438.

NOTE SUR QUELQUES TORSES SEXTIQUES.

[From the *Annali di Matematica pura ed applicata*, tom. II. (1868), pp. 99, 100.]

Je désire d'appeler attention aux surfaces développables, ou torses, données par l'équation

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3)^2 = 0.$$

Dans cette équation (a, b, c, d, e) sont des fonctions linéaires quelconques des quatre coordonnées (x, y, z, t); ces quantités sont donc liées par une équation linéaire

$$Aa + 4Bb + 6Cc + 4Dd + Ee = 0,$$

et je remarque que la classification des torses comprises sous l'équation mentionnée dépend des propriétés invariantives de la fonction $(A, B, C, D, E \between \tau, 1)^4$.

En effet la torse a une courbe cuspidale, ou arête de rebroussement, donnée par les équations

$$ae - 4bd + 3c^2 = 0, \quad ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3 = 0,$$

et une courbe nodale donnée par les équations

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e}:$$

ces deux courbes se rencontrent dans les points donnés par les équations

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e},$$

lesquels sont des points stationnaires de la courbe cuspidale. Pour trouver ces points, en écrivant $a : b : c : d : e = \tau^4 : \tau^3 : \tau^2 : \tau : 1$, on obtient pour le paramètre τ l'équation

$$(A, B, C, D, E \between \tau, 1)^4 = 0$$

et l'on voit ainsi qu'il y a un rapport entre la théorie de la surface et cette équation ; à toute particularité invariantive de l'équation, il y correspondra quelque particularité de la torse.

Les cas à considérer sont :

1°. Racines inégales, sans aucune relation invariantive. C'est le cas général ; je l'ai considéré dans le Mémoire, "On a certain Sextic Developable," *Quart. Math. Journ.*, t. IX. (1868), pp. 129—142, [398].

2°. Deux racines égales. Ce cas n'a pas été considéré ; je remarque que la courbe cuspidale est du cinquième ordre. En effet on peut supposer que les racines égales soient $=0$, ce qui revient à prendre $D=0$, $E=0$. On a donc $Aa+4Bb+6Cc=0$, c'est-à-dire les équations $a=0$, $b=0$ impliquent l'équation $c=0$; et on voit de là que les surfaces $ae-4bd+3c^2=0$, $ace-ad^2-b^2e+2bcd-c^3=0$ se coupent selon la droite $a=0$, $b=0$; il reste ainsi une courbe du cinquième ordre pour la courbe cuspidale.

3°. Trois racines égales. On peut supposer que ces racines sont $=0$, ce qui donne $C=0$, $D=0$, $E=0$; et l'on a ainsi $Aa+4Bb=0$, c'est-à-dire les plans $a=0$, $b=0$ sont ici un seul plan. L'équation de la torse contient le facteur a, et en l'écartant elle se réduit au cinquième ordre ; on obtient ainsi la torse générale du cinquième ordre.

4°. Deux paires de racines égales. On peut supposer que ces racines sont $=\infty$, 0 ; cela donne $A=0$, $B=0$, $D=0$, $E=0$, et l'on a ainsi identiquement $c=0$. L'équation de la torse est $(ae-4bd)^3-27(-ad^2-b^2e)^2=0$. J'ai considéré ce cas dans le Mémoire, "On a Special Sextic Developable," *Quart. Math. Journ.*, t. VII. (1866), pp. 105—113, [373] ; la courbe cuspidale est du quatrième ordre, une courbe excubo-quartique d'une forme particulière.

5°. Quatre racines égales ; en prenant ces racines $=0$, on a $B=C=D=E=0$, donc identiquement $a=0$; l'équation de la torse contient le facteur b^2, et en l'écartant elle se réduit au quatrième ordre : on a dans ce cas la torse générale du quatrième ordre. Il y a encore deux cas à considérer.

6°. L'invariant I de la fonction $(A, B, C, D, E \between \tau, 1)^4$ est $=0$;

7°. L'invariant J de cette fonction est $=0$;

Mais je n'ai pas encore examiné ce que cela veut dire [1]. Il n'y a pas le cas à considérer où l'on a à la fois $I=0$, $J=0$; car cela revient au cas 3° de trois racines égales.

Cambridge, le 19 *mai* 1868.

[1] La courbe cuspidale étant du genre 0 (unicursale), on peut considérer la série des points de la courbe comme correspondant anharmoniquement aux points d'une droite. Si le système des quatre points stationnaires est harmonique on a $J=0$; si ce système est équi-anharmonique, on a $I=0$.