431.

SUR LA TRANSFORMATION CUBIQUE D'UNE FONCTION ELLIPTIQUE.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LXIV. *Janvier—Juin*, 1867, pp. 560—563.]

SOIT $U=(a, b, c, d, e\between x, 1)^4$ une fonction quartique quelconque de x: I, J les deux invariants:

$$(I = ae - 4bd + 3c^2, \quad J = ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3),$$

et prenons $\Omega = \dfrac{I^3 - 27J^2}{I^3}$ pour l'invariant absolu de U. Soient de même $U'=(a', b', \ldots\between x, 1)^4$ et $\Omega' = \dfrac{I'^3 - 27J'^2}{I'^3}$ l'invariant absolu de U'. En supposant que $\sqrt{U}$, $\sqrt{U'}$ soient les radicaux des deux fonctions elliptiques liées par la transformation du troisième ordre ou *cubique*, on peut se proposer la question quelle est la relation entre les deux invariants absolus Ω, Ω'? J'ai trouvé cette relation d'abord par des considérations géometriques qui me furent suggérées par une lettre de M. Sylvestre; puis je l'ai déduite des formules pour la transformation cubique données par M. Hermite, *Crelle*, t. LX., 1862, p. 304), et enfin, à l'aide d'une considération tirée de ces formules, j'ai réussi à l'obtenir à moyen des formules des *Fundamenta Nova*. Je vais donner ici cette dernière investigation de la relation dont il s'agit.

En supposant que les fonctions U, U' soient transformées linéairement en $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, $(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)$ respectivement, pour exprimer la liaison entre les modules k^2, λ^2, au lieu de l'équation explicite entre $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ (*Fund. Nova*, p. 23), je me sers des formules, p. 25, lesquelles en y écrivant

$$-\beta = \frac{\alpha+2}{2\alpha+1},$$

c'est-à-dire

$$2\alpha\beta + \alpha + \beta = 2,$$

deviennent

$$k^2 = -\alpha^3\beta, \quad \lambda^2 = -\alpha\beta^3.$$

Les transformations linéaires donnent sans peine

$$\Omega = \frac{108k^2(k^2-1)^4}{(k^4+14k^2+1)^3}, \quad \Omega' = \frac{108\lambda^2(\lambda^2-1)^4}{(\lambda^4+14\lambda^2+1)^3},$$

et il s'agit entre ces équations d'éliminer α, β, k, λ de manière à obtenir une équation entre Ω, Ω'.

J'écris

$$\alpha' = \frac{\frac{1}{2}(2\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha-1)^4}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3}, \quad \beta' = \frac{\frac{1}{2}(2\beta+1)(\beta+2)(\beta-1)^4}{(\beta^2+4\beta+1)^3}.$$

L'équation entre α, β donne

$$2\beta+1 = \frac{-3}{2\alpha+1}, \quad \beta+2 = \frac{3\alpha}{3\alpha+1}, \quad \beta-1 = \frac{-3(\alpha+1)}{3\alpha+1}, \quad \beta^2+4\beta+1 = -\frac{3(\alpha^2+4\alpha+1)}{(2\alpha+1)^2},$$

et on a de là

$$\beta' = \frac{\frac{27}{2}\alpha(\alpha+1)^4}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3};$$

puis, en faisant attention à l'identité

$$(2\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha-1)^4 + 27\alpha(\alpha+1)^4 = 2(\alpha^2+4\alpha+1)^3,$$

on obtient entre α', β', la relation très simple $\alpha'+\beta' = 1$.

L'expression de k^2 donne

$$k^2 = \frac{\alpha^3(\alpha+2)}{2\alpha+1},$$

$$k^2 - 1 = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^3}{2\alpha+1},$$

$$k^4 + 14k^2 + 1 = \frac{1}{(2\alpha+1)^2}\{\alpha^6(\alpha+2)^2 + 14\alpha^3(\alpha+2)(2\alpha+1) + (2\alpha+1)^2\},$$

$$= \frac{1}{(2\alpha+1)^2}\{(\alpha^2+4\alpha+1)(\alpha^6+3\alpha^4+16\alpha^3+3\alpha^2+1)\},$$

et on a de là

$$\Omega = \frac{108\alpha^3(2\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha-1)^4(\alpha+1)^{12}}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3 \cdot (\alpha^6+3\alpha^4+16\alpha^3+3\alpha^2+1)^3}.$$

Or on a

$$\alpha' - 1 = \frac{\frac{1}{2}(2\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha-1)^4 - (\alpha^2+4\alpha+1)^3}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3}, = \frac{-\frac{27}{2}\alpha(\alpha+1)^4}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3}$$

$$8\alpha' + 1 = \frac{4(2\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha-1)^4 + (\alpha^2+4\alpha+1)^3}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3}, = \frac{9(\alpha^6+3\alpha^4+16\alpha^3+3\alpha^2+1)}{(\alpha^2+4\alpha+1)^3},$$

et de là, en formant l'expression de la fonction $\dfrac{-64\alpha'(\alpha'-1)^4}{(8\alpha'+1)^3}$, on la trouve égale à la valeur qui vient d'être donnée pour Ω en termes de α: on a donc

$$\Omega = -\frac{64\alpha'(\alpha'-1)^3}{(8\alpha'+1)^3}$$

et de même

$$\Omega' = -\frac{64\beta'(\beta'-1)^3}{(8\beta'+1)^3}.$$

Avec la relation $\alpha'+\beta'=1$, l'élimination de α', β' entre ces équations ne présente pas de difficulté.