XVII.

SOPRA LE FUNZIONI CHE DIPENDONO DA ALTRE FUNZIONI

Nota I.

«Rend. Lincei», ser. IV, vol. III, 1887, pp. 97–105 (*).

Mi permetto di accennare in questa Nota ad alcune considerazioni le quali servono a chiarire dei concetti che credo necessari introdurre per una estensione della teoria di RIEMANN sulle funzioni di variabili complesse, e che penso possano tornar giovevoli anche in varie altre ricerche.

§ 1. – FUNZIONI DIPENDENTI DA ALTRE FUNZIONI.

1. Seguendo il ben noto concetto del DIRICHLET si definisce attualmente una funzione nel seguente modo: una variabile è funzione di un'altra se, per ogni valore che questa prende entro certi limiti, la prima assume un dato valore.

Un tal concetto, che non implica nessuna relazione analitica fra l'una variabile e l'altra, discende molto naturalmente dalla considerazione di fenomeni nei quali due grandezze variano simultaneamente in modo che i valori dell'una dipendono da quelli dell'altra.

2. Così stabilito il concetto di funzione, si è portati molto naturalmente ad estenderlo.

Infatti in molte questioni di Fisica e di Meccanica, e nella integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali, capita di dover considerare delle quantità, che dipendono *da tutti i valori* che una o più funzioni di una variabile prendono in dati intervalli, o una o più funzioni di più variabili prendono in dati campi. Così per esempio la temperatura in un punto di una lamina conduttrice dipende da tutti i valori che la temperatura ha al contorno; lo spostamento infinitesimo di un punto di una superficie flessibile e inestendibile, dipende da tutte le componenti degli spostamenti dei punti del contorno, parallelamente ad una certa direzione.

In generale non si potrà dire che esista una legge, esprimibile analiticamente, mediante la quale il valore della quantità, che si considera, si deduca da tutti i valori della funzione data; ma talvolta potrà sussistere una tale dipendenza analitica, come per esempio nel caso in cui mediante delle qua-

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

drature o delle integrazioni di equazioni differenziali, nelle quali comparisce la funzione data, si può passare dai valori di questa al valore della quantità, che si considera.

Come è facile comprendere la estensione del concetto di funzione di cui ora parliamo differisce essenzialmente da quello ordinario di *funzione di funzione*.

3. Quando una quantità y dipenderà da tutti i valori di una funzione $\varphi(x)$ definita in un certo intervallo $(A \cdots B)$, diremo che y *dipende da* $\varphi(x)$ *entro* $(A \cdots B)$ e scriveremo

$$y = y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}} \right] \right|$$

o più semplicemente

$$y = y \left| \left[\varphi (x) \right] \right| .$$

Se y, oltre a dipendere dalla $\varphi(x)$, è una funzione di una variabile t, scriveremo

$$y = y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}} , t \right] \right| .$$

Se una quantità y dipenderà da più funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ definite entro gli intervalli $A_1 B_1, A_2 B_2, \cdots$ rispettivamente, e da più variabili $t_1, t_2, \cdots$, porremo

$$y = y \left| \left[\varphi_1 \underset{A_1}{\overset{B_1}{(x)}} , \varphi_2 \underset{A_2}{\overset{B_2}{(x)}} , \cdots , t_1 , t_2 , \cdots \right] \right| .$$

In tutto il corso di queste considerazioni ammetteremo sempre che le funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ da cui dipendono le quantità che si studiano, siano funzioni continue e che subiscano sempre delle variazioni continue.

Analogamente può considerarsi il caso in cui y dipenda da una funzione di più variabili $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ entro un campo σ; scriveremo allora

$$y = y \left| \left[\varphi (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \right] \right| .$$

§ 2. – Variazione di una funzione che dipende da un'altra funzione.

4. Sia

$$y = y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}} \right] \right| ;$$

diremo che y è continua se, data a $\varphi(x)$ una variazione $\psi(x)$ tale che in valore assoluto $\psi(x)$ sia sempre inferiore ad ε, la variazione corrispondente di y può rendersi inferiore a σ, piccolo ad arbitrio.

Se si suppone in generale che sia

$$y = y \left| \left[\varphi_1 \underset{A_1}{\overset{B_1}{(x)}} , \varphi_2 \underset{A_2}{\overset{B_2}{(x)}} , \cdots \varphi_n \underset{A_n}{\overset{B_n}{(x)}} , t_1 , t_2 , \cdots , t_m \right] \right|$$

diremo che y è continua se, date alle $\varphi_i(x)$ delle variazioni $\psi_i(x)$ e alle t_i delle variazioni τ_i, tutte inferiori a ε in valore assoluto, la variazione corrispondente di y può rendersi inferiore a σ, piccolo ad arbitrio.

5. Per la y dipendente dalla $\varphi(x)$, oltre alla condizione della continuità, ammetteremo altre condizioni.

Preso un intervallo $h = mn$ entro AB, diamo alla $\varphi(x)$ una variazione continua $\theta(x)$ entro h, tale che $\theta(x)$ sia in valore assoluto inferiore ad ε, e denotiamo con δy la variazione corrispondente di y. Ammetteremo:

I. Che il rapporto $\delta y/\varepsilon h$ sia sempre inferiore ad un numero finito M.

Suppongasi ora $\theta(x)$ sempre dello stesso segno e si ponga $\int\limits_m^n \theta(x)\, dx = \sigma$.

Se rappresentiamo la funzione $\varphi(x)$ mediante una curva $z = \varphi(x)$, avremo che σ sarà l'area compresa fra questa curva e la curva variata. Porremo le condizioni:

II. Che facendo impiccolire indefinitamente ε ed h, in modo che questo intervallo contenga sempre nel suo interno un punto G di indice t, esista il limite determinato e finito del rapporto $\delta y/\sigma$.

III. Che il rapporto $\delta y/\sigma$ tenda verso il suo limite uniformemente rispetto a tutte le possibili funzioni $\varphi(x)$ e agli indici t.

Il limite $\delta y/\sigma$ dipenderà dalla $\varphi(x)$ e dall'indice t del punto G; lo denoteremo con

$$y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$$

e lo chiameremo *derivata prima di y*. Ammetteremo:

IV. Che $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$ sia continua rispetto a $\varphi(x)$ e a t.

6. Ciò premesso passeremo a studiare la questione seguente:

Diamo alla $\varphi(x)$ una variazione continua nell'intervallo AB, variazione che denoteremo con $\varepsilon\psi(x)$; la variazione corrispondente di y indichiamola con Δy. Se facciamo variare ε potremo considerare Δy come funzione di ε. Si tratta di studiare il

$$\lim \frac{\Delta y}{\varepsilon}$$

per ε tendente indefinitamente a zero, ovvero

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}.$$

A tal fine consideriamo i tratti di AB nei quali $\psi(x)$ non è costantemente eguale a zero. In questi, mediante un numero finito di intervalli la cui somma può rendersi minore di un numero δ arbitrariamente piccolo, si possono togliere tutti i punti in cui $\psi(x)$ è eguale a zero. Dividiamo i tratti rimanenti in tanti intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

In ciascuno di essi evidentemente la $\psi(x)$ conserva sempre un medesimo segno. Spezziamo ciascun intervallo $h_i = E_i F_i$ in tre parti k_i, l_i, m_i, e formiamo una funzione θ_i continua e sempre dello stesso segno, la quale sia nulla negli intervalli AE_i e $F_i B$, sia eguale a $\psi(x)$ entro l'intervallo l_i, e nei due intervalli adiacenti k_i e m_i sia sempre crescente o decrescente.

Prendiamo

$$\sum_1^n k_i + \sum_1^n m_i < \delta,$$

e si ponga

$$\psi(x) - \sum_1^n \theta_i(x) = \alpha(x).$$

La somma degli intervalli in cui $\alpha(x)$ è diversa da zero sarà inferiore a 2δ, quindi a cagione della condizione I, avremo in valore assoluto

$$(1) \qquad y\,|\,[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)]\,| - y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^n \theta_i(x)\right]\right| < 2\delta MP\varepsilon$$

denotando con P il massimo valore assoluto di $\psi(x)$.

Ora si ha

$$(2) \qquad y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^n \theta_i(x)\right]\right| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|$$

$$= \sum_1^n{}_r \left\{ y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^r{}_i\, \theta_i(x)\right]\right| - y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1}{}_i\, \theta_i(x)\right]\right|\right\}$$

ove

$$\sum_1^0{}_i\, \theta_i(x) = 0.$$

Poniamo

$$\int_A^B \theta_r(x)\,dx = \int_{E_r}^{F_r} \theta_r(x)\,dx = \sigma_r,$$

avremo

$$y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^r{}_i\, \theta_i(x)\right]\right| - y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1}{}_i\, \theta_i(x)\right]\right|$$

$$= \varepsilon\sigma_r\left\{ y'\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1}{}_i\, \theta_i(x), t_r\right]\right| + \eta_r\right\},$$

ove t_r denota un punto compreso nell'intervallo h_r e, a cagione della condizione III, sarà possibile rendere η_r minore di un numero η piccolo ad arbitrio, purché ε e h_r siano inferiori ad un numero μ sufficientemente piccolo indipendente da r.

Per la continuità della derivata prima (condizione IV) avremo poi

$$y'\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1} \theta_i(x), t_r\right]\right| = y'\left|\left[\varphi(x)\,,\, t_r\right]\right| + \zeta_r,$$

e le ζ_r potranno rendersi tutte inferiori ad un numero ζ piccolo ad arbitrio, purché ε si prenda sufficientemente piccolo.

Ne segue che le relazioni (1) e (2) potranno scriversi

$$(3)\qquad y\,|\,[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]\,|-y\,|\,[\varphi(x)]\,|$$

$$=\varepsilon\sum_1^n{}_r\,\sigma_r\cdot y'\,|\,[\varphi(x),t_r]\,|+\varepsilon\sum_1^n\sigma_r(\eta_r+\zeta_r)+\vartheta\,(2\,\delta\mathrm{MP}\,\varepsilon),$$

in cui ϑ è un numero compreso fra $+1$ e -1.

Ora

$$\sigma_r=h_r\,\psi(t_r)+\tau\,(h_r\mathrm{D}_r+(k_r+m_r)\,\mathrm{P})$$

essendo D_r l'oscillazione di $\psi(x)$ entro h_r e τ un numero compreso fra -1 e 1.

La (3) potrà quindi trasformarsi in

$$y\,|\,[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]\,|-y\,|\,[\varphi(x)]\,|$$

$$=\varepsilon\sum_1^n{}_r\,h_r\cdot\psi(t_r)\,y'\,|\,[\varphi(x),t_r]\,|+\varepsilon\sum_1^n\sigma_r(\eta_r+\zeta_r)+\vartheta'\,\xi\varepsilon$$

ove

$$\xi=(2\mathrm{M}+1)\,\delta\mathrm{P}+\sum_1^n h_r\,\mathrm{D}_r.$$

Dividendo per ε e passando al limite per $\varepsilon,\delta,h_1,h_2,\cdots,h_n$ tendenti tutte a zero, avremo

$$(4)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\frac{y\,|\,[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]\,|-y\,|\,[\varphi)]\,|}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Delta y}{\varepsilon}$$

$$=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\psi(t)\cdot y'\,|\,[\varphi(x),t]\,|\,dt.$$

Il limite cercato è quindi ottenuto.

Il risultato trovato può anche esprimersi diversamente. La equazione precedente può scriversi

$$\Delta y=\varepsilon\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\psi(t)\cdot y'\,|\,[\varphi(x),t]\,|\,dt+\rho,$$

ove ρ è un infinitesimo d'ordine superiore ad ε. La parte di primo ordine di Δy è quindi

$$\varepsilon\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\psi(t)\cdot y'\,|\,[\varphi(x),t]\,|\,dt$$

che potremo denotare con

$$\delta y\,|\,[\varphi(x)]\,|\quad\text{o}\quad\delta y.$$

Posto

$$\varepsilon\psi(t)=\delta\varphi(x),$$

avremo

$$\delta y \left| [\varphi(x)] \right| = \int_A^B y' \left| [\varphi(x), t] \right| \cdot \delta\varphi(x) \cdot dt,$$

che si chiamerà la *variazione prima di y*.

7. Consideriamo ora

$$y' = y' \left| [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t] \right| .$$

Manteniamo fisso t e facciamo variare $\varphi(x)$, e sottoponiamo $y' \left| [\varphi(x), t] \right|$ a delle condizioni analoghe a quelle stabilite precedentemente; avremo che esisterà una derivata di y che potremo scrivere

$$y'' = y'' \left| [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t, t_1] \right|$$

e che chiameremo la *derivata seconda di y*. Essa conterrà due parametri t e t_1.

Dimostreremo nel paragrafo seguente che y'' è simmetrica rispetto ai due parametri. Ponendo delle nuove condizioni, sempre analoghe alle precedenti, si troveranno le derivate terza, quarta, ecc. n^{esima}.

Questa dipenderà da n parametri

$$y^{(n)} = y^{(n)} \left| [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}] \right| .$$

e, come dimostreremo, sarà simmetrica rispetto a $t, t_1, \cdots, t_{n-1}$.

Abbiamo trovato

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_A^B y' \left| [\varphi(x), t] \right| \psi(t)\, dt.$$

Analogamente avremo

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2 y}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} = \displaystyle\int_A^B \psi(t)\, dt \int_A^B y'' \left| [\varphi(x), t, t_1] \right| \psi(t_1)\, dt_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \displaystyle\int_A^B \psi(t)\, dt \int_A^B \psi(t_1)\, dt_1 \cdots \int_A^B \psi(t_n) \cdot y^{(n)} \left| [\varphi(x), t \cdots t_{n-1}] \right| dt_{n-1}; \end{cases}$$

che potremo scrivere ancora

$$(6) \quad \left(\frac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} \int_A^B\int \cdots \int \prod_{1}^{n}{}_i\, \psi(t_i) \cdot y^{(n)} \left| [\varphi(x), t_1, t_2 \cdots t_n] \right| dt_1 \cdots dt_n .$$

§ 3. – Estensione della formola del Taylor.

8. Abbiasi

$$y\,|\,[\varphi(x)]\,|_A^B$$

e diamo a $\varphi(x)$ un accrescimento $\psi(x)$.

Posto

$$y = y\,|\,[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)]\,|$$

e supponendo ε variabile fra 0 e 1, avremo

$$y(\varepsilon)_{\varepsilon=0} = y\,|\,[\varphi(x)]\,|,$$

$$y(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = y\,|\,[\varphi(x) + \psi(x)]\,|.$$

Quindi per un noto teorema

$$y\,|\,[\varphi(x) + \psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,| = \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\theta},$$

essendo θ un numero compreso fra 0 e 1.

Poniamo

$$\varepsilon = \theta + \varepsilon',$$

avremo

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\theta} = \left(\frac{dy}{d\varepsilon'}\right)_{\varepsilon'=0} = \int_A^B y'\,|\,[\varphi(x) + \theta\psi(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt,$$

e per conseguenza

$$y\,|\,[\varphi(x) + \psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,| = \int_A^B y'\,|\,[\varphi(x) + \theta\psi(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt.$$

Supponiamo $\psi(x)$ sempre dello stesso segno e diverso da zero solo nell'intervallo $A_1 B_1$ entro AB, avremo

$$y\,|\,[\varphi(x) + \psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,| = y'\,|\,[\varphi(x) + \theta\psi(x), t_1]\,|\int_A^B \psi(t)\,dt,$$

essendo t_1 un punto intermedio fra A_1 e B_1.

Ora

$$\int_A^B \psi(t)\,dt = S$$

è l'area compresa fra le due curve

$$z = \varphi(x) \quad \text{e} \quad z = \varphi(x) + \psi(x),$$

quindi

$$y\,|\,[\varphi(x) + \psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,| = y'\,|\,[\varphi(x) + \theta\psi(x), t]\,|\cdot S. \tag{7}$$

9. Consideriamo due intervalli $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$ entro AB e due funzioni continue $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ che non mutano mai segno e sono diverse da zero solo entro i due intervalli precedenti ciascuna rispettivamente.

Formiamo la espressione

$$M = y\,|[\varphi(x)+\psi_1(x)+\psi_2(x)]| - y\,|[\varphi(x)+\psi_1(x)]| - y\,|[\varphi(x)+\psi_2(x)]| + y\,|[\varphi(x)]|;$$

essa potrà scriversi in due modi diversi

$$M = u\,|[\varphi(x) + \psi_2(x)]| - u\,|[\varphi(x)]|,$$

$$M = v\,|[\varphi(x) + \psi_1(x)]| - v\,|[\varphi(x)]|,$$

ove si è posto

$$u\,|[\varphi(x)]| = y\,|[\varphi(x) + \psi_1(x)] - y\,|[\varphi(x)]|,$$

$$v\,|[\varphi(x)]| = y\,|[\varphi(x) + \psi_2(x)] - y\,|[\varphi(x)]|.$$

Denotando con S_1 e S_2 le aree rispettivamente comprese fra le curve

$$z = \varphi(x) \quad , \quad z = \varphi(x) + \psi_1(x),$$

$$z = \varphi(x) \quad , \quad z = \varphi(x) + \psi_2(x),$$

e applicando la formola (7) avremo

$$u\,|[\varphi(x) + \psi_2(x)]| - u\,|[\varphi(x)]| = u'\,|[\varphi(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2]|\,S_2,$$

$$v\,|[\varphi(x) + \psi_1(x)]| - v\,|[\varphi(x)]| = v'\,|[\varphi(x) + \theta'_1\psi_1(x), t'_1]|\,S_1,$$

ove θ'_2 o θ'_1 denotano due numeri compresi fra 0 e 1, e t'_1 e t'_2 sono due valori fra A_1 e B_1, A_2 e B_2.

Ora

$$u'\,|[\varphi(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2]| = y'\,|[\varphi(x) + \psi_1(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2]| - y'\,|[\varphi(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2]|,$$

$$v'\,|[\varphi(x) + \theta'_1\psi_1(x), t'_1]| = y'\,|[\varphi(x) + \psi_2(x) + \theta'_1\psi_1(x), t'_1]| - y'\,|[\varphi(x) + \theta'_1\psi_1(x), t'_1]|;$$

onde applicando nuovamente la formula (7) avremo

$$u'\,|[\varphi(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2]| = y''\,|[\varphi(x) + \theta''_1\psi_1(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2, t''_1]|\cdot S_1,$$

$$v'\,|[\varphi(x) + \theta'_1\psi_1(x), t'_1]| = y''\,|[\varphi(x) + \theta''_2\psi_2(x) + \theta'_1\psi_1(x), t'_1, t''_2]|\cdot S_2,$$

essendo al solito θ''_1 e θ''_2 numeri compresi fra 0 e 1, e t''_1 e t''_2 dei valori compresi negli intervalli $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$. Ne segue che

$$M = y''\,|[\varphi(x) + \theta''_1\psi_1(x) + \theta'_2\psi_2(x), t'_2, t''_1]|\,S_1 S_2,$$

$$M = y''\,|[\varphi(x) + \theta'_1\psi_1(x) + \theta''_2\psi_2(x), t'_1, t''_2]|\,S_1 S_2,$$

quindi

$$y'' \,|\, [\varphi(x) + \theta''_1 \psi_1(x) + \theta'_2 \psi_2(x), t'_2, t''_1] \,| = |\, [\varphi(x) + \theta'_1 \psi_1(x) + \theta''_2 \psi_2(x), t'_1 t''_2] \,|,$$

Si supponga ora che

$$y'' \,|\, [\varphi(x), t_1, t_2] \,|$$

sia continua rispetto a $\varphi(x), t_1, t_2$; facendo impiccolire indefinitamente le funzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ e i due intervalli $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$ e facendoli tendere verso due punti t_1 e t_2, per la formula precedente, avremo

$$y'' \,|\, [\varphi(x), t_1, t_2] \,| = y'' \,|\, [\varphi(x), t_2, t_1] \,|,$$

il che dimostra la simmetria della derivata seconda rispetto ai due parametri t_1 e t_2.

Analogamente si dimostrerebbe la simmetria rispetto ai parametri che compariscono nelle derivate successive.

10. Consideriamo ora

$$y \,|\, [\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] \,|$$

come una funzione di ε e supponiamo che $y \,|\, [\varphi(x)] \,|$ ammetta le successive derivate colle condizioni precedentemente stabilite.

Applicando la formula del Taylor avremo

$$y_{\varepsilon=1} = y_{\varepsilon=0} + \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} + \cdots + \frac{1}{\pi(n)}\left(\frac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{1}{\pi(n+1)}\left(\frac{d^{n+1} y}{d\varepsilon^{n+1}}\right)_{\varepsilon=\theta}$$

con θ compreso tra 0 e 1.

Quindi per le (3) del § 2, si avrà

$$(8) \qquad y \,|\, [\varphi(x) + \psi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi(x)] \,|$$

$$+ \sum_1^n \frac{1}{\pi(i)} \int_A^B\!\!\int \cdots \int y^{(i)} \,|\, [\varphi(x), t_1, t_2 \cdots t_i] \,| \prod_1^i {}_r\, \psi(t_r) \cdot dt_1 \cdots dt_i$$

$$+ \frac{1}{\pi(n+1)} \int_A^B\!\!\int \cdots \int y^{(n+1)} \,|\, [\varphi(x) + \theta\psi(x), t_1 \cdots t_{n+1}] \,| \prod_1^{n+1} {}_r\, \psi(t_r)\, dt_1 \cdots dt_{n+1}.$$

Se il limite dell'ultimo termine è zero per $n = \infty$, avremo,

$$(9) \qquad y \,|\, [\varphi(x) + \psi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi(x)] \,|$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{1}{\pi(n)} \int_A^B\!\!\int \cdots \int y^{(n)} \,|\, [\varphi(x), t_1, t_2 \cdots t_n] \,| \prod_1^n {}_r\, \psi(t_r) \cdot dt_1\, dt_2 \cdots dt_n,$$

che è una estensione della serie del Taylor. Colle condizioni poste abbiamo quindi una espressione mediante integrali definiti di una quantità che dipende da una funzione $\psi(x)$, giacché nella formula precedente possiamo supporre $\varphi(x)$ invariabile e $\psi(x)$ variabile.