708.

NOTE SUR LA THÉORIE DES COURBES DE L'ESPACE.

[From the *Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences* (1880), pp. 135—139.]

En considérant dans l'espace une courbe d'espèce donnée, déterminée au moyen d'un nombre suffisant de points, la courbe n'est pas déterminée uniquement; mais on a par les points un certain nombre de telles courbes. Par exemple, la courbe unicursale d'ordre $2p$ dépend, comme on voit sans peine, de $8p$ constantes et sera ainsi déterminée par $4p$ points (le cas $p=1$ est une exception): on ne connaît pas, je pense, le nombre des courbes par les $4p$ points; mais pour le cas particulier $p=2$ (c'est-à-dire pour une courbe quartique de seconde espèce, ou autrement dit, une courbe excubo-quartique) ce nombre est $=4$: théorème démontré par moi depuis longtemps par des considérations géométriques. (Voir Salmon, *Geometry of three dimensions*, 3[e] éd. 1874, p. 319.) Ce n'est que dernièrement que j'ai considéré la question analytique, de trouver les équations d'une courbe excubo-quartique qui passe par 8 points donnés; et même j'ai pris pour les 8 points une disposition qui n'est pas tout à fait générale: l'investigation elle-même, et la forme du résultat, m'ont paru assez intéressantes pour que je les soumette à l'Association.

En considérant sur une courbe excubo-quartique 4 points donnés, le plan passant par 3 quelconques de ces points rencontre la courbe dans un seul point; et l'on obtient ainsi encore 4 points sur la courbe: voilà mon système de 8 points donnés, savoir en partant de 4 points quelconques, je prends un point quelconque dans chacun des plans qui passent par 3 de ces points, et j'obtiens ainsi les autres 4 points. Et par un tel système de 8 points, je cherche à faire passer une courbe de l'espèce dont il s'agit.

En prenant $x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$, pour les équations des plans du tétraèdre formé par les 4 premiers points, les coordonnées de ces points seront (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1): et pour les coordonnées des 4 autres points, je prends $(0, y_1, z_1, w_1)$, $(x_2, 0, z_2, w_2)$, $(x_3, y_3, 0, w_3)$, $(x_4, y_4, z_4, 0)$.

Les équations de la courbe sont $x : y : z : w = P : Q : R : S$, où P, Q, R, S sont des fonctions $(*)(\theta, 1)^4$ d'un paramètre variable θ; il s'agit de faire passer une telle courbe par les 8 points.

Je prends α, β, γ, δ, a, b, c, d pour les valeurs du paramètre θ qui correspondent aux 8 points respectivement.

Pour que la courbe passe par les premiers 4 points, il faut et il suffit que les équations soient de la forme

$$x : y : z : w = A\frac{\theta - a}{\theta - \alpha} : B\frac{\theta - b}{\theta - \beta} : C\frac{\theta - c}{\theta - \gamma} : D\frac{\theta - d}{\theta - \delta};$$

les conditions pour les autres 4 points seront alors

$$\begin{aligned}
. \; y_1 : z_1 : w_1 &= \quad . \quad B\frac{a-b}{a-\beta} : C\frac{a-c}{a-\gamma} : D\frac{a-d}{a-\delta},\\
x_2 \; . : z_2 : w_2 &= A\frac{b-a}{b-\alpha} \quad . \quad : C\frac{b-c}{b-\gamma} : D\frac{b-d}{b-\delta},\\
x_3 : y_3 \; . : w_3 &= A\frac{c-a}{c-\alpha} : B\frac{c-b}{c-\beta} \quad . \quad : D\frac{c-d}{c-\delta},\\
x_4 : y_4 : z_4 \; . &= A\frac{d-a}{d-\alpha} : B\frac{d-b}{d-\beta} : C\frac{d-c}{d-\gamma} \quad . \quad .
\end{aligned}$$

Évidemment il y a deux équations qui donnent la valeur de $B : C$, et qui servent ainsi pour éliminer cette quantité. De cette manière on obtient six équations que j'écris comme voici:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{y_1 z_4}{y_4 z_1} = \frac{a-b.d-c}{a-c.d-b} \cdot \frac{a-\gamma.d-\beta}{a-\beta.d-\gamma},\\
\mu &= \frac{w_1 y_3}{y_1 w_3} = \frac{a-d.c-b}{a-b.c-d} \cdot \frac{a-\beta.c-\delta}{a-\delta.c-\beta},\\
\nu &= \frac{z_1 w_2}{z_2 w_1} = \frac{a-c.b-d}{a-d.b-c} \cdot \frac{a-\delta.b-\gamma}{a-\gamma.b-\delta},\\
\varpi &= \frac{z_2 x_4}{z_4 x_2} = \frac{b-c.d-a}{b-a.d-c} \cdot \frac{b-\alpha.d-\gamma}{b-\gamma.d-\alpha},\\
\kappa &= \frac{x_2 w_3}{x_3 w_2} = \frac{b-a.c-d}{b-d.c-a} \cdot \frac{b-\delta.c-\alpha}{b-\alpha.c-\delta},\\
\rho &= \frac{x_3 y_4}{x_4 y_3} = \frac{c-a.d-b}{c-b.d-a} \cdot \frac{c-\beta.d-\alpha}{c-\alpha.d-\beta};
\end{aligned}$$

savoir λ, μ, ν, ϖ, κ, ρ dénotent ici les quantités données $\lambda = \frac{y_1 z_4}{y_4 z_1}$, etc. Le nombre des équations indépendantes est 5, car l'on a identiquement $\lambda\mu\nu\varpi\kappa\rho = 1$. Je remarque que l'on peut faire sur le paramètre θ une transformation linéaire quelconque $(h\theta + i) : (j\theta + k)$, et introduire ainsi 3 constantes arbitraires; on peut donc prendre à volonté 3 valeurs du paramètre θ, c'est-à-dire les valeurs de 3 quelconques des quantités α, β, γ, δ, a, b, c, d; et cela étant les 5 équations donneront les valeurs des autres 5 quantités. Si au moyen des équations on élimine α, β, γ, δ, on obtient entre a, b, c, d une équation qui sera, comme on va voir, de l'ordre 4 par rapport à chacune de ces quantités: en prenant comme données a, b, c il y aura donc 4 valeurs de d; et pour l'une quelconque de ces valeurs, celles de α, β, γ, δ seront déterminées uniquement: il y aura ainsi 4 courbes qui passent chacune par les 8 points; ce qui est le théorème dont il s'agit.

J'introduis, pour abréger, la notation

$$\begin{array}{rcccccc} & a-d, & b-d, & c-d, & b-c, & c-a, & a-b, \\ = & \mathrm{f}, & \mathrm{g}, & \mathrm{h}, & \mathrm{a}, & \mathrm{b}, & \mathrm{c}: \end{array}$$

on a donc identiquement

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c} = \mathrm{g}-\mathrm{h},\ \mathrm{h}-\mathrm{f},\ \mathrm{f}-\mathrm{g},$$

$$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=0,$$

$$\mathrm{fa}+\mathrm{gb}+\mathrm{hc}=0.$$

Les équations prennent ainsi la forme

$$\lambda = -\frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{gb}}\,\frac{a-\gamma\,.\,d-\beta}{a-\beta\,.\,d-\gamma},\ \text{etc.};$$

ou, en introduisant pour plus de commodité, les symboles

$$L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R,$$

pour désigner respectivement

$$-\frac{\mathrm{gb}}{\mathrm{hc}}\lambda, \quad -\frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{fa}}\mu, \quad -\frac{\mathrm{fa}}{\mathrm{gb}}\nu, \quad -\frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{fa}}\varpi, \quad -\frac{\mathrm{gb}}{\mathrm{hc}}\kappa, \quad -\frac{\mathrm{fa}}{\mathrm{gb}}\rho,$$

les équations seront

$$L = \frac{a-\gamma\,.\,d-\beta}{a-\beta\,.\,d-\gamma},$$

$$M = \frac{a-\beta\,.\,c-\delta}{a-\delta\,.\,c-\beta},$$

$$N = \frac{a-\delta\,.\,b-\gamma}{a-\gamma\,.\,b-\delta},$$

$$P = \frac{b-\alpha\,.\,d-\gamma}{b-\gamma\,.\,d-\alpha},$$

$$Q = \frac{b-\delta\,.\,c-\alpha}{b-\alpha\,.\,c-\delta},$$

$$R = \frac{c-\beta\,.\,d-\alpha}{c-\alpha\,.\,d-\beta},$$

avec la relation identique $LMNPQR=1$; il s'agit entre ces 5 équations d'éliminer α, β, γ, δ.

J'écris $\alpha = a - \phi$, les facteurs $b - \alpha$, $c - \alpha$, $d - \alpha$ de P, Q, R deviennent ainsi respectivement $-\mathrm{c} + \phi$, $\mathrm{g} + \phi$, $-\mathrm{f} + \phi$; cela étant, les valeurs de P, Q, R servent à exprimer β, γ, δ en fonction de ϕ: substituant ces valeurs de β, γ, δ dans celles de L, M, N, on obtient sans peine

$$L = -\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{g}P}\,\frac{\mathrm{f}(\mathrm{c}-\phi) + \mathrm{c}P(-\mathrm{f}+\phi)}{\mathrm{b}(-\mathrm{f}+\phi) + \mathrm{f}R(\mathrm{b}+\phi)},$$

$$M = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{h}R}\,\frac{\mathrm{b}(-\mathrm{f}+\phi) + \mathrm{f}R(\mathrm{b}+\phi)}{\mathrm{c}(\mathrm{b}+\phi) + \mathrm{b}Q(-\mathrm{c}+\phi)},$$

$$N = -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{a}Q}\,\frac{\mathrm{c}(\mathrm{b}+\phi) + \mathrm{b}Q(-\mathrm{c}+\phi)}{\mathrm{f}(\mathrm{c}-\phi) + \mathrm{c}P(-\mathrm{f}+\phi)},$$

valeurs qui donnent, comme cela doit être, $LMNPQR = 1$: il faut entre ces équations éliminer ϕ.

En rétablissant λ, μ, ν, ϖ, κ, ρ au lieu de L, M, N, P, Q, R, ces équations deviennent

$$\xi = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}\lambda\varpi = \frac{X + Y\phi}{X_1 + Y_1\phi},$$

$$\eta = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}\ \mu\rho = \frac{X_1 + Y_1\phi}{X_2 + Y_2\phi},$$

$$\zeta = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{g}}\ \kappa\nu = \frac{X_2 + Y_2\phi}{X + Y\phi},$$

(évidemment $\xi\eta\zeta = 1$), où j'écris ξ, η, ζ pour dénoter les expressions $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}\lambda\varpi$, etc., et où les valeurs des coefficients X, Y, etc., sont

$$\begin{aligned} X &= \mathrm{fc}\,(\mathrm{fa} + \varpi\mathrm{hc}), & Y &= -\mathrm{f}^2\mathrm{a} - \varpi\mathrm{hc}^2, \\ X_1 &= \mathrm{fb}\,(\mathrm{gb} + \rho\mathrm{fa}), & Y_1 &= \mathrm{gb}^2 + \rho\mathrm{f}^2\mathrm{a}, \\ X_2 &= \mathrm{bc}\,(\mathrm{hc} + \kappa\mathrm{gb}), & Y_2 &= \mathrm{hc}^2 - \kappa\mathrm{gb}^2. \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent

$$\xi\eta\,(X_1Y_2 - X_2Y_1) + \eta\,(X_2Y - XY_2) + XY_1 - XY_1 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{1}{\zeta}(X_1Y_2 - X_2Y_1) + \eta\,(X_2Y - XY_2) + XY_1 - XY_1 = 0,$$

et l'on n'a qu'à substituer la valeur de ces coefficients.

On a

$$\begin{aligned} X_1Y_2 - X_2Y_1 &= \mathrm{fb}\,(\mathrm{gb} + \rho\mathrm{fa})\,(\mathrm{hc}^2 - \kappa\mathrm{gb}^2) - \mathrm{bc}\,(\mathrm{hc} + \kappa\mathrm{gb})\,(-\mathrm{gb}^2 + \rho\mathrm{f}^2\mathrm{a}) \\ &= \mathrm{fghb}^2\mathrm{c}^2 - \mathrm{fg}^2\mathrm{b}^4\kappa + \mathrm{f}^2\mathrm{habc}^2\rho - \mathrm{f}^2\mathrm{gab}^3\kappa\rho + \mathrm{ghb}^3\mathrm{c}^2 + \mathrm{g}^2\mathrm{b}^4\mathrm{c}\kappa - \mathrm{f}^2\mathrm{habc}^2\rho - \mathrm{f}^2\mathrm{gab}^2\mathrm{c}\kappa\rho \\ &= \mathrm{ghb}^2\mathrm{c}^2\,(\mathrm{f} + \mathrm{b}) + \mathrm{g}^2\mathrm{b}^4\,(-\mathrm{f} + \mathrm{c})\,\rho - \mathrm{f}^2\mathrm{gab}^2\,(\mathrm{b} + \mathrm{c})\,\kappa\rho \\ &= \mathrm{ghb}^2\mathrm{c}^2\mathrm{h} + \mathrm{g}^2\mathrm{b}^4\,(-\mathrm{g})\,\rho + \mathrm{f}^2\mathrm{gab}^2\mathrm{a}\kappa\rho \\ &= \mathrm{gb}^2\,(\mathrm{h}^2\mathrm{c}^2 - \mathrm{g}^2\mathrm{b}^2\kappa + \mathrm{a}^2\mathrm{f}^2\kappa\rho)\,; \end{aligned}$$

et de même

$$XY_2 - X_2Y = \mathrm{hc}^2(\mathrm{f}^2\mathrm{a}^2 - \mathrm{h}^2\mathrm{c}^2\varpi + \mathrm{g}^2\mathrm{b}^2\varpi\kappa),$$

$$XY_1 - X_1Y = \mathrm{f}^2\mathrm{a}(\mathrm{g}^2\mathrm{b}^2 - \mathrm{f}^2\mathrm{a}^2\rho + \mathrm{h}^2\mathrm{c}^2\varpi\rho).$$

Donc

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{a}}\,\frac{1}{\kappa\nu}\,\mathrm{gb}^2(\mathrm{h}^2\mathrm{c}^2 - \mathrm{g}^2\mathrm{b}^2\kappa + \mathrm{f}^2\mathrm{a}^2\kappa\rho)\\ &+\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}\,\mu\rho\,\mathrm{hc}^2(\mathrm{f}^2\mathrm{a}^2 - \mathrm{h}^2\mathrm{c}^2\varpi + \mathrm{g}^2\mathrm{b}^2\varpi\kappa)\\ &+\qquad \mathrm{f}^2\mathrm{a}(\mathrm{g}^2\mathrm{b}^2 - \mathrm{f}^2\mathrm{a}^2\rho + \mathrm{h}^2\mathrm{c}^2\varpi\rho) = 0,\end{aligned}$$

ou enfin en multipliant par $-\mathrm{a}\nu$, et dans un terme $-\mathrm{g}^2\mathrm{b}^2\mathrm{h}^2\mathrm{c}^2\mu\nu\rho\varpi\kappa$, au lieu de $\mu\nu\rho\varpi\kappa$ écrivant $\frac{1}{\lambda}$, l'équation devient

$$\begin{aligned}(\mathrm{fa})^4\nu\rho + (\mathrm{gb})^4 + (\mathrm{hc})^4\frac{1}{\lambda\kappa} - (\mathrm{gb})^2(\mathrm{hc})^2\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}\right)&\\ - (\mathrm{hc})^2(\mathrm{fa})^2\nu\rho(\varpi+\mu) - (\mathrm{fa})^2(\mathrm{gb})^2(\nu+\rho) &= 0,\end{aligned}$$

ou, comme on peut l'écrire,

$$\left(\nu\rho,\ 1,\ \frac{1}{\lambda\kappa},\ -\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}\right),\ -\nu\rho(\varpi+\mu),\ -(\nu+\rho)\right)((\mathrm{fa})^2,\ (\mathrm{gb})^2,\ (\mathrm{hc})^2)^2 = 0.$$

C'est la deuxième d'un système de trois équations équivalentes; savoir, en multipliant par $\frac{1}{\nu\rho}$ et en réduisant par $\lambda\mu\nu\varpi\kappa\rho = 1$, on obtient la première forme: et, en multipliant par $\lambda\kappa$ et réduisant de même, on obtient la troisième forme: le système est

$$\begin{aligned}&\left(1,\ \frac{1}{\nu\rho},\ \mu\varpi,\ -\mu\varpi(\lambda+\kappa),\ -(\mu+\varpi),\ -\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\rho}\right)\right)((\mathrm{fa})^2,\ (\mathrm{gb})^2,\ (\mathrm{hc})^2)^2 = 0,\\ &\left(\nu\rho,\ 1,\ \frac{1}{\lambda\kappa},\ -\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}\right),\ -\nu\rho(\mu+\varpi),\ -(\nu+\rho)\right)(\ ,,\quad ,,\quad ,,\ )^2 = 0,\\ &\left(\frac{1}{\mu\varpi},\ \lambda\kappa,\ 1,\ -(\lambda+\kappa),\ -\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\varpi}\right),\ -\lambda\kappa(\nu+\rho)\right)(\ ,,\quad ,,\quad ,,\ )^2 = 0.\end{aligned}$$

En écrivant $\mathrm{hc} = -\mathrm{fa} - \mathrm{gb}$, on obtient une équation de la forme $(*)(\mathrm{fa},\ \mathrm{gb})^4 = 0$, savoir une équation quartique pour avoir $\mathrm{fa} : \mathrm{gb}$, c'est-à-dire, le rapport anharmonique $(a-d)(b-c) : (b-d)(c-a)$: en considérant a, b, c comme données, il y a donc 4 valeurs de d: et l'on a déjà vu que les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont données rationnellement en fonctions de a, b, c, d: le théorème est donc démontré.

Cambridge, juillet, 1880.