

## VII.

SULLE APPARENZE ELETTROCHIMICHE  
ALLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XVIII, 1882, pp. 147-168 (\*).

Per primo A. TRIBE <sup>(1)</sup> e successivamente il prof. A. ROITI <sup>(2)</sup> si occuparono dell'estensione e della forma dei depositi che si ottengono in una lastra metallica immersa in un elettrolita percorso da una corrente. Per quanto è a mia cognizione, tali fenomeni vennero finora studiati soltanto sperimentalmente.

Il prof. A. ROITI mi propose lo studio matematico del fenomeno nel caso in cui la corrente passasse in un elettrolita fra due lastre parallele metalliche in esso immerse e gli ioni venissero a depositarsi sopra un cilindro disposto parallelamente agli elettrodi.

Il fenomeno può suppersi avvenire come se l'elettrolita fosse un conduttore indefinito percorso da un flusso costante di elettricità ed il cilindro fosse pure indefinito e coll'asse diretto normalmente alla direzione della corrente principale. In tal caso la deposizione degli ioni avviene in modo che una striscia longitudinale del cilindro risulta coperta da uno di essi, un'altra striscia dall'altro ione; mentre restano scoperte due porzioni del cilindro comprese fra i due depositi. Gli ioni si vedono comparire dopo alcuni istanti da che è cominciato il passaggio della corrente ed il passaggio successivo di essa non fa che aumentare la grossezza degli strati depositati, senza sensibilmente variare l'ampiezza delle quattro regioni in cui viene a suddividersi la superficie del cilindro. Le correnti possono allora considerarsi come stazionarie.

## I.

A fondamento dei calcoli venne presa l'ipotesi accennata dal prof. ROITI nella sua Memoria citata, e da esso confermata con diverse prove, che la causa degli spazi ove non si vede la deposizione degli ioni debba attribuirsi alla corrente secondaria di polarizzazione.

Non è ammissibile che la sede delle forze elettromotrici di polarizzazione, allorquando è raggiunto il periodo stazionario delle correnti, debba trovarsi *soltanto nei punti ove si vedono i depositi degli ioni*. Infatti, la

(\*) Presentata dal Socio G. FERRARIS nell'adunanza del 17 dicembre 1882.

(1) «Philosophical Magazine», ser. 5, vol. XI, p. 446 (1881).

(2) «Nuovo Cimento», ser. 3, vol. X, p. 97 (1881).

corrente prodotta dalla forza elettromotrice di polarizzazione, che nasce nei punti ove i depositi sono visibili, *si aggiunge* alla corrente principale nelle porzioni della superficie del cilindro che appaiono scoperte; quindi se in queste parti non vi fosse alcuna forza elettromotrice, vi nascerebbe un deposito che cangerebbe lo stato delle correnti. *È dunque necessario ammettere nel periodo stazionario una forza elettromotrice distribuita sopra tutta la superficie del cilindro*, e per conseguenza *bisognerà che esista un deposito elettrolitico anche in quelle parti del cilindro che sembrano rimanere scoperte.*

## 2.

Ecco come può suppersi l'andamento del fenomeno nel periodo variabile, affinchè nel periodo stazionario lo stato del cilindro risulti quale si è dovuto ammettere nel paragrafo precedente.

Nel primo istante in cui avviene il passaggio della corrente principale si formano sopra tutta la superficie del cilindro (esclusi i punti delle generatrici *a, b*) i depositi elettrolitici, onde viene a generarsi una corrente secondaria di polarizzazione dovuta alla debole forza elettromotrice prodotta. Questa corrente però è sufficiente a vincere quella principale nelle porzioni del cilindro vicine alle generatrici *a, b* (fig. I), quindi nell'istante successivo il deposito avviene soltanto in porzioni del cilindro più vicine alle generatrici *c, d*, nelle quali parti del cilindro cresce la forza elettromotrice. Si ha dunque che le porzioni della superficie in cui avviene il deposito si restringono continuamente mentre crescono in esse le forze elettromotrici. È noto per altro che le forze elettromotrici di polarizzazione hanno un massimo, raggiunto il quale, il depositarsi successivo degli ioni non aumenta il loro valore. Ne segue che a partire dall'istante nel quale, nelle porzioni in cui avviene il deposito, le forze elettromotrici hanno raggiunto questo massimo, le correnti diventano stazionarie ed in queste porzioni soltanto seguitano ad avvenire i depositi.

Questo ci spiega l'apparenza del cilindro, perchè, mentre sarà visibile il deposito nelle parti in cui la forza elettromotrice ha raggiunto il valore massimo e in cui la grossezza degli strati depositati può aumentare continuamente, può non essere apprezzabile il velo sottilissimo aderente alle altre parti del cilindro.

## 3.

Il calcolo del fenomeno nel periodo variabile mi sembrò presentare troppe difficoltà; mi proposi invece di studiarlo a partire dall'istante in cui

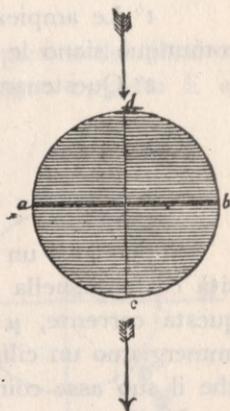


Fig. I.

comincia il periodo stazionario, seguendo il concetto sopra accennato dello stato del cilindro in questo periodo.

Comincio dal cercare come deve essere distribuita la forza elettromotrice alla superficie del cilindro affinchè le correnti siano stazionarie; così vengo a trovare le condizioni a cui deve soddisfare la funzione potenziale della corrente di polarizzazione (§ 5). Da queste condizioni risulta che il problema ha un'unica soluzione (§ 6). Trasformate poi queste condizioni (§ 8) passo alla risoluzione del problema (§§ 9-10) (3). Ottengo prima una relazione assai semplice per mezzo di integrali ellittici che lega le ampiezze dei depositi visibili, la forza elettromotrice di polarizzazione, la densità della corrente principale, la conducibilità del liquido e il raggio del cilindro. Un'altra formola mi dà poi il valore della forza elettromotrice nei diversi punti della superficie del cilindro (§ 12).

Il calcolo conduce a questi due risultati (§ 7):

1° Le ampiezze dei due depositi visibili sono sempre eguali fra loro, comunque siano le forze elettromotrici.

2° Queste ampiezze sono indipendenti dalla conducibilità del cilindro.

## 4.

Suppongasi un conduttore indefinito percorso da una corrente di intensità costante nella direzione negativa dell'asse delle  $y$ . Sia  $D$  la densità di questa corrente,  $\mu$  la conducibilità del conduttore. In questo conduttore immergiamo un cilindro indefinito di conducibilità  $\mu_1$ , di raggio  $R$ , in modo che il suo asse coincida coll'asse  $z$ .

Vediamo come viene modificata la corrente. Trattandosi di conduttori cilindrici la soluzione ci viene fornita per mezzo di una semplice applicazione del principio delle immagini (4).

Se indichiamo con  $U(\rho, \theta)$  la funzione potenziale in un punto esterno al cilindro di coordinate cilindriche  $\rho, \theta, z$  riferite all'asse  $z$  e al piano  $xOz$ , avremo:

$$U(\rho, \theta) = D \left[ \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 + \mu} \frac{R^2}{\rho} - \rho \right] \frac{\sin \theta}{\mu},$$

e se indichiamo con  $U_1(\rho, \theta)$  la funzione potenziale in un punto  $(\rho, \theta, z)$  interno al cilindro, avremo:

$$U_1(\rho, \theta) = -2D \left[ \frac{1}{\mu + \mu_1} \rho \sin \theta \right].$$

(3) Questa risoluzione si appoggia sopra un metodo accennato nel § IX nella mia Nota, *Sopra alcune proprietà caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa*. « Annali di Matematica », ser. II, vol XI, p. 1 (1882-83); [in questo volume: IV, pp. 49-95].

(4) Vedi J. C. MAXWELL, *Electricity and Magnetism*, vol. I, p. 367 (1873).

Ciò si verifica facilmente, infatti:

$$\lim_{y=\pm\infty} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -D,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\rho, \theta)_{\rho=R} = -\frac{2D \operatorname{sen} \theta}{\mu + \mu_1} R, \\ U_1(\rho, \theta)_{\rho=R} = -\frac{2D \operatorname{sen} \theta}{\mu + \mu_1} R, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = -\frac{2\mu_1}{\mu + \mu_1} D \operatorname{sen} \theta, \\ \left( \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = -\frac{2\mu_1}{\mu + \mu_1} D \operatorname{sen} \theta. \end{array} \right.$$

5.

Ciò premesso, vediamo come si deve distribuire alla superficie del cilindro una forza elettromotrice compresa fra due valori di segno opposto  $E$  e  $-E_1$ , in modo che nella porzione  $AB$  (fig. II) incognita della superficie del cilindro, la forza elettromotrice raggiunga il suo valore massimo  $E$ , nella porzione  $CD$  raggiunga il suo valore minimo  $-E_1$ ; e nei tratti  $BD$  ed  $AC$  la componente normale della intensità della corrente prodotta dalla forza elettromotrice distribuita sul cilindro eguagli la componente normale della corrente principale; inoltre si abbia che nei tratti  $AB$  e  $CD$  la componente normale della corrente principale superi la componente normale della corrente prodotta dalla forza elettromotrice distribuita sul cilindro.

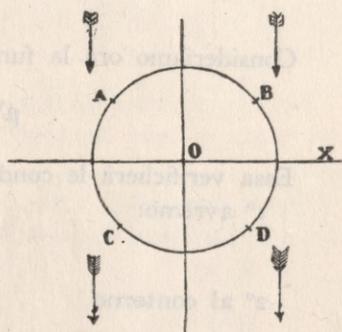


Fig. II.

Chiamiamo

$$V(\rho, \theta)$$

la funzione potenziale della corrente prodotta dalla forza elettromotrice incognita nei punti esterni al cilindro e

$$V_1(\rho, \theta)$$

la funzione potenziale della stessa corrente nei punti interni.

Poniamo

$$V'(\rho, \theta) = V\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right),$$

e consideriamo la funzione

$$V_1(\rho, \theta) - V'(\rho, \theta) = \Theta(\rho, \theta).$$

Questa funzione sarà finita e continua e possiederà le seguenti proprietà:

1° verificherà l'equazione

$$\Delta^2 \Theta = 0,$$

2° nel tratto AB avremo:

$$\Theta = E,$$

e nel tratto CD

$$\Theta = -E_r,$$

3° nei tratti AC e BD avremo:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = P \operatorname{sen} \theta,$$

in cui  $n$  indica la normale al contorno diretta verso l'esterno e

$$P = \frac{2}{\mu} D.$$

Consideriamo ora la funzione

$$\mu V' + \mu_r V_r = \Omega(\rho, \theta).$$

Essa verificherà le condizioni seguenti:

1° avremo:

$$\Delta^2 \Omega = 0,$$

2° al contorno

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = 0.$$

Sarà per conseguenza

$$\Omega = \text{cost.}$$

La determinazione della legge secondo cui è distribuita la forza elettromotrice sul cilindro e della corrente da essa prodotta dipende quindi unicamente dalla determinazione della funzione  $\Theta$ . Conosciuta questa funzione la costante  $\Omega$  dovrà essere determinata in modo che il valore di  $V$  per  $\rho = \infty$  sia lo zero.

## 6.

Vediamo se le tre condizioni imposte alla funzione  $\Theta$  bastano a definirla univocamente, quando si osservi che deve aversi nei tratti AC e BD del contorno

$$E > \Theta > -E_r,$$

in AB

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} < P \operatorname{sen} \theta$$

e in CD

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} > P \operatorname{sen} \theta.$$

Supponiamo che due funzioni  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  verifichino contemporaneamente queste condizioni. Alla prima corrispondano i punti  $A_1, B_1, C_1, D_1$  (fig. III), alla seconda i punti  $A_2, B_2, C_2, D_2$  (5). Consideriamo la loro differenza

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \Theta_3.$$

Comunque siano disposti i punti  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ , avremo in alcune porzioni del contorno ( $A_2 B_2$  e  $C_2 D_2$  nella fig. III)

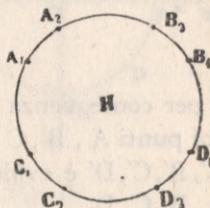


Fig. III.

$$\Theta_3 = 0,$$

in altre ( $A_1 C_1$  e  $B_1 D_1$ )

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial n} = 0,$$

e nelle rimanenti

$$\Theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial n} < 0$$

come facilmente si può verificare.

Ne segue che

$$\int \Theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial n} ds < 0$$

in cui l'integrale è esteso al contorno  $s$  del cerchio H.

Ora questa formola è evidentemente assurda, perchè è noto che

$$\int \Theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial n} ds = \iint \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 \right] dH,$$

in cui il secondo integrale è esteso a tutto il cerchio H.

Le condizioni imposte alla  $\Theta$  la definiscono quindi univocamente; però non si sa per ora nulla intorno alla sua esistenza.

7.

Cerchiamo ora di dimostrare che la coppia di punti AB deve essere simmetrica alla coppia CD rispetto all'asse  $x$  e la coppia AC simmetrica a

(5) È noto, che se i punti  $A_1, B_1, C_1, D_1$  coincidessero rispettivamente con  $A_2, B_2, C_2, D_2$ , la  $\Theta_1$  e la  $\Theta_2$  non potrebbero differire l'una dall'altra.

BD rispetto all'asse  $y$  (fig. II), inoltre che la posizione di questi punti non dipende che dal valore di  $P$  e di  $E + E_r$ .

Infatti, se la funzione  $\Theta'$  gode delle proprietà della  $\Theta$  quando invece di  $E$  e di  $-E_r$  si considerino

$$E' = \frac{E + E_r}{2}, \quad -E' = -\frac{E + E_r}{2},$$

avremo evidentemente

$$\Theta = \Theta' + \frac{E - E_r}{2}$$

e per conseguenza i punti  $A', B', C', D'$  corrispondenti alla  $\Theta'$  coincideranno coi punti  $A, B, C, D$  della  $\Theta$ . Ora, per la  $\Theta'$  la simmetria indicata dei punti  $A', B', C', D'$  è evidente, quindi questa simmetria riesce dimostrata per i punti  $A, B, C, D$ .

Osserviamo che da questa simmetria risulta subito che la  $\Theta'$  è nulla lungo l'asse  $x$  e  $\partial\Theta'/\partial\theta$  è zero lungo l'asse  $y$ .

## 8.

Per dimostrare l'esistenza della  $\Theta'$ , dalla quale si deduce subito quella di  $\Theta$ , e per poterla determinare cerchiamo di trasformare le condizioni imposte.

Perciò dimostriamo che se  $\psi(\rho, \theta)$ , funzione finita e continua nell'interno e al contorno del cerchio di raggio  $R$ , gode delle seguenti proprietà

1° Si ha

$$\Delta^2 \psi = 0, \quad \psi(-x) = \psi(x), \quad \psi(-y) = -\psi(y),$$

2° nel tratto AB del contorno del cerchio

$$\psi = E',$$

nel tratto CD

$$\psi = -E',$$

3° in BD e in AC si ha

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = P \sin \theta,$$

4° le derivate

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

si mantengono sempre inferiori ad un numero finito anche al contorno, e

$$\Delta^2 \psi = 0$$

anche nei punti del contorno, al più esclusi i punti A, B, C, D (fig. IV), la funzione  $\psi$  è appunto la funzione cercata  $\Theta'$ .

Consideriamo infatti la funzione

$$\psi(\rho, \theta) - E' = \psi'(\rho, \theta)$$

definita entro tutto il cerchio, e l'altra

$$\psi'_r(\rho, \theta) = -\psi'\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right)$$

definita in tutti i punti esterni al cerchio.

Dimostriamo che le due funzioni  $\psi'$  e  $\psi'_r$  si attaccano senza nessuna singolarità lungo l'arco AB.

Infatti lungo l'arco AB abbiamo

$$\psi' = \psi'_r = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \psi'_r}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = -\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \psi'\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right)\right)_{\rho=R} = \left(\frac{\partial \psi'(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)_{\rho=R},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'_r}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=R} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi'(\rho, \theta)\right)_{\rho=R} - \frac{2}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \psi'(\rho, \theta)\right)_{\rho=R}.$$

Ma

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \theta^2} = 0,$$

quindi, poichè  $\psi' = \text{cost.}$  sopra l'arco AB

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=R} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = 0,$$

e per conseguenza sull'arco AB

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'_r}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=R} = \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=R}.$$

Sia  $\psi_2(\rho, \theta)$  una funzione eguale a  $\psi'$  entro il cerchio, eguale a  $\psi'_r$  esternamente.

La funzione

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho},$$

sarà su tutto il piano (escluso l'arco ACDB) finita, continua, insieme alle derivate, e verificherà l'equazione

$$\Delta^2 \left( \frac{\rho}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (6).$$

(6) Vedi U. DINI, « Annali di Matematica », ser. II, vol. V, p. 305 (1871-73).

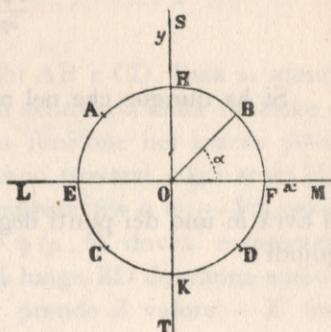


Fig. IV.

Essa all'infinito si annullerà: infatti

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho^2} = \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \frac{R^2}{\rho}} \psi_2 \left( \frac{R^2}{\rho}, \theta \right).$$

Si ha dunque che nel mezzo piano LMS il massimo valore di

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho},$$

si avrà in uno dei punti degli archi EA ed FB, perchè  $\psi_2$  è costante su LM, quindi

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}$$

è zero nei punti di questa retta. Ne segue che il massimo valore di questa funzione sarà

$$P \operatorname{sen} \alpha,$$

essendo  $\alpha$  l'anomalia del punto B, e per conseguenza in un punto  $(R, \theta)$  di AB il valore di

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho},$$

ossia il valore di

$$\frac{\partial \psi}{\partial n},$$

sarà sempre inferiore a  $P \operatorname{sen} \alpha$  e a più forte ragione a  $P \operatorname{sen} \theta$ .

In modo del tutto analogo si dimostra che il valore di

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}$$

nei punti dell'arco CD è superiore a  $P \operatorname{sen} \theta$ .

Consideriamo ora la funzione.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - P \rho \cos \theta = \varphi(\rho, \theta)$$

definita in tutti i punti interni al cerchio, e

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \varphi \left( \frac{R^2}{\rho}, \theta \right)$$

definita nei punti esterni.

Queste funzioni si attaccano senza nessuna singolarità lungo gli archi BD ed AC.

Abbiamo infatti in uno dei punti di questi archi;

$$\varphi = \varphi_1$$

$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = - \left( \frac{\partial \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - P \operatorname{sen} \theta \right)_{\rho=R} = 0,$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=R} = \left( \frac{\partial^2 \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=R} + \frac{2}{R} \left( \frac{\partial \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = \left( \frac{\partial^2 \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=R}.$$

Sia ora  $\varphi_2(\rho, \theta)$  una funzione eguale a  $\varphi$  nei punti interni al cerchio ed eguale a  $\varphi_1$  nei punti esterni. Questa funzione sarà finita, continua e verificherà l'equazione

$$\Delta^2 \varphi_2 = 0$$

in tutto il piano, esclusi al più i punti degli archi AB e CD. Essa si annullerà all'infinito e lungo la retta ST a causa della simmetria della funzione  $\psi$  rispetto a questa retta. Se consideriamo questa funzione nel mezzo piano STM avremo che i suoi massimi e minimi dovranno trovarsi sugli archi HB e KD, quindi la funzione stessa dovrà esser compresa fra 0 e  $-\text{PR} \cos \alpha$ .

Quindi lungo BD la  $\partial\psi/\partial\theta = \text{PR} \cos \theta + \varphi(\rho, \theta)$  dovrà mantenersi sempre positiva e per conseguenza i valori della  $\psi$  lungo BD dovranno andare crescendo continuamente dal punto D, in cui prende il valore  $-E'$  fino al punto B in cui prende il valore  $E'$ .

## 9.

La questione è dunque ridotta a vedere se è possibile costruire la funzione  $\psi$ , la quale, se esiste, è definita univocamente dalle condizioni sopraccennate.

La determinazione di tale funzione ci servirà a trovare la posizione dei punti A, B, C, D, cioè la relazione che lega le quantità

$$E, E', D, \alpha,$$

la distribuzione della forza elettromotrice alla superficie del cilindro e quindi la funzione potenziale delle correnti prodotte da questa forza elettromotrice.

Sia  $u(\rho, \theta)$  una funzione che verifica le proprietà volute per la  $\psi$ . Rappresentiamo conformemente il cerchio sopra un rettangolo  $A_1, B_1, C_1, D_1$  (fig. V), in modo che i vertici corrispondano ai punti A, B, C, D, il centro O del cerchio corrisponda al centro  $O_1$  del rettangolo, i diametri EF, HK del cerchio alle parallele ai lati  $E_1F_1, H_1K_1$  nel rettangolo. Siano  $x, y$  le coordinate di un punto del piano del cerchio riferite a EF, HK come assi e  $\xi, \eta$  le coordinate di un punto nel piano del rettangolo riferite alle rette corrispondenti come assi. Posto  $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$ , la funzione che dà la rappresentazione conforme sarà <sup>(7)</sup>

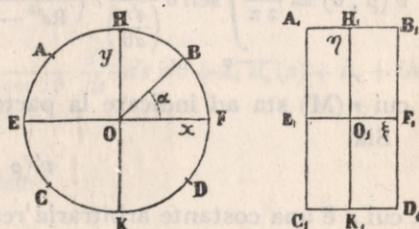


Fig. V.

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z - Re^{-i\alpha})(z - Re^{i\alpha})(z - Re^{i(\pi-\alpha)})(z - Re^{i(\pi+\alpha)})}} \\ &= \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - R^2 e^{-2i\alpha})(z^2 - R^2 e^{-2i\alpha})}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^4 + R^4 - 2R^2 z^2 \cos 2\alpha}} \end{aligned}$$

(7) Vedi U. DINI, « Annali di Matematica », ser. II, vol. VIII, p. 161 (1877).

Potremo considerare reciprocamente  $z$  come funzione di  $\zeta$ . Della forma di questa funzione inversa <sup>(8)</sup> non importa però tener conto.

Da essa si dedurrebbe

$$\rho = \rho(\xi, \eta) \quad , \quad \theta = \theta(\xi, \eta).$$

Mediante queste due funzioni riportiamo la  $u(\rho, \theta)$  nel rettangolo. Essa risulterà una funzione

$$u_1(\xi, \eta)$$

finita, continua e che verificherà l'equazione

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

La

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = v_1(\xi, \eta)$$

sarà nulla sopra  $A_1 B_1$  e  $C_1 D_1$  e sarà eguale a

$$\frac{du_1}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = P \operatorname{sen} [\theta(\xi, \eta)] \cdot \frac{d\rho}{d\xi} = P \operatorname{sen} [\theta(\xi, \eta)] \cdot R \frac{d\theta}{d\xi}$$

sopra i lati  $A_1 C_1$  e  $B_1 D_1$ . Riportiamo la funzione  $v_1$  sopra il cerchio. Essa sarà una funzione  $v(\rho, \theta)$  che risulterà eguale a zero sopra  $AB$  e  $CD$  e sopra  $AC$  e  $BD$  sarà eguale a

$$P \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)}.$$

Avremo quindi <sup>(9)</sup>:

$$v(\rho, \theta) = \frac{P}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} r \left( \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \right) d\theta + \frac{P}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} r \left( \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \right) d\theta,$$

in cui  $r(M)$  sta ad indicare la parte reale del numero complesso  $M$ .

Sia

$$v'(\rho, \theta) + c,$$

(in cui  $c$  è una costante arbitraria reale) la funzione coniugata della  $v(\rho, \theta)$ , avremo:

$$\begin{aligned} v + i(v' + c) &= \frac{P}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \frac{P}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + c_1 i \\ &= \frac{P}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{R^2 e^{2i\theta} + z}{R^2 e^{2i\theta} - z} d\theta + c_1 i, \end{aligned}$$

(8) Vedi E. B. CHRISTOFFEL, « Annali di Matematica », ser. II, vol. I, p. 89 (1867).

(9) Vedi H. A. SCHWARZ, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15 ter Jahrgang, pp. 272-286 (1870); « Gesamm. math. Abhandl. », II, pp. 133-143, Berlin 1890.

essendo  $c_1$  una costante arbitraria reale. Se

$$v'_1(\xi, \eta) + c$$

è la funzione coniugata della  $v_1(\xi, \eta)$ , avremo:

$$v_1 + (v'_1 + c) i = \frac{P}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{R^2 e^{2i\theta} + z^2(\zeta)}{R^2 e^{2i\theta} - z^2(\zeta)} d\theta + c_1 i.$$

Sia la funzione  $u'_1$  coniugata di  $u_1$ , avremo:

$$\frac{\partial [u_1 + iu'_1]}{\partial \xi} = \frac{d[u_1 + iu'_1]}{d\zeta} = v_1 + i(v'_1 + c),$$

quindi

$$u_1 + iu'_1 = \frac{P}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \int_0^{\zeta} \frac{R^2 e^{2i\theta} + z^2(\zeta)}{R^2 e^{2i\theta} - z^2(\zeta)} d\zeta d\theta + c_1 i\zeta + h_1 + ih_2,$$

$h_1$  e  $h_2$  essendo costanti arbitrarie reali.

Per conseguenza, se  $u'$  è la funzione coniugata di  $u$ , si ha

$$\begin{aligned} u + iu' &= \frac{PR}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \int_0^z \frac{R^2 e^{2i\theta} + z^2}{R^2 e^{2i\theta} - z^2} \frac{d\zeta}{dz} dz d\theta + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2 \\ &= -4 \frac{PR^3}{\pi} i \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen} \theta \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \int_0^z \frac{z^2 \operatorname{sen} \theta}{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2\theta} \frac{d\zeta}{dz} dz d\theta + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2. \end{aligned}$$

Ora se in  $d\zeta/dz$  facciamo  $z = Re^{i\theta}$  con

$$\alpha > \theta > 0,$$

si trova:

$$\frac{id\eta}{Rie^{i\theta} d\theta} = \frac{1}{R^2 \sqrt{e^{4i\theta} + 1 - 2e^{2i\theta} \cos 2\alpha}},$$

quindi:

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{2R \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

Ne segue che si potrà scrivere

$$u + iu' = -\frac{16PR^4}{\pi} i \int_0^z \frac{d\zeta}{z^2} dz \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \theta}}{(R^2 - z^2)^2 + 4R^2 z^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2.$$

Ora abbiamo con facili calcoli, ponendo

$$x = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \theta}},$$

$$\int_0^\alpha \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \theta}}{R^2 - z^2 + 4 R^2 z^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2 R^4} \frac{(R^2 - z^2)^2 + 2 R^2 z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{16 z^4}$$

$$- \frac{(R^2 - z^2) \sqrt{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha}}{16 R^4 z^4} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{R^2 - z^2} \sqrt{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha} dx}{1 + \left(\frac{1}{R^2 - z^2}\right)^2 (R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha) x^2}.$$

Ma finchè il mod  $z$  è inferiore ad  $R$

$$\frac{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha}{(R^2 - z^2)^2}$$

se è reale è positivo, quindi l'integrale che comparisce nel secondo membro della equazione precedente sarà finito ed eguale a  $\pi/2$  o a  $-\pi/2$ . Ciò dipende dal segno della parte reale di  $\sqrt{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha}$ .

Se si prende questo radicale positivo per  $z = 0$ , la sua parte reale si mantiene sempre positiva finchè mod  $z < R$ , e quindi l'integrale è sempre eguale a  $\pi/2$ . Ne segue, finchè mod  $z < R$

$$u + iu' = -\frac{\pi i}{2} \int_0^z \frac{d\zeta}{d\zeta} \left( \frac{\frac{(R^2 - z^2)^2 + 2 R^2 z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{z^2}}{-\frac{(R^2 - z^2) \sqrt{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha}}{z^2}} \right) dz + c_1 i\zeta(z) + h_1 + i h_2.$$

Ma l'espressione sotto l'integrale è una funzione senza nessuna singolarità, esclusi i punti  $A, B, C, D$ , nei quali il  $d\zeta/dz$  diviene infinito d'ordine,  $1/2$ , quindi l'espressione precedente ci dà i valori di  $u + iu'$ , anche per mod  $z = R$ . Da essa si deduce

$$u = r \left[ -\frac{\pi i}{2} \int_0^z \frac{d\zeta}{d\zeta} \left( \frac{\frac{(R^2 - z^2)^2 + 2 R^2 z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{z^2}}{-\frac{(R^2 - z^2) \sqrt{R^4 + z^4 - 2 R^2 z^2 \cos 2 \alpha}}{z^2}} \right) dz \right] - c_1 y(\rho, \theta) + h_1.$$

10.

Nella precedente espressione di  $u$  compariscono le tre costanti  $\alpha, c_1, h_1$ . Cerchiamo di determinarle per mezzo delle condizioni note. La  $h_1$  è zero perchè  $u$  deve essere zero per  $\rho = 0$ . In tal modo la  $u$  viene a cambiar segno cambiando la  $y$  in  $-y$ .

Dobbiamo poi avere

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

sempre finite; ciò equivale a porre la condizione che

$$\frac{d(u + iu')}{dz}$$

si mantenga sempre finita. Infatti in tal caso saranno finiti

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u'}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Abbiamo ora

$$\frac{d(u + iu')}{dz} = - \frac{Pi}{2} \frac{d\zeta}{dz} \left[ \frac{(R^2 - z^2)^2 + 2R^2 z^2 \sin^2 \alpha}{z^2} - \frac{(R^2 - z^2) \sqrt{R^4 + z^4 - 2R^2 z^2 \cos 2\alpha}}{z^2} \right] + c_1 i \frac{d\zeta}{dz},$$

onde ricordando il valore noto di  $d\zeta/dz$  si ottiene

$$\frac{d(u + iu')}{dz} = i \left[ - \frac{P}{2} \frac{(R^2 - z^2)^2 + 2R^2 z^2 \sin^2 \alpha}{z^2} + c_1 \right] \frac{d\zeta}{dz} + \frac{Pi}{2} \frac{R^2 - z^2}{z^2}.$$

Si riconosce subito che questa espressione non può divenire infinita che dove diviene infinito  $d\zeta/dz$ . Perciò bisognerà porre la condizione che

$$- \frac{P}{2} \frac{(R^2 - z^2)^2 + 2R^2 z^2 \sin^2 \alpha}{z^2} + c_1,$$

per i valori di  $z$  eguali a  $Re^{-i\alpha}$ ,  $Re^{i\alpha}$ ,  $Re^{i(\pi-\alpha)}$ ,  $Re^{i(\pi-\alpha)}$  divenga infinite-sima d'ordine superiore ad  $1/2$ .

Ciò evidentemente si verificherà quando si prenda

$$c_1 = - PR^2 \sin^2 \alpha.$$

Per determinare finalmente la costante  $\alpha$  osserveremo che lungo l'arco AB il valore costante che deve assumere la  $u$  è  $E'$ , quindi porremo la condizione che la  $u$  nel punto B sia eguale ad  $E'$ .

Perciò calcoliamo il valore di  $u$  in un punto  $(R, \omega)$  dell'arco FB. Osservando che in F  $u$  è zero, avremo

$$\begin{aligned} (I) \quad & [u + iu']_{Re^{i\omega}} \\ = & - \frac{Pi}{2} R \int_0^\omega \left[ \frac{(1 - e^{2i\omega})^2 + 2e^{i\omega} \sin^2 \alpha}{e^{2i\omega}} - \frac{(1 - e^{2i\omega}) \sqrt{(1 - e^{2i\omega})^2 + 4e^{2i\omega} \sin^2 \alpha}}{e^{2i\omega}} \right] \frac{ie^{2i\omega} d\omega}{\sqrt{(1 - e^{2i\omega})^2 + 4e^{2i\omega} \sin^2 \alpha}} \\ & - i PR \sin^2 \alpha \int_0^\omega \frac{ie^{i\omega} d\omega}{\sqrt{(1 - e^{2i\omega})^2 + 4e^{2i\omega} \sin^2 \alpha}} + hi \\ = & PR \int_0^\omega \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} d\omega - PR i \cos \omega + h' i, \end{aligned}$$

quindi

$$(u)_{Re^{i\omega}} = PR \int_0^\omega \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} d\omega.$$

La condizione che in B la  $u$  abbia il valore  $E'$  è quindi espressa da

$$E' = PR \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} d\omega$$

e ricordando che

$$P = \frac{2D}{\mu},$$

si ha

$$E' = \frac{2DR}{\mu} \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} d\omega.$$

Questa relazione ci fornisce il modo di determinare la posizione dei punti A, B, C, D conoscendo le forze elettromotrici  $E$  e  $-E_r$ , la densità  $D$  della corrente e la conducibilità  $\mu$  dell'elettrolita.

Ricordando infatti che  $E + E_r = 2E'$ , avremo

$$(2) \quad E + E_r = \frac{4DR}{\mu} \int_0^{\alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} d\omega.$$

La forza elettromotrice  $E_{\omega}$  nei punti  $(R, \omega)$  dell'arco FB ci viene data dalla formula

$$(3) \quad E_{\omega} = \frac{2DR}{\mu} \int_0^{\omega} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} d\omega + \frac{E - E_r}{2}.$$

## II.

Una conferma che la espressione trovata per la  $u$  verifica alle condizioni imposte alla funzione  $\Theta'$ , ci viene fornita dalla espressione trovata (I) dei valori di  $u + iu'$  al contorno. Abbiamo infatti per  $-\alpha < \omega < \alpha$ , oppure per  $\pi - \alpha < \omega < \pi + \alpha$ ,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u'}{\partial \omega}\right)_{\omega=R} = P \sin \omega;$$

per  $\alpha < \omega < \pi - \alpha$ , oppure per  $\pi + \alpha < \omega < 2\pi - \alpha$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = 0;$$

per  $-\alpha < \omega < \alpha$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = PR \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} > 0;$$

per  $\pi - \alpha < \omega < \pi + \alpha$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = -PR \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \omega} < 0;$$

per  $\alpha < \omega < \pi - \alpha$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{Q=R} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u'}{\partial \omega}\right)_{Q=R} = P (\text{sen } \omega - \sqrt{\text{sen}^2 \omega - \text{sen}^2 \alpha}) < P \text{sen } \omega;$$

finalmente per  $\pi + \alpha < \omega < 2\pi - \alpha$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = P (\text{sen } \omega + \sqrt{\text{sen}^2 \omega - \text{sen}^2 \alpha}) > P \text{sen } \omega.$$

12.

Le formule (2) e (3) si esprimono facilmente per integrali ellittici.  
Ponendo infatti

$$\frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \alpha} = \text{sen } \varphi,$$

$$k = \text{sen } \alpha,$$

si ottiene

$$E + E_x = \frac{4DR}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}},$$

$$E_\omega = \frac{2DR}{\mu} \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}} + \frac{E - E_x}{2}$$

e quindi

$$(4) \quad E + E_x = \frac{4DR}{\mu} (k^2 K - I) = \frac{4DR}{\mu} (\mathcal{E} - k'^2 K),$$

$$(5) \quad E_\omega = \frac{2DR}{\mu} (k^2 x - Z(x)) + \frac{E - E_x}{2},$$

quando si ponga

$$\frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \alpha} = \text{sn } x, \quad \text{mod } k,$$

e si adottino le consuete notazioni:  $k'^2 = 1 - k^2$ ,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}}, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \text{sen}^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}},$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi} d\varphi, \quad Z(x) = \int_0^x k^2 \text{sn}^2 x dx.$$

Le formule (4) e (5) si prestano con grandissima facilità ai calcoli numerici, e al confronto con i dati della esperienza.

Firenze, ottobre 1882.