XII.

SULLA DEFORMAZIONE DELLE SUPERFICIE FLESSIBILI ED INESTENDIBILI

« Rend. Lincei » (*), ser. 4ª, vol. I, 1885, pp. 274–278.

In due Note che ebbi l'onore di presentare l'anno scorso a cotesta illustre Accademia (**), ho accennato come il problema della ricerca degli spostamenti infinitesimi di una superficie flessibile e inestendibile (la cui equazione era $z = z(x, y)$) consisteva nell'integrare il sistema di equazioni differenziali a derivate parziali

$$(1) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x} \; , \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

in cui w e $\tilde{\omega}$ (che ho chiamato funzioni coniugate) erano rispettivamente funzioni di x e y, p e q. Ho anche indicato come, trovata una soluzione particolare w_1, $\tilde{\omega}_1$ del sistema (1), onde avere la w bastava integrare l'equazione a derivate parziali:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} + \frac{\partial \left[(rt - s^2)\dfrac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1}\right]}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0 \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \; , \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \; , \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Per ottenere le componenti δx, δy, δz dello spostamento più generale infinitesimo della superficie bastava prima calcolare la funzione coniugata $\tilde{\omega}$ della w e quindi si aveva:

$$\delta x = \int (w dp + \tilde{\omega} dy) \quad , \quad \delta y = \int (w dq - \tilde{\omega} dx) \quad , \quad \delta z = w .$$

Ho fatto osservare nella seconda delle Note anzidette, come il problema dell'equilibrio conduce a equazioni differenziali analoghe a quelle che si hanno nel problema della deformazione e ho notato le relazioni che passano fra i due problemi.

Per varie classi di superficie la integrazione della equazione (2), dopo avere determinata una conveniente soluzione particolare del sistema (1), si eseguisce con grande facilità. Mi propongo di indicare alcuni dei casi in cui ho eseguita la integrazione.

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

(**) In questo volume: X, pp. 180–187.

1. *Superficie del secondo grado.* Supponiamo che la superficie possieda un centro, e poniamo la sua equazione sotto la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,; \tag{3}$$

si avrà:

$$rt-s^2=\frac{c^6}{a^2\,b^2}\,\frac{1}{z^4},$$

ed esprimendo z in funzione di x e di q:

$$rt-s^2=\frac{c^2}{a^2\,b^2}\left[\frac{\left(1+\frac{b^2}{c^2}\,q^2\right)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\right]^2.$$

Prendiamo come soluzione particolare del sistema (1) $w_1=x\,,\ \tilde\omega_1=-q$; la equazione (2) da integrare diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\left\{\frac{c^2}{a^2\,b^2}\left(\frac{1+\frac{b^2}{c^2}q^2}{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2\frac{\partial w}{\partial q}\right\}}{\partial q}=0\,,$$

o anche, ponendo $x=ax_1\,,\ q=c/bq_1$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\left(\frac{1+q_1^2}{1-x_1^2}\,\frac{\partial w}{\partial q_1}\right)}{\partial q_1}=0.$$

Si trova dunque la stessa equazione differenziale per tutte le superficie aventi per equazione la (3). Basterà dunque conoscere tutte le deformazioni che può prendere una speciale superficie di questa classe perché il problema sia risoluto per tutte. Determiniamole quindi per tutte le superficie sferiche di raggio 1. In questo caso prendiamo come soluzione particolare del sistema (1) $w_1=y-ix\,,\ \tilde\omega_1=p+iq$, avremo:

$$rt-s^2=\frac{\tilde\omega_1^4}{w_1^4},$$

onde la equazione (2) prenderà la forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2}+\frac{\partial\left(\frac{\tilde\omega_1^4}{w_1^4}\,\frac{\partial w}{\partial\tilde\omega_1}\right)}{\partial\tilde\omega_1}=0.$$

Se poniamo:

$$\xi=\log\left(-\frac{1}{w_1}-\frac{i}{\tilde\omega_1}\right)\quad,\quad \eta=\log\left(-\frac{1}{w_1}+\frac{i}{\tilde\omega_1}\right),$$

la equazione precedente diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{\operatorname{senh}(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}-\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)=0.$$

Questa equazione si integra immediatamente col noto metodo EULERO-LAPLACE e in tal modo si ottiene:

$$w = \psi(\xi) + \varphi(\eta) - [\psi'(\xi) - \varphi'(\eta)] \frac{\cosh(\xi - \eta) - 1}{\operatorname{senh}(\xi - \eta)},$$

in cui φ e ψ sono funzioni arbitrarie.

Si ottiene dunque w espresso mediante x e y:

$$w = \psi\left(\frac{x + iy}{z - 1}\right) + \varphi\left(\frac{x - iy}{z - 1}\right) - [(x + iy)\psi' + (x - iy)\varphi'] \frac{z}{z - 1}$$

e mediante semplici quadrature:

$$\tilde{\omega} = i\left\{\psi\left(\frac{x + iy}{z - 1}\right) + \varphi\left(\frac{x - iy}{z - 1}\right) + [(x + iy)\psi' + (x - iy)\varphi'] \frac{1}{z(z - 1)}\right\}.$$

La determinazione delle tre componenti δx, δy, δz dello spostamento di ciascun punto è quindi ridotta a semplici quadrature.

Nel caso in cui la superficie non possieda centro e possa porsi la sua equazione sotto la forma:

$$z = Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + C,$$

abbiamo $r = 2A$, $s = 0$, $t = 2B$, onde $rt - s^2 = 4AB$ e quindi l'equazione da integrarsi si riduce immediatamente a $\Delta^2 w = 0$.

È inutile considerare il caso in cui la superficie è un cono o un cilindro.

Possiamo dunque considerare come risoluto il problema generale della deformazione infinitesima di una superficie qualunque del secondo grado.

2. *Pseudosfera.* Poste le equazioni della pseudosfera sotto la forma:

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - e^{2u}} \quad , \quad x = e^u \cos v \quad , \quad y = e^u \operatorname{sen} v,$$

si trova:

$$rt - s^2 = -e^{-4u}.$$

Ora una soluzione particolare del sistema (1) è:

$$w_1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad , \quad \tilde{\omega}_1 = \operatorname{arco\,tang} \frac{p}{q};$$

quindi basta integrare l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial\left(\frac{1}{(w_1^2 - 1)^2} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1}\right)}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0.$$

Ponendo:

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\omega}_1 + \frac{1}{2}\log\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right) \quad , \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{1}{2}\left(-\tilde{\omega}_1 + \frac{1}{2}\log\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right)$$

si trova:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_2 \partial \tilde{\omega}_2} + \coth(w_2 + \tilde{\omega}_2)\left(\frac{\partial w}{\partial w_2} + \frac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_2}\right) = 0;$$

e facendo:

$$\operatorname{senh}(w_2 + \tilde{\omega}_2)\, w = F,$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial w_2 \, \partial \tilde{\omega}_2} = F,$$

o anche, se

$$w_3 = w_2 + \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \tilde{\omega}_3 = w - \tilde{\omega}_2 ,$$

$$\Delta^2 F = F ,$$

che è una equazione molto nota nell'analisi:

3. *Elicoidi del Dini a curvatura costante*. Presa per equazione di questa superficie:

$$z = \int \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} \, d\rho + m \operatorname{arco\,tang} \frac{y}{x} \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

si trova:

$$rt - s^2 = \frac{1 + m^2}{\rho^4} .$$

La soluzione particolare del sistema (1) da prendersi in questo caso è:

$$w_1 = \sqrt{1 - \rho^2} \quad , \quad \tilde{\omega}_1 = - m \, (m^2 + 1) \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - \rho^2} \, (1 + m^2 - \rho^2)} - \operatorname{arco\,tang} \frac{p}{q} ,$$

onde la (2) diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial \left[\dfrac{1 + m^2}{(1 - w_1^2)^2} \dfrac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1} \right]}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0 ,$$

ossia, ponendo:

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{1 + m^2}} = \tilde{\omega}_2 ,$$

si ha:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial \left[\dfrac{1}{(1 - w_1^2)^2} \dfrac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_2} \right]}{\partial \tilde{\omega}_2} = 0 ,$$

che è la stessa equazione differenziale che abbiamo trovata nel caso della pseudosfera.

4. *Superficie conoidi*. La equazione di queste superficie è:

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

onde:

$$rt - s^2 = - f'^2 \frac{1}{y^4} .$$

Prendiamo $w_1 = y$, $\tilde{\omega}_1 = p = f' \frac{1}{y}$; si trova:

$$rt - s^2 = - \frac{\tilde{\omega}_1^2}{w_1^2} ,$$

onde la (2) diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial\left(\frac{\tilde{\omega}_1^2}{w_1^2}\frac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1}\right)}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0 .$$

Posto:

$$w_2 = \log (w_1\, \tilde{\omega}_1) \quad , \quad \tilde{\omega}_2 = \log \frac{w_1}{\tilde{\omega}_1} ,$$

si ottiene:

$$\frac{\partial w}{\partial w_2} - 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial w_2\, \partial \tilde{\omega}_2} = 0 ,$$

e quindi:

$$w = \sqrt{\frac{y}{p}}\,\theta\,(py) + \psi\left(\frac{y}{p}\right),$$

in cui θ e ψ sono funzioni arbitrarie.

Si ottengono quindi le due funzioni coniugate sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{y}{p}}\,\theta\,(py) - \frac{y}{p}\,\varphi'\left(\frac{y}{p}\right) + \varphi\left(\frac{y}{p}\right), \\ \tilde{\omega} &= \sqrt{\frac{p}{y}}\,\theta\,(py) + \varphi'\left(\frac{y}{p}\right) \end{aligned}\right.$$

in cui θ e φ sono funzioni arbitrarie, ovvero:

$$\left\{\begin{aligned} w &= \frac{y}{\sqrt{f'}}\,\theta\,(f') - \frac{y^2}{f'}\,\varphi'\left(\frac{y^2}{f'}\right) + \varphi\left(\frac{y^2}{f'}\right) \\ \tilde{\omega} &= \frac{\sqrt{f'}}{y}\,\theta\,(f') + \varphi'\left(\frac{y^2}{f'}\right), \end{aligned}\right.$$

da cui risultano immediatamente i valori delle componenti dello spostamento, mediante semplici quadrature.