VIII.

SOPRA ALCUNI PROBLEMI DELLA TEORIA DEL POTENZIALE (*)

« Annali della Scuola N. S. di Pisa » (Scienze fis. e mat.), vol. III, 1883, pp. 207–270.

Mi sono proposto lo studio di potenziali indipendenti da una delle coordinate [1], introducendo delle funzioni che facciano l'ufficio della funzione di GREEN. Perciò nel § 2 ho considerato in generale delle funzioni analoghe alle funzioni di GREEN, le quali possono servire nei diversi casi di elettrostatica, di calore, di idrodinamica e di magnetismo, e mediante le quali è possibile nei vari problemi che considero adoperare soltanto due coordinate in luogo di tre. Per queste funzioni ho sempre trovato verificato un principio di reciprocità, di cui è facile pervenire al significato fisico.

Ai potenziali indipendenti da una coordinata corrispondono le *funzioni associate* così chiamate dal chiarissimo prof. E. BELTRAMI nei suoi dottissimi lavori sui potenziali simmetrici. Le ho considerate nel § 1 ed ho trovato che anche nello studio di esse è possibile introdurre delle funzioni che facciano l'ufficio delle funzioni di GREEN.

Nel § 3 mi occupo della determinazione di tali funzioni.

I vari problemi studiati corrispondono ad altri sulla distribuzione della elettricità o del calore in mezzi non omogenei a due dimensioni. Lo studio di tali problemi viene fatto nel § 4.

Finalmente nel § 5 ho fatto vedere l'impiego che può essere fatto di potenziali negli spazi a più di tre dimensioni alla risoluzione di alcuni problemi sulla distribuzione dell'elettricità in corpi a tre o a due dimensioni non omogenei, quando i potenziali di cui si fa uso sono indipendenti da una o più coordinate.

§ 1. – FUNZIONI ASSOCIATE.

L'equazione differenziale $\Delta^2 V = 0$ trasformata in coordinate ortogonali ρ_1, ρ_2, ρ_3 prende la forma

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right)$$

(*) Estratto della Tesi di Abilitazione presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa

(1) Il considerare in generale il caso di potenziali indipendenti da una delle coordinate in luogo di quello particolare dei potenziali simmetrici non arreca complicazione nè maggiori difficoltà. Mi sono quindi attenuto il più possibile al caso generale, benchè per quanto è a mia cognizione non sia stata chiarita completamente la questione intorno al numero dei casi possibili dei potenziali che ho preso a considerare.

quando l'elemento lineare assume la forma

$$ds^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2 + H_3^2\, d\rho_3^2 .$$

Se la V è indipendente da una coordinata, per esempio dalla ρ_1, la equazione (1) diviene

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right) = 0 . \tag{2}$$

Tutte le volte che la H_1 sarà uguale al prodotto di una funzione della sola ρ_1 per una funzione H_1' di ρ_2 e ρ_3, e il rapporto H_2/H_3 sarà indipendente da ρ_1, la equazione precedente diverrà

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{H_3 H_1'}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{H_2 H_1'}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right) = 0 \tag{2'}$$

e in essa non comparirà più traccia della ρ_1. Quindi se la (2) ammetterà degli integrali, questi saranno indipendenti dalla coordinata ρ_1. Questo sarà uno dei casi in cui potrà dirsi che al sistema di coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3 corrisponde un sistema di funzioni potenziali indipendenti da una delle coordinate.

La (2) prova l'esistenza della funzione associata W definita dalle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial W}{\partial\rho_3}, \\ \frac{H_2 H_1}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_3} &= -\frac{\partial W}{\partial\rho_2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Siano v e w due funzioni che soddisfano le equazioni precedenti; avremo, per il determinante funzionale rispetto alle ρ_2 e ρ_3,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial\rho_2}, & \dfrac{\partial v}{\partial\rho_3} \\ \dfrac{\partial w}{\partial\rho_2}, & \dfrac{\partial w}{\partial\rho_3} \end{vmatrix} = \frac{H_3 H_1}{H_2}\left(\frac{\partial v}{\partial\rho_2}\right)^2 + \frac{H_1 H_2}{H_3}\left(\frac{\partial v}{\partial\rho_3}\right)^2 \tag{4}$$

$$= \frac{H_1 H_3}{H_2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{H_2}{H_3}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial\rho_3}\right)^2\right].$$

Se dunque $\partial v/\partial\rho_2$, $\partial v/\partial\rho_3$ saranno diverse da zero il determinante funzionale sarà pure diverso da zero e potremo considerare ρ_2 e ρ_3 come funzioni di v e w. Avremo perciò

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\rho_2} + \frac{\partial V}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\rho_2}, \\ \frac{\partial V}{\partial\rho_3} &= \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\rho_3} + \frac{\partial V}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\rho_3}, \end{aligned}\right.$$

e

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\rho_2} + \frac{\partial W}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\rho_2}, \\ \frac{\partial W}{\partial\rho_3} &= \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\rho_3} + \frac{\partial W}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\rho_3}. \end{aligned}\right.$$

Quindi le (3) diventano

$$\begin{cases} \dfrac{H_1 H_3}{H_2}\left[\dfrac{\partial V}{\partial v}-\dfrac{\partial W}{\partial w}\right]\dfrac{\partial v}{\partial \rho_2}-\left[\dfrac{\partial V}{\partial w}H_1^2+\dfrac{\partial W}{\partial v}\right]\dfrac{\partial v}{\partial \rho_3}=0, \\ \dfrac{H_3}{H_1 H_2}\left[\dfrac{\partial W}{\partial v}+H_1^2\dfrac{\partial V}{\partial w}\right]\dfrac{\partial v}{\partial \rho_2}+\left[\dfrac{\partial V}{\partial v}-\dfrac{\partial W}{\partial w}\right]\dfrac{\partial v}{\partial \rho_3}=0, \end{cases}$$

onde, poichè il determinante (4) è differente da zero,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial v}=\dfrac{\partial W}{\partial w}, \\ H_1^2\dfrac{\partial V}{\partial w}=-\dfrac{\partial W}{\partial v}. \end{cases}$$

Sopra una superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ consideriamo un sistema di linee ortogonali e isoterme

$$\lambda=\lambda(\rho_2,\rho_3), \qquad \mu=\mu(\rho_2,\rho_3).$$

Avremo

$$\begin{cases} \dfrac{H_3}{H_2}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}=\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_3}, \\ \dfrac{H_2}{H_3}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}=-\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_2}. \end{cases}$$

Consideriamo ρ_2 e ρ_3 come funzioni di λ e μ. Sarà

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \rho_2}=\dfrac{\partial V}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}+\dfrac{\partial V}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_2}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \rho_3}=\dfrac{\partial V}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}+\dfrac{\partial V}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_3}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \rho_2}=\dfrac{\partial W}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}+\dfrac{\partial W}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_2}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \rho_3}=\dfrac{\partial W}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}+\dfrac{\partial W}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_3}. \end{cases}$$

Le (3) diventano quindi

$$\begin{cases} \dfrac{H_3}{H_2}\left(H_1\dfrac{\partial V}{\partial \lambda}-\dfrac{\partial W}{\partial \mu}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}-\left(H_1\dfrac{\partial V}{\partial \mu}+\dfrac{\partial W}{\partial \lambda}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}=0, \\ \dfrac{H_2}{H_3}\left(H_1\dfrac{\partial V}{\partial \lambda}-\dfrac{\partial W}{\partial \mu}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}+\left(H_1\dfrac{\partial W}{\partial \mu}+\dfrac{\partial W}{\partial \lambda}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}=0, \end{cases}$$

e, poichè abbiamo supposto di poter esprimere ρ_3 e ρ_2 come funzioni di λ e μ, dovrà essere diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{H_3}{H_2}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}, & -\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3} \\ \dfrac{H_2}{H_3}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}, & \dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2} \end{vmatrix}$$

e per conseguenza

$$(5) \qquad \begin{cases} H_1 \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial W}{\partial \mu}, \\ H_1 \dfrac{\partial V}{\partial \mu} = -\dfrac{\partial W}{\partial \lambda}. \end{cases}$$

Affinchè un sistema di linee $V = \text{cost.}$, $W = \text{cost.}$ possa essere un sistema di linee isoterme della superficie $\rho_1 = \text{cost.}$, dovremo avere, scegliendo convenientemente λ e μ,

$$V = V(\lambda) \quad , \quad W = W(\mu);$$

quindi, a causa della relazione

$$H_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{\partial W}{\partial \mu},$$

risulterà

$$(6) \qquad H_1 = \varphi(\lambda)\, \psi(\mu),$$

cioè la H_1 dovrà essere il prodotto di una funzione di λ per una di μ, o anche

$$H_1 = \varphi_1(V)\, \psi_1(W).$$

Reciprocamente, se la H_1 si potrà mettere sotto la forma (6), si potrà prendere una funzione di λ e una di μ in modo che soddisfino alle (5), quando le funzioni φ e ψ siano continue e φ sia diversa da zero.

Basterà infatti prendere

$$(7) \qquad V_1 = a \int \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} \quad , \quad W_1 = a \int \psi(\mu)\, d\mu.$$

Sulla superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ consideriamo la linea $\varphi(\lambda, \mu) = \text{cost.}$, di cui l'arco sia s. Indichiamo con n una normale alla s. Avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial n} = \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial n} + \dfrac{\partial V}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial n}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial s} + \dfrac{\partial V}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial s}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial n} = \dfrac{\partial W}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial n} + \dfrac{\partial W}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial n}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial s} = \dfrac{\partial W}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial s} + \dfrac{\partial W}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial s}: \end{cases}$$

quindi, scegliendo convenientemente le direzioni positive di s ed n,

$$(8) \qquad H_1 \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial n}, \quad H_1 \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial s}.$$

Le due funzioni V e W secondochè si considerano come funzioni di ρ_2 e ρ_3, v e w, λ e μ, soddisfano alle equazioni

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\dfrac{H_3 H_1}{H_2}\dfrac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\dfrac{H_2 H_1}{H_3}\dfrac{\partial V}{\partial\rho_3}\right)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\dfrac{H_3}{H_2 H_1}\dfrac{\partial W}{\partial\rho_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\dfrac{H_2}{H_3 H_1}\dfrac{\partial W}{\partial\rho_3}\right)=0; \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\dfrac{\partial}{\partial w}\left(H_1^2\dfrac{\partial V}{\partial w}\right)=0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial w^2}+\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{l}{H_1^2}\dfrac{\partial W}{\partial v}\right)=0; \end{cases}$$

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(H_1\dfrac{\partial V}{\partial\lambda}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(H_1\dfrac{\partial V}{\partial\mu}\right)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial W}{\partial\lambda}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial W}{\partial\mu}\right)=0. \end{cases}$$

Dalle (γ) si deduce per le V e W un altro significato. Esse rappresentano, eguagliate a delle costanti, le linee di livello e le linee di flusso della elettricità o del calore sulla superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ se in essa la conducibilità viene espressa per la funzione $H_1(\lambda, \mu)$ (Vedi al § 4).

Quando la H_1 ha la forma (6), allora, oltre i valori (7) per V e W, si possono trovare alcune di queste funzioni che si possono esprimere per il prodotto di una funzione di λ per una funzione di μ, o anche per il prodotto di una funzione di V_1 per una funzione di W_1.

Infatti la prima delle (γ) diviene, ponendo

$$V = K_1(\lambda)\, K_2(\mu)$$

e supponendo sempre $\varphi(\lambda)$ e $\psi(\mu)$ diversi da zero,

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi(\lambda)\dfrac{\partial K_1(\lambda)}{\partial\lambda}\right)}{\varphi(\lambda)\, K_1(\lambda)}+\frac{\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\psi(\mu)\dfrac{\partial K_2(\mu)}{\partial\mu}\right)}{\psi(\mu)\, K_2(\mu)}=0:$$

e questa sarà verificata prendendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi(\lambda)\dfrac{\partial K_1(\lambda)}{\partial\lambda}\right)=a\varphi(\lambda)\, K_1(\lambda) \\ \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\psi(\mu)\dfrac{\partial K_2(\mu)}{\partial\mu}\right)=-\,a\psi(\mu)\, K_2(\mu) \end{cases}$$

in cui a è una costante.

Analogamente si ha per la W.

Sia $K_1(\lambda, a_p)$ il valore di K_1 quando a assume il valore a_p. Avremo

$$(a_p - a_q)\,\varphi(\lambda)\, K_1(\lambda, a_p)\, K_1(\lambda, a_q)$$

$$= K_1(\lambda, a_q)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi(\lambda)\frac{\partial K_1(\lambda, a_p)}{\partial\lambda}\right) - K_1(\lambda, a_p)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi(\lambda)\frac{\partial K_1(\lambda, a_q)}{\partial\lambda}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\varphi(\lambda)\left\{K_1(\lambda, a_q)\frac{\partial K_1(\lambda, a_p)}{\partial\lambda} - K_1(\lambda, a_p)\frac{\partial K_1(\lambda, a_q)}{\partial\lambda}\right\}\right];$$

quindi, integrando su tutta la linea λ e supponendo che questa linea sia chiusa,

$$(a_p - a_q) \int_\lambda \varphi(\lambda) K_1(\lambda, a_p) K_1(\lambda, a_q) d\lambda = 0.$$

Analogamente, supponendo la linea μ chiusa, abbiamo

$$(a_p - a_q) \int_\lambda \psi(\mu) K_2(\mu, a_p) K_2(\mu, a_q) d\mu = 0.$$

Riprendiamo le equazioni (γ) nel caso in cui sia $H_1 = \varphi(\lambda)\,\psi(\mu)$. Avremo

$$\psi(\mu) \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi(\lambda) \frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \varphi(\lambda) \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\psi(\mu) \frac{\partial V}{\partial\mu}\right) = 0$$

e questa equazione può scriversi, prendendo

$$\lambda_1 = \int \frac{\partial\lambda}{\varphi(\lambda)} \quad , \quad \mu_1 = \int \frac{\partial\mu}{\psi(\mu)} ,$$

$$\frac{1}{\varphi_1^2(\lambda_1)} \frac{\partial^2 V}{\partial\lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1^2(\mu_1)} \frac{\partial^2 V}{\partial\mu_1^2} = 0$$

in cui con $\psi_1(\lambda_1)$ e $\psi_1(\mu_1)$ si intende il risultato della sostituzione di $\lambda(\lambda_1)$ e $\mu(\mu_1)$ in $\varphi(\lambda)$ e $\psi(\mu)$.

Ponendo invece

$$\lambda_2 = \int \varphi(\lambda)\, d\lambda \quad , \quad \mu_2 = \int \psi(\mu)\, d\mu ,$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\varphi_2^2(\lambda_2) \frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi_2}\left(\psi_2^2(\mu_2) \frac{\partial V}{\partial\mu_2}\right) = 0.$$

La funzione associata W verifica le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{1}{\varphi_1^2(\lambda)} \frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left(\frac{1}{\psi_1^2(\mu_1)} \frac{\partial W}{\partial\mu_1}\right) = 0 , \\ & \varphi_2^2(\lambda_2) \frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_2^2} + \psi_2^2(\mu_2) \frac{\partial^2 W}{\partial\mu_2^2} = 0 , \end{aligned} \right.$$

secondochè si considera come funzione di λ_1 e μ_1 oppure di λ_2 e μ_2.

§ 2. - Funzioni analoghe a quella di Green.

In uno spazio a tre dimensioni S si abbia uno spazio s che possa essere a una, due o tre dimensioni.

Per il teorema di Green avremo, se V rappresenta una funzione che in S non ha alcuna singolarità e che verifica l'equazione $\Delta^2 V = 0$,

$$\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma = V(x', y', z'),$$

in cui r rappresenta la distanza del punto x', y', z' appartenente ad s dal punto $x\ y\ z$ della superficie σ contorno di S; n è la normale a σ diretta verso l'interno di S. Sia ρ una funzione continua dei punti di s. Moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per $\rho(s)\,ds$ e integrando in tutto lo spazio s, avremo

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ V \frac{\partial}{\partial n}\int_s \frac{\rho(s)}{r}\,ds - \frac{\partial V}{\partial n}\int_s \frac{\rho(s)}{r}\,ds \right\} d\sigma = \int_s V\,(x'(s)\,y'(s)\,z'(s))\,\rho(s)\,ds\,.$$

Ora

$$\int_s \frac{\rho(s)\,ds}{r}$$

è la funzione potenziale di una massa di densità ρ distribuita nello spazio s. Chiamando questa funzione $\varphi(x, y, z)$ avremo (2)

$$(1) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(V\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = \int_s V\rho(s)\,ds\,.$$

Posto

$$\int_s \rho(s)\,ds = m\,,$$

cioè chiamando m la massa distribuita nello spazio s, si avrà, supponendo la massa m diversa da zero,

$$(2) \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(V\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\,ds}{\int_s \rho(s)\,ds}\,.$$

Se $\rho =$ cost. si ha

$$m = \rho s \quad , \quad \varphi = \rho\int_s \frac{ds}{r}$$

e

$$(3) \qquad \frac{1}{4\pi s\rho}\int_\sigma \left(V\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = V',$$

in cui V' rappresenta la media dei valori che ha la funzione V nello spazio s. Se V è costante (3) ed eguale a V_1 lungo lo spazio s, si trova comunque sia ρ

$$(4) \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(V\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = V_1\,.$$

(2) Se lo spazio s è a tre o a due dimensioni la (1) si deduce subito dalla formula di GREEN.

(3) Questo caso non si presenterà altro che quando lo spazio s è a una o due dimensioni, altrimenti la V sarebbe sempre costante.

Sia la funzione ψ una funzione finita e continua insieme alle derivate prime nello spazio S, e verifichi nello spazio stesso all'equazione differenziale $\Delta^2 \psi = 0$.

Le (2), (3) e (4) dànno luogo subito alle altre:

$$(2') \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi) \right] d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\, ds}{\int_s \rho(s)\, ds},$$

$$(3') \qquad \frac{1}{4\pi s \rho}\int_\sigma \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi) \right] d\sigma = V',$$

$$(4') \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi) \right] d\sigma = V_1 .$$

Nella (3′) la ρ va considerata come costante.

Sia $\lambda(\sigma)$ una funzione dei punti del contorno. Avremo evidentemente che la (2′), la quale comprende le (3′) e (4′), potrà scriversi

$$(2'') \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left[\left(V + \lambda(\sigma)\frac{\partial V}{\partial n}\right) \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\left((\varphi+\psi) + \lambda(\sigma)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n}\right) \right] d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\, ds}{\int_s \rho(s)\, ds}.$$

Si abbia

$$(5) \qquad \varphi + \psi + \lambda(\sigma)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} = 0;$$

la (2″) diverrà

$$(2_a) \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(V + \lambda(\sigma)\frac{\partial V}{\partial n}\right) \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\, ds}{\int_s \rho(s)\, ds}.$$

Se in S, oltre lo spazio s, abbiamo un altro spazio s_1 in cui sia distribuita una massa m_1 colla densità ρ_1, e le φ_1 e ψ_1 sono le funzioni corrispondenti alle φ e ψ per questo spazio e si ha

$$(5') \qquad (\varphi_1 + \psi_1) + \lambda(\sigma)\frac{\partial(\varphi_1+\psi_1)}{\partial n} = 0,$$

sarà

$$(2_b) \qquad \frac{1}{4\pi m_1}\int_\sigma \left(V + \lambda(\sigma)\frac{\partial V}{\partial n}\right) \frac{\partial(\varphi_1+\psi_1)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\int_{s_1} V\rho_1(s_1)\, ds_1}{\int_{s_1} \rho_1(s_1)\, ds_1}.$$

Prendiamo nella (2_a) $V = \psi_1$ e nella (2_b) $V = \psi$. Avremo

$$\frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(\psi_1 + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n}\,d\sigma = \frac{\int_s \psi_1 \rho(s)\,ds}{\int_s \rho(s)\,ds},$$

$$\frac{1}{4\pi m_1}\int_\sigma \left(\psi + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi_1+\psi_1)}{\partial n}\,d\sigma = \frac{\int_{s_1} \psi \rho_1(s_1)\,ds_1}{\int_{s_1} \rho_1(s_1)\,ds_1}$$

e sottraendo si ottiene, avendo riguardo al teorema di GREEN,

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\left(\psi_1 + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left(\psi + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right] d\sigma$$

$$= \int_s \psi_1 \rho(s)\,ds - \int_s \psi\rho(s_1)\,ds_1;$$

quindi, per le (5) e (5′),

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma = \int_s \psi_1 \rho(s)\,ds - \int_{s_1} \psi\rho_1(s_1)\,ds_1.$$

Se σ' e σ'_1 sono due superficie che comprendono rispettivamente lo spazio s e lo spazio s_1, abbiamo

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'} \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'_1} \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma'_1,$$

e applicando alle due superficie σ' e σ'_1 la formula (1) avremo

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma = -\int_s \varphi_1 \rho(s)\,ds + \int_{s_1} \varphi\rho_1(s_1)\,ds_1,$$

onde

(6) $$\int_s (\psi_1 + \varphi_1)\rho(s)\,ds = \int_{s_1} (\varphi + \psi)\rho_1(s_1)\,ds_1.$$

Questa relazione comprende il *teorema di Gauss*. Se supponiamo infatti che lo spazio S si estenda indefinitamente si avrà che ψ_1 e ψ andranno a zero e la (6) diverrà

$$\int_s \varphi_1 \rho(s)\,ds = \int_{s_1} \varphi\rho_1(s_1)\,ds_1.$$

Avremo per conseguenza anche la relazione

$$(6')\qquad \int_s \varphi_1\, \rho(s)\, ds = \int_{s_1} \varphi\rho_1(s_1)\, ds_1 .$$

La formula (6) si è dimostrata quando gli spazî s e s_1 erano interni ad S, ma è evidente che essa vale anche quando sono ambedue esterni.

È facile trovare i diversi significati fisici che può avere la formula (6).

Supponiamo diviso tutto lo spazio mediante le superficie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ in q parti $S_1, S_2, \ldots, S_q$. Almeno una di queste parti si dovrà estendere indefinitamente. Il contorno σ_r di S_r sia formato dalle superficie $\sigma_{r,1}$, $\sigma_{r,2}, \ldots, \sigma_{r,\mu_r}$.

Se s_r, in cui è distribuita una massa m_r colla densità ρ_r, è interno ad S_r, potremo applicare a questo spazio la formula (2′) e avremo

$$(7)\qquad \frac{1}{4\pi}\sum_1^{\mu_r}{}_\nu \int_{\sigma_{r,\nu}} \left[V\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi)\right] d\sigma_{r,\nu} = \int_{s_r} V\rho_r(s_r)\, ds_r ,$$

la quale varrà anche se la massa m_r sarà uguale a zero.

Se le funzioni ψ e V e le loro derivate non hanno alcuna singolarità in nessun punto interno agli altri spazii S_l, avremo anche le $q-1$ equazioni

$$(7')\qquad \frac{1}{4\pi}\sum_1^{\mu_l}{}_\nu \int_{\sigma_{l,\nu}} \left[V\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi)\right] d\sigma_{l,\nu} = 0.$$

Moltiplicando queste equazioni per i coefficienti costanti λ_l e sommandole colla precedente moltiplicata per λ_r, si deduce, supponendo V, φ, ψ continue in tutto lo spazio,

$$(8)_a\qquad \lambda_r \int_{s_r} V\rho_r(s_r)\, ds_r = \frac{1}{4\pi}\sum_1^{p}{}_\nu \int_{\sigma_\nu} d\sigma_\nu \left\{ V\left[\lambda_{\nu,1}\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,2}}\right] \right.$$

$$\left. -(\varphi+\psi)\left[\lambda_{\nu,1}\frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}}\right]\right\}$$

in cui sono indicati con $S_{\nu,1}$, $S_{\nu,2}$ i due campi divisi dalla superficie σ_ν, con

$$\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,1}}\ ,\qquad \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,2}}$$

le derivate della funzione $\varphi+\psi$ prese rispetto alle normali a σ_ν dirette rispettivamente verso l'interno dei campi $S_{\nu,1}$ e $S_{\nu,2}$, con $\lambda_{\nu,1}$ e $\lambda_{\nu,2}$ i coefficienti λ corrispondenti ai due campi $S_{\nu,1}$, $S_{\nu,2}$.

Supponiamo sopra ogni superficie σ_ν

$$(9)_a\qquad \lambda_{\nu,1}\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,2}} = 0.$$

In tale ipotesi la $(8)_a$ assume la forma

$$(8')_a \quad \lambda_r \int_{s_r} V\rho_r(s_r)\, ds_r = -\frac{1}{4\pi}\sum_1^p{}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi+\psi)\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}}\right) d\sigma_\nu .$$

Se in $S_{r'}$ abbiamo un altro spazio $s_{r'}$, in cui è distribuita una massa $m_{r'}$, di densità $\rho_{r'}$, di cui la funzione potenziale è φ', mentre ψ' è una funzione finita e continua in tutto lo spazio insieme alle derivate prime, escluse le superficie σ_ν ove si ha

$$(9)_b \qquad \lambda_{\nu,1}\frac{\partial(\varphi'+\psi')}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial(\varphi'+\psi')}{\partial n_{\nu,2}} = 0,$$

e che verifica in tutto lo spazio (escluse le superficie σ_ν) all'equazione $\Delta^2\psi' = 0$, avremo evidentemente

$$(8')_b \quad \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} V\rho_{r'}(s_{r'})\, ds_{r'} = -\frac{1}{4\pi}\sum_1^p{}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi'+\psi')\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}}\right) d\sigma_\nu .$$

Poniamo nella $(8')_a$

$$V = \psi'$$

e nella $(8')_b$ $V = \psi$. Avremo sottraendo

$$\lambda_r \int_{s_r} \psi'\rho_r(s_r)\, ds_r - \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} \psi\rho_{r'}(s_{r'})\, ds_{r'} = -\frac{1}{4\pi}\sum_1^p{}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi+\psi)\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial\psi'}{\partial n_{\nu,1}}\right.$$

$$\left. + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial\psi'}{\partial n_{\nu,2}}\right) d\sigma_\nu + \frac{1}{4\pi}\sum_1^p{}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi'+\psi')\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial\psi}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial\psi}{\partial n_{\nu,2}}\right) d\sigma_\nu$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left\{ \sum_1^p{}_\nu \int_{\sigma_\nu} \left[\psi\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial\psi'}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial\psi'}{\partial n_{\nu,2}}\right) - \psi'\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial\psi}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial\psi}{\partial n_{\nu,2}}\right)\right] d\sigma_\nu \right.$$

$$\left. - \sum_1^p{}_\nu \int_{\sigma_\nu} \left[\varphi\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial\varphi'}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{\partial\varphi'}{\partial n_{\nu,2}}\right) - \varphi'\left(\lambda_{\nu,1}\frac{\partial\varphi}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2}\frac{d\varphi}{dn_{\nu,2}}\right)\right] d\sigma_\nu \right\}$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left\{ \sum_1^q{}_\mu \lambda_\mu \int_{\sigma'_\mu} \left(\psi\frac{\partial\psi'}{\partial n} - \psi'\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma'_\mu - \sum_1^q{}_\mu \lambda_\mu \int_{\sigma'_\mu} \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma'_\mu \right\}$$

$$= \frac{\lambda_r}{4\pi}\int_{\sigma'_r} \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma'_r + \frac{\lambda_{r'}}{4\pi}\int_{\sigma'_{r'}} \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma'_{r'}$$

$$= -\lambda_r \int_{s_r} \varphi'\rho_r\, ds_r + \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} \varphi\rho_{r'}\, ds_{r'} ,$$

onde

$$(10) \qquad \lambda_r \int_{s_r} (\varphi' + \psi')\, \rho_r\, (s_r)\, ds_r = \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} (\varphi + \psi)\, \rho_{r'}\, (s_{r'})\, ds_{r'}.$$

Questa equazione è del tutto analoga alla (6). Anche questa comprende il teorema di Gauss ed è facile ricavarne il significato.

Prendiamo $\lambda_r = \lambda_{r'}$; essa ci dice che se abbiamo due corpi A, B elettrizzati in presenza di un numero qualunque di dielettrici, il potenziale di uno di essi A e della elettricità indotta da esso nei dielettrici su B è eguale al potenziale di B e delle elettricità da esso indotte nei dielettrici sull'altro.

A questo teorema ne corrisponde uno analogo per il magnetismo.

Supposto $\lambda_r = \lambda'_r$, la (10) dà luogo anche all'altra analoga alla (6)

$$(10') \qquad \int_{s_r} (\varphi' + \psi')\, \rho_r\, (s_r)\, ds_r = \int_{s_{r'}} (\varphi + \psi)\, \rho_{r'}\, (s_{r'})\, ds_{r'}.$$

Prendiamo $\lambda_r = 1$, $\lambda_l = 0$ per tutti gli altri valori di l, e $r' = r$. Avremo che le equazioni scritte divengono

$$(7)_1 \qquad \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'_r} \left[V \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \psi) - \frac{\partial V}{\partial n} (\varphi + \psi) \right] d\sigma'_r = \int_{s_r} V \rho_r\, ds_r ,$$

$$(9_a)_1 \quad \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial n'_r} = 0, \qquad (9_b)_1 \quad \frac{\partial (\varphi' + \psi')}{\partial n'_r} = 0,$$

$$(8_a)_1 \qquad -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'_r} (\varphi + \psi) \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma'_r = \int_{s_r} V \rho_r\, ds_r ,$$

$$(8_b)_1 \qquad -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'_r} (\varphi' + \psi') \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma_r = \int_{s'_r} V \rho_r\, ds_r ,$$

$$(10)_1 \qquad \int_{s_r} (\varphi' + \psi')\, \rho_r\, ds_r = \int_{s'_r} (\varphi + \psi)\, \rho'_r\, ds'_r .$$

Se la funzione V, invece di verificare l'equazione

$$\Delta^2 V = 0,$$

soddisfa all'altra

$$\Delta^2 V = f(x, y, z),$$

allora le (2_a), (8_a) e $(8_a)_1$ divengono

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi m} \int_{\sigma} \left(V + \lambda(\sigma) \frac{\partial V}{\partial n} \right) \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{m} \int_{S} (\varphi + \psi) f\, dS = \frac{\int_s V \rho(s)\, ds}{\int_s \rho(s)\, ds} ; \\ & \int_{s_r} V \rho(s_r)\, ds_r = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^p {}_{\nu} \int_{\sigma_\nu} (\varphi + \psi) \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}} \right) d\sigma_\nu \\ & - \sum_1^q {}_{\mu} \lambda_\mu \int_{S_\mu} (\varphi + \psi) f\, dS_\mu \; ; \; \int_{s_r} V \rho(s_r)\, ds_r = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_r} (\varphi + \psi) \frac{\partial V}{\partial n} - \int_{S_r} (\psi + \varphi) f\, dS_r . \end{aligned} \right.$$

Queste formule possono servire a darci i valori di una funzione incognita V che verifica l'equazione differenziale

$$\Delta^2 V = f(x, y, z)$$

in S o in tutto lo spazio, quando si conoscano al contorno σ i valori di $V + \lambda(\sigma)\, \partial V / \partial n$ o i valori di $\partial V / \partial n$, o a determinare la V sapendo i valori di

$$\lambda_{r,1} \frac{\partial V}{\partial n_{r,1}} + \lambda_{r,2} \frac{\partial V}{\partial n_{r,2}}$$

sopra delle superficie in cui le derivate della funzione incognita non sono continue.

Il problema viene ridotto sempre a trovare delle funzioni φ e ψ che verificano alle relazioni (5), (9_a) e $(9_a)_1$ sopra le superficie in cui sono noti i dati caratteristici della V. Le funzioni ψ vengono così ad essere determinate in modo analogo alle funzioni di Green. Esse godono anche di proprietà reciproche pure analoghe alle note proprietà reciproche della funzione di Green espresse mediante le relazioni (6), (6'), (10), (10'), $(10)_1$, di cui è stato accennato il significato fisico.

Se nel campo s la densità è costante, le (11) ci daranno subito la media dei valori della funzione incognita nello stesso campo.

È più importante il caso in cui nello spazio s si sappia che la V ha un valore costante. Allora le (11) ci dànno subito il valore costante della funzione incognita nei punti dello spazio s, il quale, come è già stato osservato, deve essere in questo caso a due o una dimensione.

Si presentano spesso dei casi in cui si sa *a priori* che lungo date linee il valore della funzione incognita deve risultare costante ed allora per la φ potremo considerare la funzione potenziale di masse a una sola dimensione distribuite su queste linee nel modo il più conveniente per la determinazione della funzione ψ.

In questo caso rientra il problema della determinazione di funzioni potenziali che si sa essere indipendenti da una coordinata e di cui sono date delle condizioni caratteristiche del genere di quelle indicate. Se la funzione potenziale è indipendente dalla coordinata ρ_1, dovremo considerare per la φ la funzione potenziale di masse distribuite con una densità qualunque sopra una delle linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

e determinare convenientemente la ψ. La legge con cui deve distribuirsi sulla linea $\rho_2 = \text{cost.}$, $\rho_3 = \text{cost.}$ la densità, si potrà cercare, quando sarà possibile, in modo che la funzione $\varphi + \psi$ venga a risultare anche essa indipendente dalla coordinata ρ_1. Il problema in tal caso può trattarsi coll'impiegare soltanto due coordinate ρ_2 e ρ_3.

Per potere applicare la terza delle (9) è stato necessario ammettere che la massa totale distribuita in s sia uguale allo zero, quando lo spazio S è finito.

In tal caso potremo prendere per s due linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

e distribuire su esse due masse eguali e di segno opposto; così la terza delle (11) ci fornisce la differenza dei valori della V lungo le due linee che si considerano e ci dà quindi i valori della V all'infuori di una costante.

Se si osserva che nel caso delle coordinate cartesiane

$$\rho_1 = x \quad , \quad \rho_2 = y \quad , \quad \rho_3 = z$$

si ha $H_1 = 1$, avremo considerando le funzioni potenziali indipendenti da ρ_1 che le funzioni associate corrispondono sempre alle coordinate isoterme sulle superficie $\rho_1 = \text{cost.}$, quindi le considerazioni precedenti portano ai *potenziali logaritmici* per lo studio dei problemi di coordinate isoterme nel piano.

Quando si considerano le coordinate cilindriche

$$\rho_1 = \theta \quad , \quad \rho_2 = r \quad , \quad \rho_3 = z$$

si ha

$$H_1 = r \quad , \quad H_2 = 1 \quad , \quad H_3 = 1.$$

Si vede quindi come potranno sussistere delle funzioni potenziali indipendenti dalla coordinata θ; saranno queste le *funzioni potenziali simmetriche* rispetto ad un asse. In tal caso per la funzione φ sarà da prendersi la funzione potenziale di una massa omogenea ad una dimensione distribuita sopra una circonferenza normale all'asse di simmetria e col centro su questo asse.

La funzione ψ convenientemente determinata nei vari casi sarà da sostituirsi alla ordinaria funzione di GREEN.

La funzione φ può porsi sotto la forma trovata dal ch. prof. BELTRAMI

$$\varphi = \frac{2\,M}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda^2)\sqrt{s}} ,$$

in cui s è dato da

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda^2} - \frac{(z - z_0)^2}{\lambda^2} ;$$

λ_1 è la radice positiva dell'equazione $s = 0$; a è il raggio del cerchio su cui è distribuita la massa M e z_0 la distanza del cerchio dall'origine.

È da osservare che delle tre formule (11) la prima serve alla soluzione di problemi sul calore e sulla elettrostatica, la seconda ai problemi del magnetismo, e la terza ai problemi di idrodinamica ed elettrodinamica.

§ 3. – Formule e funzioni analoghe a quelle di Green per le funzioni associate a quelle potenziali.

Riprendiamo le formule (γ) del § 1. Supposte due funzioni associate W_1 e W_2 che in un dato campo a due dimensioni di λ e μ non hanno alcuna singolarità, avremo

$$\int_s \frac{1}{H_1}\left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial n} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial n}\right) ds = 0 \tag{1}$$

in cui s rappresenta l'arco del contorno, n la normale.

Per tutti i punti di s si conducano le linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

e si ottenga così una superficie chiusa σ, oppure una superficie aperta indefinita.

La (1) varrà per qualunque sezione prodotta in questa superficie con una superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ Moltiplicando quindi la (1) per $d\rho_1$ e integrando a tutti i valori di ρ_1 risulta

$$\int d\rho_1 \int_s \frac{1}{H_1}\left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial n} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial n}\right) ds = 0$$

e osservando che l'elemento superficiale della superficie σ è $H_1 d\rho_1 ds$ avremo

$$\int_\sigma \frac{1}{H_1^2}\left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial n} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial n}\right) d\sigma = 0 .$$

La (1) può anche porsi sotto un'altra forma ponendo mente alle equazioni (8) del § 1. Questa forma è

$$\int_s \left(W_1 \frac{\partial V_2}{\partial s} - W_2 \frac{\partial V_1}{\partial s}\right) ds = 0, \tag{1'}$$

in cui l'integrale è esteso ad un contorno chiuso qualunque che non ha nell'interno nessun punto di singolarità.

Di qui potrebbe dedursi che

$$\int_{\lambda_0, \mu_0}^{\lambda, \mu} \left(W_1 \frac{\partial V_2}{\partial s} - W_2 \frac{\partial V_1}{\partial s}\right) ds$$

(in cui la integrazione è estesa ad una linea aperta l che va da un punto di coordinate λ_0, μ_0 ad un punto di coordinate λ, μ) è indipendente dalla linea l che si percorre, ma dipende soltanto dai punti estremi (λ_0 , μ_0), (λ , μ).

In modo analogo a quello con cui si giunge alla (1), si ha

$$\int_s \mathrm{H}_1\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial n} - \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds = 0,$$

che può anche scriversi

$$\int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial s} - \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial s}\right) ds = 0$$

quando la V_1 non ha alcuna singolarità entro il campo che si considera.

Le formule scritte precedentemente possono dedursi come conseguenze da questa. Se infatti supponiamo V_1, W_1, V_2, W_2 monodrome, l'equazione precedente ci dà per mezzo di una integrazione per parti

$$\int_s \left(\mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s} - \mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial s}\right) ds = 0,$$

che non è altro che la (1').

Supponiamo ora che girando intorno ad un punto a del campo che si considera la funzione finita V_2 sia polidroma ed il suo valore cresca di m ad ogni giro, mentre la $\partial \mathrm{V}_2/\partial n$, se coll'avvicinarsi di s ad a diviene infinita, lo sia di un ordine inferiore all'unità rispetto alla lunghezza della linea s; W_2 sia monodroma.

Se s_1 è una curva qualunque che include a avremo

$$\int_{s_1} \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial n} - \mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial n}\right) ds_1 + \int_{s_1} \mathrm{H}_1\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial n} - \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds_1$$

$$= \int_{s_1} \left[\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial s_1} + \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial s_1}\right) - \left(\mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s_1} + \mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial s_1}\right)\right] ds_1$$

$$= \int_{s_1} \frac{d(\mathrm{V}_2 \mathrm{W}_1 - \mathrm{V}_1 \mathrm{W}_2)}{ds_1} ds_1 = \int_{s_1} \frac{d(\mathrm{V}_2 \mathrm{W}_1)}{ds_1} ds_1.$$

Se la curva s_1 si avvicina indefinitamente ad a si otterrà

$$\lim \int_{s_1} \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial n} - \mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial n}\right) ds_1 = m\mathrm{W}_1^{(a)}$$

in cui $\mathrm{W}_1^{(a)}$ è il valore in a della funzione W_1.

Per le formule scritte precedentemente avremo dunque, quando sono verificate le indicate proprietà nel punto a,

$$\int_s \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial n} - \mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial n}\right) ds = m\mathrm{W}_1^{(a)},$$

formula che ci dà il valore di W_1 nel punto a in funzione dei valori che essa e la sua derivata rispetto alla normale n prendono al contorno s, quando questo contorno limita un campo nel cui interno si trova a.

Se W_3 è una funzione associata senza alcuna singolarità, la formula precedente dà luogo subito all'altra

$$\int_s \frac{1}{H_1}\left[W_1 \frac{\partial(W_2+W_3)}{\partial n} - (W_2+W_3)\frac{\partial W_1}{\partial n}\right] ds = m W_1^{(a)}, \tag{2}$$

la quale, secondochè lungo s si ha

$$\frac{\partial(W_2+W_3)}{\partial n} = 0 \tag{3}$$

oppure

$$W_2 + W_3 = 0, \tag{3'}$$

conduce alle due seguenti

$$\left\{\begin{aligned} &-\int_s \frac{1}{H_1}\frac{\partial W_1}{\partial n}(W_2+W_3)\, ds = m W_1^{(a)}, \\ &\int_s \frac{1}{H_1} W_1 \frac{\partial(W_2+W_3)}{\partial n}\, ds = m W_1^{(a)}. \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

La formula (2) può anche scriversi

$$\int_s \left[W_1 \frac{\partial(V_2+V_3)}{\partial s} - (W_2+W_3)\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m W_1^{(a)}$$

e per mezzo di una integrazione per parti

$$\int_s \left[(V_2+V_3)\, H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - (W_2+W_3)\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m\,(W_1^{(a)} - W_1'), \tag{4}$$

in cui W_1' è il valore di W_1 nel punto di s in cui si cominciano a contare gli archi nell'eseguire l'integrazione indicata nel primo membro.

Suppongasi che la funzione V_2', la cui funzione associata è W_2', goda rispetto al punto b interno al campo che si considera le stesse proprietà di V_2 rispetto ad a. Avremo allora evidentemente

$$\int_s \left[V_2' H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - W_2' \frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m\,(W_1^{(b)} - W_1'). \tag{4'}$$

Sottraendo la (4') dalla (4) si ottiene

$$\int_s \left[(V_2 - V_2' + V_3)\, H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - (W_2 - W_2' + W_3)\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m\,(W_1^{(b)} - W_1^{(a)}). \tag{5}$$

Sia V_1 la funzione potenziale di masse distribuite sopra la superficie chiusa σ che si ottiene conducendo per tutti i punti di s le linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

Avremo allora, indicando con n' il prolungamento di n dalla parte opposta di s se esternamente ad s le V_2, V'_2, W_2, W'_2 non hanno singolarità,

$$\int_s \left\{ (V_2 - V'_2) H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n'} - (W_2 - W'_2) \frac{\partial V_1}{\partial s} \right\} ds = 0$$

e quindi indicando con $\rho(s)$ la densità superficiale

$$\frac{4\pi}{m} \int_s (V_2 - V'_2) H_1 \rho(s) ds = W_1^{(a)} - W_1^{(b)} . \tag{6}$$

La (6) valga per qualunque sezione prodotta sulla superficie σ da una superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ Avremo allora

$$c \int_\sigma (V_2 - V'_2) \rho(\sigma) d\sigma = W_1^{(a)} - W_1^{(b)} ,$$

in cui c è una costante che si determina facilmente e $W_1^{(a)}$ e $W_1^{(b)}$ sono i valori costanti di W_1 lungo le linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

che passano fra i punti a e b.

La formula (5) ci dà, quando si conosce la funzione V_1, la sua associata W_1 all'infuori di una costante arbitraria per mezzo delle funzioni V_2, V'_2, V_3, W_2, W'_2, W_3 e di una sola quadratura. Vedremo alcuni casi in cui si possono determinare tali funzioni. Osserviamo intanto che esse debbono esser tali che la V_2 deve risultare polidroma e questo ci porta subito a ricercare se per la V_2 può prendersi la funzione potenziale delle azioni magnetiche di una corrente elettrica, o ciò che è lo stesso, il potenziale di velocità di un liquido che contiene un filetto vorticoso.

Se è possibile che lungo una linea $\rho_2 = \text{cost.}$, $\rho_3 = \text{cost.}$ esista una corrente elettrica la cui funzione potenziale elettromagnetica sia indipendente da ρ_1, questa potrà prendersi per la V_2 e la sua associata per la W_2 ogni qualvolta che per le derivate della V_2 in vicinanza dei punti percorsi dalla corrente siano verificate le condizioni imposte precedentemente. È facile trovare il significato fisico che debbono avere V_2 e V_3 quando sono verificate le (3), (3') e la V_2 si considera come il potenziale di velocità di un fluido con un filetto vorticoso.

Se le coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3, sono le coordinate cartesiane x, y, z, si vede che il filetto vorticoso da considerare sarà il filetto rettilineo indefinito parallelo all'asse x $(\rho_2 = y_0 , \rho_3 = z_0)$. Per la funzione $W_2(y, z)$ si ottiene quindi la funzione $\log r$ in cui r è la distanza del punto (y, z) dal punto (y_0, z_0).

Si ha infatti che in questo caso le due funzioni V_1 e W_1 verificano ad una stessa equazione differenziale.

Passiamo al caso delle funzioni potenziali simmetriche, cioè poniamo

$$\rho_1 = \theta \quad , \quad \rho_2 = r \quad , \quad \rho_3 = z .$$

La V_2 sarà la funzione potenziale di una corrente elettrica circolare col centro sull'asse di simmetria e normale ad esso; la

$$W_2 = \text{cost.}$$

ci darà le linee di flusso di un liquido che ha un filetto vorticoso circolare di sezione infinitesima.

Indichiamo con a il raggio del filetto, con z_0 la distanza del centro dall'origine.

HELMHOLTZ ha trovato che

$$W_2 = \frac{r}{2\pi} M \int_0^{2\pi} \frac{\cos e de}{\sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + a^2 - 2ra\cos e}}.$$

Questo integrale può trasformarsi in modo analogo a quello con cui il prof. BELTRAMI trasforma il potenziale di un anello circolare omogeneo. Posto

$$a^2 + r^2 + (z-z_0)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad , \quad ar = \sigma_1 \sigma_2$$

si ha

$$W_2 = \frac{r}{\pi} M \int_0^{\pi} \frac{\cos e de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \cos e}}.$$

Questo integrale mediante la trasformazione di LANDEN si riduce subito ad un integrale ellittico di seconda specie.

Infatti si ponga

$$\sigma_1 \operatorname{sen}(\varphi - e) = \sigma_2 \operatorname{sen}\varphi .$$

Si otterrà

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e} = \frac{\sigma_1 \operatorname{sen} e}{\operatorname{sen}\varphi}:$$

quindi

$$\frac{\cos e de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} + \frac{1}{\sigma_1}\cos\varphi\, de$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} + \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

e, integrando fra 0 e π,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos e de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} = 2\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Quindi abbiamo W_2 sotto forma canonica,

$$W_2 = \frac{2rM}{\pi} \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

o sotto le altre forme

$$W_2 = \frac{2rM}{\pi}\sigma_1\sigma_2\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2\sqrt{(\sigma^2-\sigma_1^2)(\sigma^2-\sigma_2^2)}},$$

$$W_2 = \frac{2rM}{\pi}\sigma_1\sigma_2\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2\sqrt{s}} = \frac{2Mar^2}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2\sqrt{s}},$$

in cui σ_1 e σ_2 sono le radici positive ($\sigma_1 > \sigma_2$) della equazione

$$\frac{r^2}{\sigma^2} + \frac{(z-z_0)^2}{\sigma^2-a^2} = 1,$$

mentre

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2+\lambda^2} - \frac{(z-z_0)^2}{\lambda^2}$$

e λ_1 è la radice positiva di $s = 0$.

È facile ora passare a determinare la V_2. Partendo infatti dalla funzione potenziale simmetrica

$$V = 2\pi a^2\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{F(s)\,d\lambda}{(a^2+\lambda^2)},$$

avremo, supponendo $F(0) = 0$,

$$-r\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi a^2 r^2\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{F'(s)\,d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2}.$$

Quindi, se

$$F(s) = \sqrt{s},$$

$$-r\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi a^2 r^2\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2\sqrt{s}} = W_2$$

e per conseguenza

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi a^2(z-z_0)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)\lambda^2\sqrt{s}},$$

la quale è la funzione potenziale di una corrente elettrica circolare. Passando dalla variabile λ alla variabile σ, si ha

$$V_2 = -2\pi a^2(z-z_0)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2(a^2+\lambda^2)(\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda^2-\lambda_2^2)}}$$

$$= -2\pi a^2(z-z_0)\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{d\sigma}{(\sigma^2-a^2)\sqrt{(\sigma^2-\sigma_1^2)(\sigma^2-\sigma_2^2)}}$$

e finalmente, passando alla variabile φ,

$$V_2 = \frac{-2\pi a^2 (z - z_0)}{\sigma_1} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi}{(\sigma_1^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \operatorname{sen}^2 \varphi}} .$$

Per determinare in altro modo le due funzioni V_2 e W_2 basta partire dalla funzione potenziale di un disco omogeneo. Questa è data, se il raggio del disco è a, la distanza dell'origine dal centro è z_0, la densità è uguale ad 1, da

$$V = 2\pi a^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} f(s) \frac{d\lambda}{a^2 + \lambda^2} ,$$

ove

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{d\nu}{\sqrt{s - \nu}} = \frac{2\sqrt{s}}{\pi} ,$$

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda^2} - \frac{(z - z_0)^2}{\lambda^2} ;$$

quindi

$$V = 4 a^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \sqrt{s} \frac{d\lambda}{a^2 + \lambda^2} .$$

Derivando rispetto a z_0, ovvero rispetto a z e cambiando di segno, si otterrà la funzione potenziale di un doppio strato omogeneo di momento 1, cioè di una corrente elettrica circolare di raggio a il cui centro è in z_0.

Quindi

$$V_2 = -\frac{\partial V}{\partial z} ,$$

$$W_2 = r \frac{\partial V}{\partial r}$$

e per conseguenza

$$\left\{ \begin{aligned} V_2 &= 4 a^2 (z - z_0) \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 (a^2 + \lambda^2) \sqrt{s}} , \\ W_2 &= -4 a^2 r^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda^2)^2 \sqrt{s}} , \end{aligned} \right.$$

le quali si riducono subito alla forma canonica con operazioni inverse a quelle eseguite precedentemente.

Dalle formule trovate è facile dedurre che nel nostro caso le particolarità richieste per le derivate della funzione V_2 in prossimità dei punti della corrente sono verificate.

Vediamo ora di applicare la formula (5). Perciò bisogna considerare un campo rinchiuso da s nel cui interno capitino soltanto i due punti di polidromia a e b. Prendiamo perciò per s una linea qualunque chiusa posta tutta da una parte dell'asse di simmetria, oppure prendiamo per s una linea s_1 che termini in due punti dell'asse di simmetria più la porzione di questo asse compresa fra questi due punti.

Poniamo

$$W_3 = V_3 = 0:$$

si otterrà

$$W_1^{(a)} - W_1^{(b)} = \frac{r_a^2}{2\pi}\int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r}{(r_a^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\left[\frac{z-z_a}{\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{r}{r_a^2+\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds$$

$$-\frac{r_b^2}{2\pi}\int_{\lambda_b}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r}{(r_b^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\left[\frac{z-z_b}{\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{r}{r_b^2+\lambda^2}\frac{\partial V}{\partial s}\right] ds \; .$$

in cui le quantità con indice a si riferiscono alla corrente circolare di raggio r_a e distante dall'origine di z_a, quelle con indice b alla corrente di raggio r_b e distante di z_b dall'origine.

Poiché r è zero sull'asse di simmetria si vede che gli integrali estesi ad s sono estesi alla curva chiusa o soltanto alla curva s_1.

Applicando la formola (4) si trova invece

$$W_1^{(a)} + C = \frac{r_a^2}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r}{(r_a^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\left[\frac{z-z_0}{\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{r}{r_a^2+\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds$$

e l'integrale rispetto ad s va esteso come è indicato precedentemente.

Queste formule abbastanza semplici ci dànno il modo di passare subito dalla funzione potenziale alla sua associata per mezzo di una quadratura e di integrali ellittici.

Quando la V_1 è la funzione potenziale di una massa distribuita simmetricamente sopra una superficie di rivoluzione intorno ad un asse la cui curva meridiana è s, la formula (6) ci dà subito le linee di forza in funzione della densità superficiale ρ.

Abbiamo infatti in tal caso

$$W_1^{(a)} + C = 4a^2\int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r(z-z_0)}{\lambda^2(r_a^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\,\rho(s)\,ds\,,$$

formula che poteva ottenersi anche diversamente.

Osservando che è possibile disporre due linee vorticose circolari in un fluido in modo che siano coassiali ed esista una sfera nel fluido i punti della quale non abbiano velocità normale alla sfera, si vede come applicando le formule (2') si possono risolvere con facilità i problemi di determinare le funzioni associate nei punti interni ad una sfera quando sono note alcune fra le proprietà caratteristiche al contorno.

Le formule trovate ora possono farsi anche dipendere da alcuni teoremi generali assai semplici.

Se le quantità u, v, w funzioni di x, y, z finite e continue insieme alle loro derivate soddisfano alla condizione solenoidale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

è noto che

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = 0,$$

essendo σ una superficie chiusa, α, β, γ i coseni degli angoli che la normale a σ fa cogli assi.

Segue di qui che se la superficie σ è aperta

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

dipende soltanto dal contorno di σ. Vediamo quindi di esprimere questo integrale in funzione soltanto di elementi che dipendono da questo contorno.

Per un teorema di JACOBI è sempre possibile trovare due funzioni μ e ν che soddisfano le equazioni differenziali

$$u = \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial y}, & \frac{\partial\mu}{\partial z} \\ \frac{\partial\nu}{\partial y}, & \frac{\partial\nu}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial z}, & \frac{\partial\mu}{\partial x} \\ \frac{\partial\nu}{\partial z}, & \frac{\partial\nu}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial x}, & \frac{\partial\mu}{\partial y} \\ \frac{\partial\nu}{\partial x}, & \frac{\partial\nu}{\partial y} \end{vmatrix},$$

quindi

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

$$= \int_\sigma \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial y}, & \frac{\partial\mu}{\partial z} \\ \frac{\partial\nu}{\partial y}, & \frac{\partial\nu}{\partial z} \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial z}, & \frac{\partial\mu}{\partial x} \\ \frac{\partial\nu}{\partial z}, & \frac{\partial\nu}{\partial x} \end{vmatrix} \beta + \begin{vmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial x}, & \frac{\partial\mu}{\partial y} \\ \frac{\partial\nu}{\partial x}, & \frac{\partial\nu}{\partial y} \end{vmatrix} \gamma \right\} d\sigma.$$

Considerando z come funzione di x e y definita dall'equazione della superficie σ, abbiamo per conseguenza

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = -\int_{\sigma_1} \left(\frac{\partial\mu}{\partial y} \frac{\partial\nu}{\partial x} - \frac{\partial\nu}{\partial y} \frac{\partial\mu}{\partial x} \right) dx\, dy$$

se la direzione positiva della normale a σ è quella che fa un angolo acuto coll'asse z e σ_1 è la proiezione di σ sul piano xy; ammetteremo che questa proiezione copra una sola volta il piano xy.

Se ne deduce, se la funzione μ è monodroma e s è il contorno della superficie σ,

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = \int_s \mu \frac{d\nu}{ds}\, ds.$$

Ora se u, v, w ammettono un potenziale V, avremo

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_s \mu \frac{d\nu}{ds} ds,$$

formula analoga ad una nota della teoria delle variabili complesse perché collega l'integrale di $\partial V/\partial n$ esteso ad una superficie coi valori che prendono al contorno di essa le funzioni che ci dànno le linee di forza.

Supposta nella linea chiusa s una corrente elettrica di cui U sia il potenziale elettromagnetico e detta σ_1 una superficie chiusa che includa σ, avremo

$$\int_{\sigma_1} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma_1 = 4\pi m \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma,$$

essendo m il momento della superficie magnetica che ha lo stesso potenziale della corrente.

Ne segue che

$$\int_{\sigma_1} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma_1 = 4\pi m \int_s \mu \frac{d\nu}{ds} ds.$$

Applichiamo questa formola al caso delle funzioni potenziali simmetriche. Prendiamo per s un cerchio col centro sull'asse e ad esso perpendicolare; sia ν l'angolo che un piano che passa per l'asse fa con un piano fisso. Posto $4\pi m = 1$ avremo

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma$$

e le equazioni $\nu =$ cost. e $\mu =$ cost. ci daranno le linee di forza corrispondenti alla funzione potenziale V.

Osservando che, se s è la curva meridiana di σ, si ha

$$d\sigma = r ds d\theta,$$

l'equazione precedente può anche scriversi

$$\mu = \int_s r \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds.$$

Come siamo passati dalla (2) alle (2') si potrebbe passare senza alcuna difficoltà ad altre formule analoghe a quelle trovate nel § precedente.

Per le funzioni W_3 che soddisfano alle (3) e (3') è facile dimostrare delle proprietà reciproche analoghe a quelle dimostrate nel § precedente. Sarebbe pure facile in qualche caso trovare il significato fisico di tali proprietà. Si vedrebbe che in alcuni casi esse rientrerebbero nel teorema che si deduce subito da uno noto di HELMHOLTZ sulla distribuzione delle correnti elettriche.

Se in un liquido definito o indefinito in cui sono o no immersi dei solidi si ha un filetto vorticoso A, la quantità di liquido che in un dato istante passa per una superficie B sta alla quantità di liquido che passerebbe entro A, se invece del filetto A si avesse al contorno di B un filetto vorticoso, nello stesso rapporto della circolazione dei due filetti.

§ 4. – Distribuzione della elettricità in superficie conduttrici non omogenee.

Abbiamo trovato per le formule (γ) del § 1 che le V e W acquistavano questo significato: esse rappresentavano le linee di livello e di flusso dell'elettricità sopra una superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ quando la conducibilità era rappresentata dalla funzione H_1. Così ogni problema che dà luogo ad una funzione potenziale simmetrica intorno ad un asse corrisponde ad un altro di distribuzione di correnti in un piano in cui la conducibilità varia proporzionalmente alla distanza da una retta.

Ora, poiché le $\lambda = \text{cost.}$, $\mu = \text{cost.}$ sono linee isoterme della superficie $\rho_1 = \text{cost.}$, la forma delle (γ) non cambia se si sostituiscono alle coordinate λ, μ le altre λ_1 e μ_1 definite dalla relazione

$$\lambda_1 + i\mu_1 = \varphi(\lambda + i\mu).$$

Questa osservazione aggiunta all'altra già fatta ci permette di determinare in varii casi la distribuzione di correnti elettriche stazionarie sopra delle superficie conduttrici non omogenee partendo da funzioni potenziali indipendenti da una coordinata.

Come applicazione studiamo il caso che risulta dalle funzioni potenziali simmetriche.

Se l'asse di simmetria è l'asse z e prendiamo le coordinate cilindriche (r, θ, z) si hanno per equazioni della funzione potenziale simmetrica V e della sua associata W

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

e se λ, μ è un sistema di coordinate isoterme nel piano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(r(\lambda, \mu)\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(r(\lambda, \mu)\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{r(\lambda, \mu)}\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{r(\lambda, \mu)}\frac{\partial W}{\partial \mu}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Vediamo quali sono le linee isoterme del piano le quali colla rotazione intorno all'asse di simmetria z dànno luogo ad un sistema di superficie di livello.

Queste linee potranno essere linee di livello nella distribuzione delle correnti nel piano, supposto questo omogeneo o colla conducibilità in ogni punto proporzionale alla distanza dall'asse z.

Per la formula (6) del § 1 dovremo avere affinché questo si verifichi

$$r(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda)\,\psi(\mu)$$

e poiché

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \mu^2} = 0,$$

dovrà essere

$$\psi \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \varphi \frac{d^2 \psi}{d\mu^2} = 0;$$

ossia, essendo c^2 una costante,

$$(1) \qquad \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} = c^2 \varphi \quad , \quad \frac{d^2 \psi}{d\mu^2} = - c^2 \psi.$$

Integrando si trova

$$\varphi = A e^{c\lambda} + A_1 e^{-c\lambda} \quad , \quad \psi = B \cos (c\mu + c_2),$$

e quindi

$$\begin{cases} r = C e^{c\lambda} \cos (c\mu + c_2) + C_1 e^{-c\lambda} \cos (c\mu + c_2), \\ z = C e^{c\lambda} \operatorname{sen} (c\mu + c_2) - C_1 e^{-c\lambda} \operatorname{sen} (c\mu + c_2). \end{cases}$$

Si deduce quindi

$$(2) \qquad r + iz = C' e^{c(\lambda + i\mu)} + C'_1 e^{-c(\lambda + i\mu)} = M \cosh [c(\lambda + i\mu) + N]$$

in cui M ed N sono costanti.

Questo ci dimostra che soltanto il sistema di ellissi ed iperbole omofocali godono della proprietà richiesta, oltre al sistema di rette parallele agli assi z e r che si otterrebbero prendendo nelle (1) la costante $c = 0$.

Si abbiano ora due piani, il piano $x + iy$ e il piano $\lambda + i\mu$. La funzione

$$(3) \qquad x + iy = \theta (\lambda + i\mu)$$

rappresenti conformemente una porzione del piano (x, y) sul piano (λ, μ). Sia V una funzione che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial \left(\lambda \dfrac{\partial V}{\partial \lambda}\right)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \left(\lambda \dfrac{\partial V}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu} = 0;$$

avremo per la osservazione già fatta

$$\frac{\partial \left(\lambda (x, y) \dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\lambda (x, y) \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0.$$

V rappresenta quindi la funzione potenziale di una distribuzione di correnti elettriche stazionarie nel piano (x, y) in cui la conducibilità è costante lungo un sistema di linee che fa parte di un doppio sistema di linee isoterme, mentre la conducibilità varia da linea a linea con una legge data dalla funzione λ.

Si ha così il modo di ricondurre il problema generale della determinazione delle correnti elettriche in un piano in cui la conducibilità varia da punto a punto con una legge data dalla funzione $\lambda (x, y)$ che verifica l'equazione $\Delta^2 \lambda = 0$, quando sono note le caratteristiche al contorno, alla determinazione di una funzione potenziale simmetrica, col rappresentare conformemente la porzione data di piano in un'altra in cui alle linee $\lambda =$ cost. corrispondono delle linee rette.

Quando la conducibilità varia con questa legge esistono sempre dei sistemi di linee di livello che possono essere linee di livello anche supponendo il piano di conducibilità uniforme. Tali sistemi sono quelli che colla rappresentazione conforme ora studiata dànno luogo alle linee espresse dalle (2), cioè ad un sistema di ellissi ed iperbole omofocali.

Oltre a queste esistono le linee

$$\lambda = \text{cost.}$$

le quali godono pure della stessa proprietà.

Partendo dalle funzioni analoghe a quelle di Green per i potenziali indipendenti da una coordinata di cui abbiamo parlato al § II, è facile introdurre delle funzioni analoghe nel caso della distribuzione di correnti in superficie non omogenee, dalle quali possono dedursi i valori della funzione potenziale che ci dànno la legge della distribuzione delle correnti.

Le linee di flusso sono date da

$$W = \text{cost.}$$

in cui W soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda(xy)}\,\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda(xy)}\,\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0,$$

quindi esse corrispondono a linee di livello nel caso in cui la conducibilità è data da $1/\lambda(xy)$. Anche nel caso in cui la conducibilità sia data da questa funzione il problema può quindi ridursi ad uno di potenziali simmetrici ed anche in questo caso, introducendo le funzioni analoghe a quelle di Green studiate nel § 3 per le funzioni associate alle funzioni potenziali, si può giungere in alcuni casi facilmente a determinare le funzioni W che ci dànno la legge di distribuzione delle correnti quando siano noti i punti del piano per i quali entra ed esce la corrente e le *linee elettromotrici*.

Sempre applicando lo stesso processo di rappresentazione conforme possono essere anche studiati dei casi di superficie non piane conduttrici in cui la conducibilità varia da punto a punto, mantenendosi però costante lungo un sistema di linee isoterme.

§ 5. – Distribuzione delle correnti elettriche in corpi conduttori non omogenei.

Abbiamo trovato nel § precedente come da funzioni potenziali indipendenti da una coordinata si può dedurre la soluzione di varii problemi di distribuzione di correnti in superficie conduttrici non omogenee. Vediamo generalizzando se è possibile risolvere qualche problema analogo nel caso di corpi a tre dimensioni partendo da funzioni potenziali corrispondenti a spazî a più di tre dimensioni.

Sia V una funzione di $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e siano $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ funzioni di $x_1, x_2, \cdots, x_n$ finite e continue insieme alle loro derivate e tali che

$$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \rho_r}\right)^2 = H_r^2 \quad , \quad \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_r} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_s} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \cdots, n \; ; \; s \neq r).$$

Avremo

$$\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{H_i^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right)^2$$

e applicando il noto metodo di JACOBI si ha

$$\sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{1}{H_1 H_2 \cdots H_n} \sum_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{H_1 H_2 \cdots H_n}{H_i^2} \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \right).$$

Se la V è indipendente da $\rho_{p+1}, \rho_{p+2}, \cdots, \rho_n$, sarà

$$\sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{H_1 H_2 \cdots H_p}{H_i^2} P \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \right) = 0,$$

in cui P sta ad indicare il prodotto

$$H_{p+1} H_{p+2} \cdots H_n .$$

Sia $p = 3$ e

$$H_1^2 \, d\rho_1^2 + H_2^2 \, d\rho_2^2 + H_3^2 \, d\rho_3^2$$

rappresenti l'elemento lineare dello spazio euclideo riferito ad un sistema di coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3. Avremo allora che la V, la quale soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} P \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} P \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} P \frac{\partial V}{\partial \rho_3} \right) = 0,$$

sarà una funzione potenziale corrispondente ad una distribuzione di elettricità in un corpo a tre dimensioni la cui conducibilità è rappresentata da

$$P(\rho_1, \rho_2, \rho_3).$$

Come esempi consideriamo il caso in cui V dipenda da quattro coordinate x_1, x_2, x_3, x_4.

Colleghiamo le $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ a queste variabili per le relazioni

$$x_1 = \rho_1 \quad , \quad x_2 = \rho_2 \quad , \quad x_3 = \rho_3 \cos \rho_4 \quad , \quad x_3 = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_4 .$$

Avremo

$$\sum_i dx_i^2 = d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + d\rho_3^2 + \rho_3^2 \, d\rho_4^2,$$

quindi se V è indipendente da ρ_4 soddisferà l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_3} \right) = 0.$$

In questo caso dunque, se poniamo

$$x = \rho_1 \quad , \quad y = \rho_2 \quad , \quad z = \rho_3 ,$$

avremo che V corrisponderà al caso in cui la conducibilità in ciascun punto è proporzionale alla distanza dal piano xy.

Consideriamo il caso in cui V dipenda da cinque coordinate x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e si abbia

$$x_1 = \rho_1 , x_2 = \rho_2 \cos \rho_4 , x_3 = \rho_2 \operatorname{sen} \rho_4 , x_4 = \rho_3 \cos \rho_5 , x_5 = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_5 .$$

Sarà

$$\sum_i dx_i^2 = d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + d\rho_3^2 + \rho_2^2 d\rho_4^2 + \rho_3^2 d\rho_5^2$$

e se V è indipendente da ρ_4 e ρ_5 risulterà

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0,$$

quindi corrisponderà al caso in cui la conducibilità varia proporzionalmente al prodotto delle distanze dai piani xy , xz.

Finalmente quando V dipenda da sei coordinate $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ e si abbia

$$x_1 = \rho_1 \cos \rho_4 \quad , \quad x_2 = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_4 \quad , \quad x_3 = \rho_2 \cos \rho_5 ,$$

$$x_4 = \rho_2 \operatorname{sen} \rho_5 \quad , \quad x_5 = \rho_3 \cos \rho_6 \quad , \quad x_6 = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_6 ,$$

se la V è indipendente da ρ_4, ρ_5, ρ_6 sarà

$$0 = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right)$$

e V corrisponderà a una conducibilità proporzionale al prodotto delle distanze dai piani coordinati.

Vediamo di introdurre anche in questi casi degli elementi che possano servire a risolvere dei problemi analoghi a quelli che si presentano nei casi ordinari in cui si tratta di corpi omogenei, degli elementi cioè che facciano l'ufficio delle ordinarie funzioni di GREEN.

È noto che la funzione

$$\varphi = [(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots (x_n - x_n^0)^2]^{-\frac{n}{2}+1}$$

soddisfa l'equazione

$$\sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0 ;$$

che se S_n è uno spazio ad n dimensioni e $\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ è continua, posto

$$V = \int_{S_n} \lambda\varphi \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n = \int_{S_n} \lambda(\rho_1, \cdots, \rho_n) \, \varphi(\rho_1, \cdots, \rho_n) \, H_1 H_2 \cdots H_n \, d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_n$$

si ha

$$\sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = -n(n-2) N\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

che se S_{n-1} è uno spazio a $n-1$ dimensioni e p è l'elemento normale, se λ è una funzione continua dei punti di S_{n-1} e ora si pone

$$V = \int_{S_{n-1}} \lambda\varphi \, dS_{n-1},$$

V risulta continua e si ha

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_a + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_b = -n(n-2)N\lambda,$$

in cui le due derivate sono prese rispetto alla normale allontanandosi dai punti dello spazio S_{n-1}; che finalmente, se si pone

$$V = \int_{S_{n-1}} \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p} dS_{n-1},$$

si ha

$$(2) \qquad V_a - V_b = n(n-2)N\lambda$$

e le derivate prime di V hanno valori eguali dalle due parti di S_{n-1}.

Si ha inoltre il teorema analogo a quello di GREEN, cioè, se la normale p ad S_{n-1} è diretta verso l'interno di S_{n-1},

$$\int_{S_{n-1}} \left(V \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial V}{\partial p}\right) dS_{n-1} = \int_{S_n} \left(U \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} - V \sum_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}\right) dS_n .$$

teorema che conduce, allorché $U = \varphi$, all'equazione

$$-\int_{S_n} \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \varphi \, dS_n + \int_{S_{n-1}} \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \varphi \frac{\partial V}{\partial p}\right) dS_{n-1} = n(n-2) N V(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0).$$

In tutte le formole scritte si ha, se n è pari

$$N = \frac{(2\pi)^{n/2}}{2 \cdot 4 \cdots n},$$

e se n è dispari

$$N = \frac{2 \cdot (2\pi)^{(n-1)/2}}{3 \cdot 5 \cdots n}.$$

Se τ è uno spazio con un numero di dimensioni inferiore ad n interno ad S_n, di cui l'elemento è $d\tau$, e μ è una funzione continua dei punti di τ, avremo evidentemente, posto

$$\int_\tau \varphi\mu \, d\tau = \psi,$$

$$\frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_{n-1}} \left[V \frac{\partial(\psi + \psi_1)}{\partial p} - (\psi + \psi_1) \frac{\partial V}{\partial p}\right] dS_{n-1}$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_n} (\psi + \psi_1) \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} dS_n = \int_\tau V\mu \, d\tau .$$

in cui ψ_1 è una funzione che soddisfa l'equazione

$$\sum_i \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_i^2} = 0 .$$

Se in τ la V è costante ed eguale a V_1, si avrà

$$V_1 \int_\tau \mu \, d\tau = \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_{n-1}} \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - (\psi+\psi_1) \frac{\partial V}{\partial p} \right] dS_{n-1}$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_n} (\psi+\psi_1) \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} dS_n .$$

Senza nessuna difficoltà si potrebbe per mezzo di queste formule generalizzare agli spazi a più di tre dimensioni le formule trovate nel § 2.

Suppongasi ora di esprimere tutte le diverse quantità considerate in funzione delle coordinate $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$. Sia V indipendente dalle coordinate $\rho_4, \rho_5, \cdots, \rho_n$, lo spazio τ sia lo spazio ad $n-3$ dimensioni definito dalle relazioni

$$\rho_1 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.},$$

la μ sia tale che anche ψ risulti indipendente da $\rho_4, \rho_5, \cdots, \rho_n$ e la ψ_1 goda della stessa proprietà. Supponiamo inoltre che il contorno S_{n-1} sia uno spazio ad $n-1$ dimensioni la cui equazione sia data da

$$\rho_1 = \rho_1(u, v) \quad , \quad \rho_2 = \rho_2(u, v) \quad , \quad \rho_3 = \rho_3(u, v),$$

cioè sia indipendente dalle coordinate $\rho_4, \rho_5, \cdots, \rho_n$.

Se l'elemento lineare dello spazio S_n è

$$ds^2 = H_1^2 \, d\rho_1^2 + H_2^2 \, d\rho_2^2 + \cdots + H_n^2 \, d\rho_n^2 ,$$

avremo

$$dS_n = H_1 H_2 \cdots H_n \, d\rho_1 \, d\rho_2 \cdots d\rho_n$$

e

$$dS_{n-1} = \sqrt{EG} \, H_4 H_5 \cdots H_n \, du \, dv \, d\rho_4 \, d\rho_5 \cdots d\rho_n$$

quando si intenda

$$\left\{ \begin{aligned} E &= H_1^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{du}\right)^2 + H_2^2 \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial u}\right)^2 + H_3^2 \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial u}\right)^2, \\ F &= H_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + H_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial u} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} + H_3^2 \frac{\partial \rho_3}{\partial u} \frac{\partial \rho_3}{\partial v} = 0, \\ G &= H_1^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v}\right)^2 + H_2^2 \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial v}\right)^2 + H_3^2 \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial v}\right)^2 . \end{aligned} \right.$$

Si avrà quindi

$$V_1 \int_\tau \mu d\tau = \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_{n-1}} \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - (\psi+\psi_1) \frac{\partial V}{\partial p} \right] \sqrt{EG}\, du\, dv\, P d\rho_4\, d\rho_5 \cdots d\rho_n$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_n} (\psi+\psi_1) \left[\frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(\frac{H_3 H_2}{H_1} P \frac{\partial V}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} P \frac{\partial V}{\partial\rho_2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\rho_3} \left(\frac{H_2 H_1}{H_3} P \frac{\partial V}{\partial\rho_3} \right) \right] H_1 H_2 H_3\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3\, P\, d\rho_4 \cdots d\rho_n ,$$

in cui si è posto

$$H_4 H_5 \cdots H_n = P.$$

Sia $\mu = 1$, allora

$$\int_\tau \mu d\tau = \int_\tau H_4 H_5 \cdots H_n\, d\rho_4 \cdots d\rho_n ,$$

e se supponiamo P e H_1, H_2, H_3 indipendenti da $\rho_4, \cdots, \rho_n$, e che

$$H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2 + H_3^2\, d\rho_3^2$$

rappresenti l'elemento lineare nello spazio euclideo riferito alle coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3, avremo

$$V_1 = \frac{1}{n(n-2)N} \int_\sigma \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p} (\psi+\psi_1) \right] d\sigma$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_S (\psi+\psi_1) \left[\frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(P \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(P \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial V}{\partial\rho_2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\rho_3} \left(P \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial\rho_3} \right) \right] dS ,$$

in cui σ figura come il contorno dello spazio a tre dimensioni S in cui si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(P \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(P \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_3} \left(P \frac{H_2 H_1}{H_3} \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_3} \right).$$

È da osservare che lo spazio S_n che abbiamo considerato deve supporsi finito.

La formula trovata, quando V è la funzione potenziale corrispondente alla distribuzione di correnti elettriche in S ove la conducibilità viene data da P, diviene

$$V_1 = \frac{1}{n(n-2)N} \int_\sigma \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p} (\psi+\psi_1) \right] d\sigma.$$

Questa formula è analoga alla formula ordinaria, che si ha nel caso della conducibilità costante, soltanto all'elemento $1/r$ viene sostituita la funzione ψ che si calcola facilmente. Nei diversi problemi che si possono presentare deve sostituirsi alla funzione di GREEN e alle funzioni analoghe la funzione ψ_1.

Valgono per questa evidentemente i noti teoremi di reciprocità analoghi a quelli trovati nel § 2.

Le formule (1) ci servono insieme alle (2) nei casi in cui sono note le superficie elettromotrici e i punti o le superficie di entrata ed uscita delle correnti che si studiano.

Allorché lo spazio S_{n-1} che figura nelle formule scritte precedentemente è uno spazio sferico, la determinazione della funzione ψ_1 si eseguisce con grande facilità, quando per questa funzione si impone una delle condizioni che si mettono ordinariamente:

$$\psi + \psi_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} = 0.$$

Abbiamo detto che la ψ si ottiene senza difficoltà. Un caso in cui questa funzione assume una forma molto semplice si ha quando si tratta di un corpo in cui la conducibilità varia proporzionalmente alla distanza da un piano fisso.

Abbiamo già veduto che questo caso di ottiene partendo da uno spazio piano a quattro dimensioni (x_1, x_2, x_3, x_4) e prendendo delle coordinate analoghe alle coordinate cilindriche $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

In tal caso la ψ risulterà data da

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\rho_4}{(\rho_1-\rho_1^0)^2+(\rho_2-\rho_2^0)^2+\rho_3^2+\rho_3^{0\,2}-2\rho_3\rho_3^0\cos\rho_4}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(\rho_1-\rho_1^0)^2+(\rho_2-\rho_2^0)^2+(\rho_3-\rho_3^0)^2}\sqrt{(\rho_1-\rho_1^0)^2+(\rho_2-\rho_2^0)^2+(\rho_3+\rho_3^0)^2}}$$

ovvero, indicando con r_1 e r_2 le distanze dei punti $(\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$, $(\rho_1^0, \rho_2^0, -\rho_3^0)$ dal punto ρ_1, ρ_2, ρ_3, avremo

$$\psi = \frac{2\pi}{r_1 r_2}.$$

La funzione ψ_1 tale che

$$\psi + \psi_1 = 0,$$

nei punti della superficie di una sfera col centro nell'origine degli assi, di raggio R, ci viene fornita immediatamente per mezzo della teoria delle immagini. Essa risulta data da

$$\psi_1 = -\frac{2\pi}{r_1' r_2'}\frac{R^2}{\rho^2},$$

in cui ρ è la distanza di uno dei punti $(\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$, $(\rho_1^0, \rho_2^0, -\rho_3^0)$ dall'origine e r_1', r_2' le distanze del punto (ρ_1, ρ_2, ρ_3) dalle immagini dei punti $(\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$, $(\rho_1^0, \rho_2^0, -\rho_3^0)$ prese rispetto alla sfera.

Nel § 4 sono state trovate le linee che possono essere linee di livello tanto se il conduttore piano è omogeneo, quanto se la conducibilità è diversa nei vari punti.

Vediamo di generalizzare questo ai casi che abbiamo considerato di corpi solidi non omogenei.

È facile dimostrare il teorema: *un sistema di ellissoidi o di iperboloidi omofocali può essere un sistema di superficie di livello tanto se la conducibilità del mezzo è uniforme, quanto se è variabile proporzionalmente alla distanza da uno, due o tre piani ortogonali.*

Infatti abbiasi un sistema di coordinate ortogonali ρ_1, ρ_2, ρ_3 e $\rho_1 =$ cost. siano le superficie di livello. La funzione che ci dà la conducibilità sia $\varphi(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

V sia la funzione potenziale indipendente da ρ_2 e ρ_3. Dovremo avere evidentemente

$$V = V(\rho_1)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \varphi \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{H_2 H_3}{H_1} \varphi = \psi(\rho_1) \theta(\rho_2 \rho_3).$$

Reciprocamente se è verificata questa condizione, si potrà, prendendo

$$V = \int \frac{d\rho_1}{\psi},$$

trovare una funzione V della sola ρ_1 che sia una funzione potenziale corrispondente ad una distribuzione di elettricità nel conduttore la cui conducibilità è data da φ.

Prendiamo per $\rho_1 = u$, $\rho_2 = v$, $\rho_3 = w$ le coordinate ellittiche definite dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 .$$

Avremo

$$H_1^2 = 4 \frac{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}{(u - v)(u - w)},$$

$$H_2^2 = 4 \frac{(a^2 + v)(b^2 + v)(c^2 + v)}{(v - w)(v - u)},$$

$$H_3^2 = 4 \frac{(a^2 + w)(b^2 + w)(c^2 + w)}{(w - u)(w - v)},$$

quindi

$$\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\right)^2 = -4\,\frac{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)(v-w)^2},$$

$$\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\right)^2 = -4\,\frac{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)(w-u)^2},$$

$$\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\right)^2 = -4\,\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)(u-v)^2}.$$

Ora, poiché

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

si ha subito il teorema enunciato.

Facciamo per ultimo osservare che si possono studiare partendo da funzioni potenziali a più di tre dimensioni altri problemi oltre quelli considerati di distribuzioni di correnti stazionarie sopra delle superficie non omogenee.

Così si potrebbe studiare il caso di un piano in cui la conducibilità variasse proporzionalmente alla distanza da due rette ortogonali, e da questa applicando il metodo della rappresentazione conforme si potrebbero dedurre altri casi di superficie eterogenee.

Reciprocamente poi partendo da alcuni di questi casi si potrebbe tornare alla considerazione di altri corpi oltre quelli considerati in cui la conducibilità variasse da punto a punto.

Per esempio se V è la funzione potenziale delle correnti in un piano in cui la conducibilità è data dalla funzione $\lambda(xy)$ dei vari punti, se facciamo rotare la porzione di piano in cui è definita la V intorno ad una retta del piano esterna a quella porzione e consideriamo V come funzione dei punti del solido di rivoluzione che si ottiene, essa corrisponderà alla distribuzione di correnti in questo corpo, quando la conducibilità in un punto sia data da λ/r in cui r è la distanza dall'asse di rotazione.