } 3)$$
$$1 \leqq i \leqq 3$$

Posons maintenant

$$(11) \qquad n_i = e_{i+1}\,,\ m_{i+2} - e_{i+2},\ m_{i+1} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La fonction I, définie par la formule (9), étant, en vertu de la proposition (**A**), un invariant du groupe des rotations, il résulte des formules (10) que les ξ_{ik} sont les composantes d'un tenseur du 2-e degré. Cela posé, on trouve:

(12) $$\xi_{si} = e_s f_1(i) + m_s f_2(i) + n_s f_3(i)$$

en posant

(13) $$f_k(i) = p_{k1} e_i + p_{k2} m_i + p_{k3} n_i \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

où les p'_{kt} sont des invariants du groupe des rotations, fonctions des seules variables e_i et m_i, $(i = 1, 2, 3)$. Cela posé, j'observe que les fonctions α_i $(i = 1, 2, 3)$ définies par les formules

(14) $$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{3} e_k^2, \; \alpha_2 = \sum_{k=1}^{3} m_k^2, \; \alpha_3 = \sum_{k=1}^{3} e_k m_k$$

constituent un système complet d'invariants indépendants des variables e_k et m_k par rapport au groupe des rotations. Il résulte de là que les p_{kt} pourront être regardés comme fonctions des seules variables α.

D'une façon tout à fait analogue on trouve:

(15) $$\eta_{si} = e_s \varphi_1(i) + m_s \varphi_2(i) + n_s \varphi_3(i),$$

en posant

(16) $$\varphi_k(i) = q_{k1}, e_i + q_{k2}, m_i + q_{k3} n_i$$

où les q représentent des fonctions des seules variables α.

Pour résoudre notre problème dans toute sa généralité, il faudrait déterminer d'abord, de la façon la plus générale, les p et les q par la condition que le système (8) soit un système jacobien, ce qui exigerait l'intégration d'un système compliqué d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, et passer ensuite à l'intégration du système (8) lui-même. Toutefois, le problème se simplifie beaucoup quand on veut se borner au degré de généralité qui semble suffisant au point de vue de la physique.

En effet, d'après les hypothèses généralement admises, la différence

$$e' - e$$

où e' est défini par la première des formules (1), représente un vecteur perpendiculaire à la vitesse u. D'autre part, il semble naturel d'admettre qu'il en est de même du vecteur:

$$m' - m.$$

Or, les hypothèses précédentes étant adoptées, on trouve que l'on a

(17) $$\xi_{ik} + \xi_{ki} = 0, \ \eta_{ik} + \eta_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Posons

(17,₁) $$\lambda_i(f) = \sum_{s=1}^{3} \xi_{s,i} \frac{\partial f}{\partial e_s} + \sum_{s=1}^{3} \eta_{s,i} \frac{\partial f}{\partial m_s}.$$

En vertu des équations (17) les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (8) soit un système jacobien prendront la forme suivante:

(18) $$\lambda_i(\xi_{s,k}) = \lambda_i(\eta_{s,k}) = 0 \qquad (i, k, s = 1, 2, 3).$$

Il résulte immédiatement de là que les formules (2) s'écriront comme il suit:

(19) $$\begin{cases} e'_i = \sum_{k=1}^{3} \xi_{ik} u_k + e_i \\ m'_i = \sum_{k=1}^{3} \eta_{ik} u_k + m_i \end{cases}.$$

En effet, à cause des équations (18) les valeurs (19) des e' et des m', seront des intégrales communes des équations (8). D'autre part, pour

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

les formules (18) donnent

$$e'_i = e_i, \ m'_i = m_i$$

et cela achève de prouver que les formules (18) sont bien les formules cherchées.

4. D'après ce qui précède, le problème se ramène à la détermination des ξ_{ik} et des η_{ik}.

Les conditions (17) donnent:

(19,₁) $$\begin{cases} p_{i,i} = q_{i,i} = 0 \\ p_{i,i+1} + p_{i+1,i} = 0 \\ q_{i,i+1} = q_{i+1,i} = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et, en définitive, on trouve que les formules (12) et (15) peuvent être ramenées à la forme suivante:

(20) $$\begin{cases} \xi_{i,i} = \eta_{ii} = 0 \\ -\xi_{i+1,i} = \xi_{i,i+1} = p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2} \\ -\eta_{i+1,i} = \eta_{i,i+1} = q_1 e_{i+2} + q_2 m_{i+2} + q_3 n_{i+2} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où les p_k et les q_k ($k = 1, 2, 3$) représentent des fonctions des seules variables α_1, α_2, α_3, variables définies par les formules (14). Les équations qui déterminent ces fonctions s'obtiennent en développant les conditions (18). Pour écrire les équations précédentes, posons

$$
(21) \quad \left\{ \begin{array}{c}
\Delta = \alpha_1, \ \alpha_2 - \alpha_3^2, \\
M = q_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_3, \\
A = p_2(p_1 + q_2), \ B = p_1^2 + p_2 q_1, \ A' = q_1(p_1 + q_2), \\
B' = q_2^2 + p_2 q_1,
\end{array} \right.
$$

et définissons trois opérateurs différentiels μ_1, μ_2 et μ_3 par les formules:

$$
(22) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\mu_1 = -2p_3\alpha_3 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} - 2q_3\alpha_2 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} - (p_3\alpha_2 + q_3\alpha_3)\dfrac{\partial}{\partial \alpha_3} \\
\mu_2 = \quad 2p_3\alpha_3 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2q_3\alpha_3 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + (p_3\alpha_3 + q_3\alpha_1)\dfrac{\partial}{\partial \alpha_3} \\
\mu_3 = -2p_2 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2q_1 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + (p_1 - q_2)\dfrac{\partial}{\partial \alpha_3}
\end{array} \right.
$$

les équations demandées pourront alors se mettre sous la forme suivante:

$$
(23) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\Delta(\mu_1(p_1) - p_3 q_1) + \alpha_2 p_3 M = 0 \\
\Delta(\mu_2(p_1) + 2p_3 p_1 + q_3 p_2) - \alpha_3 p_3 M = 0 \\
\Delta\ \mu_3(p_1) - \alpha_2 A - \alpha_3 B = 0 \\
\Delta(\mu_1(p_2) - p_3 p_1 - p_3 q_2 - q_3 p_2) - \alpha_3 p_3 M = 0 \\
\Delta(\mu_1(p_2) + p_3 p_2) + \alpha_1 p_3 M = 0 \\
\Delta\ \mu_3(p_2) + \alpha_3 A + \alpha_1 B = 0 \\
\Delta(\mu_1(p_3) - p_3 q_3) + \alpha_2 A + \alpha_3 B = 0 \\
\Delta(\mu_2(p_3) + p_3^2) - \alpha_3 A - \alpha_1 B = 0 \\
\Delta\ \mu_3(p_3) + p_3 M = 0 \\
\Delta(\mu_1(q_1) - q_3 q_1) + \alpha_2 q_3 M = 0 \\
\Delta(\mu_2(q_1) + p_3 q_1 + q_3 p_1 + q_3 q_2) - \alpha_3 q_3 M = 0 \\
\Delta\ \mu_3(q_1) - \alpha_3 A' - \alpha_2 B' = 0 \\
\Delta(\mu_1(q_2) - p_3 q_1 - 2q_3 q_2) - \alpha_3 q_3 M = 0 \\
\Delta(\mu_2(q_2) + q_3 p_2) + \alpha_1 q_3 M = 0 \\
\Delta\ \mu_3(q_2) + \alpha_1 A' + \alpha_2 B' = 0 \\
\Delta(\mu_2(q_3) - q_3^2) + \alpha_3 A' + \alpha_2 B' = 0 \\
\Delta(\mu_2(q_3) + q_3 p_3) - \alpha_1 A' - \alpha_3 B' = 0 \\
\Delta\ \mu_3(q_3) + q_3 M = 0.
\end{array} \right.
$$

Sans insister, pour le moment, sur la discussion un peu laborieuse du système précédent et en réservant pour un autre travail quelques applications des résultats obtenus, je me bornerai actuellement à faire remarquer que, si l'on adopte l'une des hypothèses sur lesquelles M. Lorenz[1]) a fondé la théorie des électrons, hypothèse qui revient à admettre que

$$p_1 = p_3 = 0, \quad p_2 \neq 0$$

on trouve

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

ce qui exprime que, par rapport au groupe défini par les équations (18), la force magnétique est un invariant.

Addition.

Voici quelques indications destinées à faciliter la vérification des résultats présentés dans la communication précédente.

Pour établir les formules (12) et (15), p. 8, on peut procéder comme il suit: les n_i étant définis par la formule (11) et la quantité Δ par la première des formules (21), on aura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_1, & e_2, & e_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix} \tag{24}$$

et l'on s'assurera sans peine que l'on a

$$\Delta = e_s(\alpha_2 e_s - \alpha_3 m_s) + m_s(\alpha_1 m_s - \alpha_3 e_s) + n_s^2, \tag{25}$$
$$(s = 1, 2, 3)$$

d'où il résulte que l'on a aussi

$$\Delta = \sum_{s=1}^{3} e_s(\alpha_2 e_s - \alpha_3 m_s) = \sum_{s=1}^{3} m_s(\alpha_1 m_s - \alpha_3 e_s) = \sum_{s=1}^{3} n_s^2. \tag{26}$$

Il est évident d'ailleurs que, dans le tableau

---

[1]) H. A. Lorenz. The theory of of electrons. Leipzig, B. G. Teubner 1909, p. 14, formule (23).

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_2 e_1 - \alpha_3 m_1, & \alpha_2 e_2 - \alpha_3 m_2, & \alpha_2 e_3 - \alpha_3 m_3 \\ \alpha_1 m_1 - \alpha_3 e_1, & \alpha_1 m_2 - \alpha_3 e_2, & \alpha_1 m_3 - \alpha_3 e_3 \\ n_1, & n_2, & n_3, \end{vmatrix}$$

les éléments d'une même ligne constituent les composantes d'un même vecteur. D'autre part, puisque les quantités ξ_{si} sont les composantes d'un même tenseur du second degré, les expressions

$$\sum_{s=1}^{3} v_s \xi_{si}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où les v_1 représentent les composantes d'un même vecteur quelconque, représenteront elles-mêmes les composantes d'un certain vecteur. Par conséquent, les quantités

$$(28)\qquad f_k(1),\ f_k(2),\ f_k(3),$$

définies par les équations

$$(29)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=1}^{3} (\alpha_2 e_s - \alpha_3 m_s)\xi_{si} = f_1(i)\,.\,\Delta \\ &\sum_{s=1}^{3} (\alpha_1 m_s - \alpha_3 e_s)\xi_{si} = f_2(i)\,.\,\Delta \\ &\sum_{s=1}^{3} n_s \xi_{si} = f_3(i)\,.\,\Delta, \end{aligned} \right.$$

représenteront les composantes d'un même vecteur pour chacune des valeurs 1, 2 et 3 de l'indice k. Cela étant, les quantités p_{ki} définies par les équations

$$(30)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3} (\alpha_2 e_i - \alpha_3 m_i) f_k(i) = p_{k1}, \\ &\sum_{i=1}^{3} (\alpha_1 m_i - \alpha_3 e_i) f_k(i) = p_{k2}, \\ &\sum_{i=1}^{3} n_i f_k(i) = p_{k3}, \end{aligned} \right.$$

représenteront chacune un invariant du groupe des rotations et, par conséquent, chacune de ces quantités sera fonction des seules grandeurs α_1, α_2 et α_3. Or, l'ensemble des équations (29) et (30) entraîne les formules (12) qu'il s'agissait d'établir. Quant aux formules (15) p. 8, on les obtiendra d'une façon tout à fait analogue. Démontrons maintenant que l'hypothèse selon laquelle le vecteur u serait, dans tous les cas, perpendiculaire à chacun des vecteurs $e' - e$ et $m' - m$, entraîne bien l'existence des relations (17). A cet effet adoptons l'hypothèse précédente.

Nous aurons:

$$\sum_{s=1}^{3} u_s(e'_s - e_s) = 0 \text{ et } \sum_{s=1}^{3} u_s(m'_s - m_s) = 0,$$

pour tous les systèmes de valeurs de u_1, u_2, u_3. Par conséquent:

$$\sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial e'_s}{\partial u_k} + e'_k - e_k = 0 \text{ et } \sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial m'_s}{\partial u_k} + m'_k - m_k = 0,$$

d'où

$$\sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial^2 e'_s}{\partial u_k \partial u_i} + \frac{\partial e'_i}{\partial u_k} + \frac{\partial e'}{\partial u_i} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial^2 m'_s}{\partial u_k \partial u_i} + \frac{\partial m'_i}{\partial u_k} + \frac{\partial m'_k}{\partial u_i} = 0.$$

Cela posé, il suffit de faire dans ces équations $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ et de se reporter aux formules (7), p. 7, pour s'assurer de l'existence des relations (17) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

Montrons maintenant qu'au cas où les relations (17) (p. 9) sont vérifiées, les conditions pour que le système (8), p. 7, soit un système jacobien prennent bien la forme (18). A cet effet observons que, avec les notations définies par les formules (17, $_1$), les équations (8), p. 7, s'écrivent de la façon suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \lambda_i(f) \qquad (i, = 1, 2, 3). \tag{31}$$

D'après un théorème classique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce système soit un système jacobien sont les suivantes:

$$\lambda_k(\xi_{s\,i}) - \lambda_i(\xi_{s\,k}) = 0 \qquad (i, s, k = 1, 2, 3) \tag{32}$$

et

$$\lambda_k(\eta_{s\,i}) - \lambda_i(\eta_{s\,k}) = 0 \qquad (i, s, k = 1, 2, 3). \tag{33}$$

L'une des relations (17) permet de donner à (32) la forme suivante:

$$\lambda_k(\xi_{s\,i}) + \lambda_i(\xi_{k\,s}) = 0.$$

En adjoignant à cette équation celles que l'on peut en déduire par voie de permutations circulaires des indices k, s, i, on obtient un système d'équations qui donne de suite

$$\lambda_k(\xi_{s,i}) = 0 \qquad (k, s, i = 1, 2, 3).$$

D'une façon tout à fait analogue les équations (33) nous donneront

$$\lambda_k(\eta_{s,i}) = 0 \qquad (k, s, i = 1, 2, 3).$$

En définitive, lorsque les relations (17), p. 9, sont vérifiées, les conditions considérées prennent bien la forme (18), p. 9.

Assurons-nous maintenant que les relations $(19,_1)$ sont bien équivalentes aux relations (17).

J'observe à cet effet que les relations (17) donnent en particulier

$$\xi_{ii} = 0,$$

égalité qui en vertu de (12) donne:

$$\begin{aligned} (34) \qquad & p_{11} e_i^2 + p_{22} m_i^2 + p_{33} n_i^2 + (p_{23} + p_{32}) m_i n_i + \\ & + (p_{31} + p_{13}) n_i e_i + (p_{12} + p_{21}) e_i m_i = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit subsister quelle que soit l'orientation des axes. Or les valeurs des p_{ik} sont indépendantes de l'orientation des axes et, d'autre part, lorsqu'on fait varier l'orientation des axes, les valeurs que peuvent prendre à la fois les trois quantités e_i, m_i et n_i ne sont assujetties, dans le cas général où chacun des vecteurs e et m est différent de zéro et où ces deux vecteurs ne sont pas parallèles à une même droite, qu'à satisfaire à l'équation

$$(35) \qquad \alpha_2 e_i^2 + \alpha_1 m_i^2 + n_i^2 - 2\alpha_3 e_i m_i - \Delta = 0 \text{ [1]}$$

où Δ est défini par la première des équations (21).

Par conséquent l'égalité (34) doit être une conséquence de (35). On a donc

$$p_{ik} + p_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

On établirait d'une façon analogue que les relations (17) entraînent encore les suivantes

$$q_{ik} + q_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

En définitive, les relations (17) entraînent les relations $(19,_1)$. Mais il est évident que les relations $(19,_1)$ entraînent les relations (17). Donc, les systèmes de relations (17) et $(19,_1)$ sont équivalentes entre elles comme il s'agissait de le démontrer.

---

[1]) Pour reconnaître l'existence de l'équation (35) il suffit de considérer que les éléments du tableau (27) représentent les coefficients des éléments homologues dans le déterminant (24).

Voici comment on obtient les formules (20): il résulte de $(19,_1)$ que l'on peut poser

$$p'_1 = p_{32} = -p_{23}, \quad p'_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad p'_3 = p_{21} = -p_{12},$$

en désignant par les p'_i des invariants du groupe des rotations. Cela étant, la formule (12) donne:

$$\xi_{i,i+1} = p'_1(m_{i+1}n_i - m_i n_{i+1}) + p'_2(n_{i+1}e_i - n_i e_{i+1}) + \\ + p'_3(e_{i+1}m_i - e_i m_{i+1}). \tag{36}$$

Or les expressions par lesquelles les p'_i sont multipliées respectivement dans la formule précédente représentent les coefficients de la colonne de rang $i+2$ dans le déterminant qui constitue le second membre de (24) et, d'autre part, ces coefficients sont égaux respectivement aux éléments de la colonne de rang $i+2$ dans le tableau (27); il résulte de là que l'expression (36) de $\xi_{i,i+1}$ peut être mise sous la forme

$$\xi_{i,i+1} = p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2},$$

en désignant par les p_i les invariants du groupe des rotations définis par les formules

$$p_1 = p'_1\alpha_2 - p'_2\alpha_3, \quad p_2 = p'_2\alpha_1 - p'_1\alpha_3, \quad p_3 = p'_3.$$

Cela posé, pour reconnaître la légitimité des formules (20), il suffit de considérer qu'un raisonnement tout à fait analogue à celui que nous venons de développer conduirait à la formule

$$\eta_{i,i+1} = q_1 e_{i+2} + q_2 m_{i+2} + q_3 n_{i+2}$$

où les q_i représentent certains nouveaux invariants du groupe des rotations.

Pour terminer, développons les calculs qui au cas où l'on a les formules (20) permettent de conclure à l'équivalence du système (23) (p. 10) au système (18).

En vertu des formules $(17,_1)$ et (20) nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_i(f) = &-(p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2})\frac{\partial f}{\partial e_{i+1}} + \\ &+(p_1 e_{i+1} + p_2 m_{i+1} + p_3 n_{i+1})\frac{\partial f}{\partial e_{i+2}} + \\ &-(q_1 e_{i+2} + q_2 m_{i+2} + q_3 n_{i+2})\frac{\partial f}{\partial m_{i+1}} + \\ &+(q_2 e_{i+1} + q_2 m_{i+1} + q_3 n_{i+1})\frac{\partial f}{\partial m_{i+2}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Commençons par développer les expressions

$$\lambda_i(\alpha_k) \qquad\qquad (k = 1, 2, 3)$$

où les α_k ont les valeurs (14). En tenant compte du fait que les éléments d'une colonne du tableau (27) représentent les coefficients des éléments de la colonne homologue dans le déterminant (24), on trouve:

$$\begin{aligned} \lambda_i(\alpha_1) &= -2p_3 e_i + 2p_3 \alpha_1 m_i - 2p_2 n_i \\ \lambda_i(\alpha_2) &= -2q_3 \alpha_2 e_i + 2q_3 \alpha_3 m_i + 2q_1 n_i \\ \lambda_i(\alpha_3) &= -(p_3 \alpha_2 + q_3 \alpha_3)e_i + (p_3 \alpha_3 + q_3 \alpha_1)m_i + (p_1 - q_2)n_i. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on désigne par $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ une fonction quelconque des variables α_1, α_2 et α_3 et si l'on conserve aux opérateurs μ_1, μ_2 et μ_3 les sens que leur attribuent les formules (22), on trouve:

$$\lambda_i(\psi) = \mu_1(\psi)e_i + \mu_2(\psi)m_i + \mu_3(\psi)n_i. \tag{38}$$

Développons encore les expressions $\lambda_i(n_i)$ et $\lambda_i(n_{i+2})$ où, on se le rappelle, on a

$$\begin{aligned} n_i &= e_{i+1} m_{i+2} - e_{i+2} m_{i+1}, \\ n_{i+2} &= e_i m_{i+1} - e_{i+1} m_i. \end{aligned}$$

En tenant compte, comme plus haut, des relations qui existent entre les éléments du tableau (27) et ceux du déterminant (24), on trouve:

$$\begin{aligned} \lambda_i(n_i) = q_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_3 - q_1 e_i^2 + p_2 m_i^2 + \\ + p_3 m_i n_i - q_3 n_i e_i + (p_1 - q_2) e_i m_i \end{aligned} \tag{39}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_i(n_{i+2}) = (p_1 m_i - q_1 e_i)e_{i+2} + (p_2 m_i - q_2 e_i) m_{i+2} + \\ + (p_3 m_i - q_3 e_i) n_{i+2}. \end{aligned} \tag{40}$$

D'après les formules (20) (p. 9), nous avons:

$$\xi_{i,i+1} = p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2}.$$

En s'appuyant sur cette formule ainsi que sur les formules (38) et (40), on développera aisément l'expression $\lambda_i(\xi_{i,i+1})$ et, après avoir éliminé de la formule obtenue le produit $n_i n_{i+1}$ au moyen de la relation

$$\alpha_2 e_i e_{i+2} + \alpha_1 m_i m_{i+2} - \alpha_3 (m_i e_{i+2} + e_i m_{i+2}) + n_i n_{i+2} = 0,$$

relation que l'on obtient en considérant que les éléments du tableau (27) sont égaux aux coefficients des éléments homologues du déterminant (24), on obtiendra une formule qui, à la suite de la substitution à n_{i+1} de sa valeur $e_{i+2}m_i - e_i m_{i+2}$, nous donnera finalement la suivante:

$$
(41)\quad \begin{aligned}
\lambda_i(\xi_{i,i+1}) = {} & (p_1^2 + p_2 q_1)e_{i+1} + (p_1 p_2 + p_2 q_2)m_{i+1} + \\
& + e_i e_{i+2}\{\mu_1(p_1) - p_3 q_1 - \alpha_2 \mu_3(p)\} + \\
& + m_i m_{i+2}\{\mu_2(p_2) + p_3 p_2 - \alpha_1 \mu_3(p_3)\} + \\
& + m_i n_{i+2}\{\mu_2(p_3) + p_3^2\} + m_{i+2} n_i \mu_3(p_3) + \\
& + n_i e_{i+2}\mu_3(p_1) + n_{i+2} e_i\{\mu_1(p_3) - p_3 q_3\} + \\
& + e_i m_{i+2}\{\mu_1(p_2) - p_3 q_2 + \alpha_3 \mu_3(p_3) - p_1 p_3 - p_2 q_3\} + \\
& + e_{i+2} m_i\{\mu_2(p_1) + p_3 p_1 + \alpha_3 \mu_3(p_3) + p_1 p_3 + p_2 q_3\}.
\end{aligned}
$$

Développons maintenant l'expression $\lambda_i(\xi_{i+1,i+2})$. Nous avons {formules (20), p. 9}:

$$
\xi_{i+1,i+2} = p_1 e_i + p_2 m_i + p_3 n_i
$$

et, en nous appuyant sur (38) et (39) nous obtiendrons l'expression de $\lambda_i(\xi_{i+1,i+2})$ sous forme d'un polynome entier du second degré en e_i, m_i et n_i ayant pour coefficients certains invariants du groupe des rotations. Après avoir éliminé de l'expression précédente la quantité n_i^2 au moyen de la relation (35), on obtiendra les formules définitives suivante:

$$
(42)\quad \begin{aligned}
\lambda_i(\xi_{i+1,i+2}) = {} & p_3\{q_1\alpha_1 - p_2\alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_3\} + \Delta\mu_3(p_3) + \\
& + e_i^2\{\mu_1(p_1) - p_3 q_1 - \alpha_2\mu_3(p_3)\} + \\
& + m_i^2\{\mu_2(p_2) + p_2 p_3 - \alpha_1\mu_3(p_3)\} + \\
& + m_i n_i\{\mu_3(p_2) + \mu_2(p_3) + p_3^2\} + \\
& + n_i e_i\{\mu_3(p_1) + \mu_1(p_3) - p_3 q_3\} + \\
& + e_i m_i\{\mu_2(p_1) + \mu_1(p_2) + p_3(p_1 - q_2) + 2\alpha_3\mu_3(p_3)\}.
\end{aligned}
$$

L'équation

$$
(43)\quad \lambda_i(\xi_{i+1,i+2}) = 0
$$

doit être vérifiée quelle que soit l'orientation des axes; d'autre part, ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le faire remarquer, lorsque l'orientation des axes varie, les vecteurs e et m étant donnés, les valeurs que peuvent prendre à la fois les quantités e_i, m_i et n_i ne sont assujetties, dans le cas général, qu'à satisfaire à l'équation (35). Par conséquent, il résulte de (42) que, pour que l'équation (43) soit satisfaite dans les conditions voulues, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(44)\quad \begin{cases} p_3\{q_1\alpha_1 - p_2\alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_2\} + \Delta\mu_3(p_3) = 0 \\ \mu_1(p_1) - p_3 q_1 - \alpha_2\mu_3(p_3) = 0 \\ \mu_2(p_2) + p_2 p_3 - \alpha_1\mu_3(p_3) = 0 \\ \mu_3(p_2) + \mu_2(p_3) + p_3^2 = 0 \\ \mu_3(p_1) + \mu_1(p_3) - p_3 q_3 = 0 \\ \mu_2(p_1) + \mu_1(p_2) + p_3(p_1 - q_2) + 2\alpha_3\mu_3(p_3) = 0. \end{cases}$$

A cause de la 2-ième et de la 3-ième des équations (44) le coefficient de $e_i e_{i+2}$ ainsi que celui de $m_i m_{i+2}$ dans l'expression (41) de $\lambda(\xi_{i,i+1})$ sont identiquement nuls et, à cause de cela, après avoir posé

$$(45)\quad \begin{cases} A_1 + \mu_2(p_3) + p_3^2, \qquad B_1 = \mu_3(p_2), \\ A_2 = \mu_3(p_1), \qquad B_2 = \mu_1(p_3) - p_3 q_3, \\ A_3 = \mu_1(p_2) - p_3 q_2 + \alpha_3\mu_3(p_3) - p_1 p_3 - p_2 q_3, \\ B_3 = \mu_2(p_1) + p_3 p_1 + \alpha_3\mu_3(p_3) + p_1 p_3 + p_2 q_3 \end{cases}$$

l'équation

$$(46)\qquad \lambda_i(\xi_{i,i+1}) = 0$$

prendra la forme suivante:

$$(47)\quad \begin{cases} (p_1^2 + p_2 q_1)e_{i+1} + (p_1 p_2 + p_2 q_2)m_{i+1} + \\ + A_1 m_i n_{i+2} + B_1 m_{i-2} n_i + \\ + A_2 n_i e_{i+2} + B_2 n_{i+2} e_i + \\ + A_3 e_i m_{i+2} + B_3 e_{i+2} m_i = 0. \end{cases}$$

Mais, avec les notations (45), les trois dernières équations du système (44) s'écrivent comme il suit:

$$(48)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 = 0, \\ A_2 + B_2 = 0, \\ A_3 + B_3 = 0. \end{cases}$$

Il résulte de là que l'équation (47) équivant à la suivante:

$$\begin{aligned} &(p_1^2 + p_2 q_1)e_{i+2} + (p_1 p_1 + p_2 q_2)m_{i+2} + \\ &+ A_1(m_i n_{i+2} - m_{i+2} n_i) + \\ &+ A_2(n_i e_{i+2} - n_{i+2} e_i) + \\ &+ A_3(e_i m_{i+2} - e_{i+2} m_i) = 0, \end{aligned}$$

laquelle, à cause des relations qui existent entre les éléments du tableau (27) et les éléments du déterminant (24), peut se mettre sous la forme suivante:

$$e_{i+1}\{p_1^2 + p_2 q_1 - \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2\} +$$
$$+ m_{i+1}\{p_1 p_2 + p_2 q_2 + \alpha_3 A_1 - \alpha_1 A_2\} - n_i A_3 n_{i+1} = 0.$$

Pour que cette équation subsiste quelle que soit l'orientation du axes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{(49)} \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1^2 + p_2 q_1 - \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2 &= 0 \\ p_1 p_2 + p_2 q_2 + \alpha_3 A_1 - \alpha_1 A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des équations

$$\lambda_i(\xi_{j,k}) = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

équivant à l'ensemble des équations (44) et (49), lequel, on le vérifiera très aisément, équivant à l'ensemble des 9 premières des équations (23). Reste à prouver que l'ensemble des 9 autres équations du système (23) équivaut à l'ensemble des équatious

$$\lambda_i(\eta_{j,k}) = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

On pourrait évidemment y arriver au moyen d'un calcul tout à fait analogue à celui que nous venons d'effectuer, mais il est inutile de développer ce calcul car il est aisé de voir que l'on en obtiendra le résultat en remplaçant dans les 9 premières des équations (23) les symboles

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$$

respectivement par

$$\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, q_2, q_1, -q_3, p_2, p_1, -p_3, \mu_2, \mu_1, -\mu_3.$$