935.

SUR LA FONCTION MODULAIRE $\chi\omega$.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXVI. (*Janvier—Juin*, 1893), pp. 1339—1343.]

SELON les notations usitées, on a

$$\chi\omega = \sqrt[12]{kk'} = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} \div 1 + q \,.\, 1 + q^3 \,.\, 1 + q^5 \ldots ;$$

or, d'après une transformation trouvée par M. Glaisher, on a

$$\frac{1}{1+q} + \frac{3q^2}{1+q^3} + \frac{5q^4}{1+q^5} + \ldots = \frac{1+q^2}{(1-q^2)^2} - \frac{q\,(1+q^4)}{(1-q^4)^2} + \frac{q^2\,(1+q^6)}{(1-q^6)^2} - \ldots,$$

et de là, en intégrant,

$$\log 1 + q \,.\, 1 + q^3 \,.\, 1 + q^5 \ldots = \quad \frac{q}{1-q^2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{1-q^4} + \tfrac{1}{3}\,\frac{q^3}{1-q^6} - \ldots,$$

$$= - \frac{1}{q - q^{-1}} + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{q^2 - q^{-2}} - \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{q^3 - q^{-3}} + \ldots ;$$

donc

$$\chi\omega = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} \exp. \left(\frac{1}{q - q^{-1}} - \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{q^2 - q^{-2}} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{q^3 - q^{-3}} - \ldots \right),$$

ou, en écrivant $q = e^{i\pi\omega}$,

$$\chi\omega = 2^{\frac{1}{6}} \exp. \left[\frac{i\pi\omega}{24} + \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\sin \pi\omega} - \frac{1}{2 \sin 2\pi\omega} + \frac{1}{3 \sin 3\pi\omega} - \ldots \right) \right],$$

$$= 2^{\frac{1}{6}} \exp. \left[\frac{i\pi\omega}{24} - \frac{1}{2i}\, \Sigma_n \frac{\cos n\pi}{n \sin n\pi\omega} \right],$$

$n = 1$ jusqu'à $n = \infty$, forme qui met en évidence l'équation $\chi(\omega + 2) = i^{\frac{1}{6}} \chi\omega$.

Mais nous avons

$$\frac{1}{n \sin n\pi\omega} = \frac{1}{n^2\pi\omega} + \frac{1}{\pi} \Sigma_m \frac{\cos m\pi}{n(n\omega - m)},$$

$m = 1$ jusqu'à $m = +\infty$ et $m = -1$ jusqu'à $m = -\infty$.

On a, dans les parenthèses, d'abord les termes

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{\pi\omega}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots\right), \quad = \frac{1}{2i}\frac{1}{\pi\omega} \cdot \frac{\pi^2}{12}, \quad = -\frac{\pi i}{24\omega},$$

et l'expression de $\chi\omega$ devient ainsi

$$\chi\omega = 2^{\frac{1}{6}} \text{ exp. } \left[\frac{i\pi\omega}{24} - \frac{i\pi}{24\omega} + \frac{i}{2\pi} \Sigma_n \Sigma_m \frac{\cos n\pi \cos m\pi}{n(n\omega - m)}\right],$$

ou, ce qui est plus commode,

$$\chi\omega = 2^{\frac{1}{6}} \text{ exp. } \left[\frac{i\pi\omega}{24} - \frac{i\pi}{24\omega} + \frac{i}{2\pi}(S_1 - S_2 - S_3 + S_4)\frac{1}{n(n\omega - m)}\right],$$

où les signes sommatoires $S = \Sigma_n \Sigma_m$ se rapportent: S_1 aux valeurs impaires de m et n; S_2 aux valeurs impaires de m et paires de n; S_3 aux valeurs paires de m et impaires de n; S_4 aux valeurs paires de m et n. En omettant l'expression $\frac{1}{n(n\omega - n)}$ du terme sommé, on peut considérer S_1, S_2, S_3, S_4 comme dénotant les quatre sommes dont il s'agit.

Considérons d'abord S_4; en supposant que m', n' soient l'un ou l'autre ou tous les deux impairs, on peut donner à m, n les valeurs $2m'$, $2n'$; $4m'$, $4n'$; $8m'$, $8n'$; ...; on obtient

$$S_4 = (S_1 + S_2 + S_3)\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \dots\right) = \tfrac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3),$$

et le terme $S_1 - S_2 - S_3 + S_4$ dans l'expression de $\chi\omega$ devient ainsi

$$= \tfrac{4}{3}S_1 - \tfrac{2}{3}S_2 - \tfrac{2}{3}S_3.$$

Dans S_1, S_2, ou S_3, en supposant que m', n' dénotent des nombres relativement premiers, on peut donner à m, n les valeurs m', n'; $3m'$, $3n'$; $5m'$, $5n'$; ...: on obtient ainsi, pour chacune de ces sommes,

$$S = S\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8} S,$$

où, au côté droit, m et n sont des nombres relativement premiers; le terme devient ainsi

$$\frac{\pi^2}{8}\left(\tfrac{4}{3}S_1 - \tfrac{2}{3}S_2 - \tfrac{2}{3}S_3\right) = \frac{\pi^2}{6}\left(S_1 - \tfrac{1}{2}S_2 - \tfrac{1}{2}S_3\right),$$

et nous avons

$$\chi\omega = 2^{\frac{1}{6}} \text{ exp. } \left[\frac{i\pi\omega}{24} - \frac{i\pi}{24\omega} + \frac{i\pi}{12}\left(S_1 - \tfrac{1}{2}S_2 - \tfrac{1}{2}S_3\right)\frac{1}{n(n\omega - m)}\right].$$

Je m'arrête pour remarquer que cette expression s'accorde parfaitement avec des résultats trouvés par M. Dedekind (*Œuvres de Riemann*, Leipzig, 1876, p. 447). En effet, en donnant à ω la valeur $\omega = \frac{m}{n} + i\alpha$, α une valeur positive très petite, M. Dedekind trouve les valeurs de $\log k$ et $\log k'$; en ajoutant ces valeurs et en ne faisant attention qu'aux termes qui deviennent infinis pour $\alpha = 0$, on a

$$\log kk' = 12 \log \chi\omega = \quad 24A,$$

m et n tous les deux impairs;

$$\log kk' = 12 \log \chi\omega = -12A,$$

m et n l'un impair, l'autre pair.

Ici $A = \frac{\pi i}{24n(n\omega - m)}$, et les valeurs de $\log \chi\omega$ sont ainsi

$$\frac{i\pi}{12}\,\frac{1}{n(n\omega - m)} \text{ et } -\frac{i\pi}{24}\,\frac{1}{n(n\omega - m)}$$

respectivement.

Dans l'expression de $\chi\omega$, il convient de réunir les termes qui correspondent aux valeurs $-m$, $+m$, c'est-à-dire au lieu de $\frac{1}{n(n\omega - m)}$, on doit écrire

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n\omega - m} + \frac{1}{n\omega + m}\right) = \frac{2\omega}{n^2\omega^2 - m^2};$$

on a ainsi finalement

$$\chi\omega = 2^{\frac{1}{6}} \exp. \left[\frac{i\pi\omega}{24} - \frac{i\pi}{24\omega} + \frac{i\pi}{6}\left(S_1 - \tfrac{1}{2}S_2 - \tfrac{1}{2}S_3\right)\frac{\omega}{n^2\omega^2 - m^2}\right],$$

où je rappelle que m et n sont des nombres positifs relativement premiers, et que les signes sommatoires S_1, S_2, S_3 se rapportent, S_1 aux valeurs impaires de m et n, S_2 aux valeurs impaires de m et paires de n, S_3 aux valeurs paires de m et impaires de n.

Écrivant $-\frac{1}{\omega}$ au lieu de ω, le terme $\frac{\omega}{n^2\omega^2 - m^2}$ auquel se rapportent les sommations se change en $\frac{\omega}{m^2\omega^2 - n^2}$; on peut échanger les lettres m et n, et l'expression de $\chi\left(-\frac{1}{\omega}\right)$ devient ainsi identiquement celle de $\chi\omega$, c'est-à-dire la forme met en évidence la relation $\chi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \chi\omega$.

Il y a cependant, dans cette analyse et par rapport à l'échange des lettres m et n, une difficulté qu'il convient d'écarter. Dans la formule

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \Sigma_m \frac{\cos m\pi}{x - m\pi} \quad (m = 1 \text{ jusqu'à } +\infty \text{ et } -1 \text{ jusqu'à } -\infty),$$

qui donne lieu à

$$\frac{1}{n \sin^2 n\pi\omega} = \frac{1}{n^2\pi\omega} + \frac{1}{\pi} \Sigma_m \frac{\cos m\pi}{n(n\omega - m)},$$

il est nécessaire que la variable x ait une valeur finie ou au moins infiniment petite par rapport aux valeurs extrêmes de m; ainsi, en écrivant pour x la valeur $n\pi\omega$, les valeurs extrêmes de n doivent être infiniment petites par rapport à celles de m, et la somme que nous avons dénotée simplement par $\Sigma_n \Sigma_m \frac{1}{n(n\omega - m)}$ signifie réellement $\overset{\nu}{\Sigma}_n \overset{\mu}{\Sigma}_m \frac{1}{n(n\omega - m)}$, savoir les limites pour n sont 1, ν et pour m ces limites sont -1, $-\mu$ et $+1$, $+\mu$ où μ et ν sont des nombres infiniment grands, mais $\frac{\mu}{\nu} = \infty$, ou, ce qui est la même chose, la somme est $\overset{\nu}{\Sigma}_n \overset{\infty}{\Sigma}_m \frac{1}{n(n\omega - m)}$, où ν est un très grand nombre qui devient enfin $= \infty$. En réunissant les termes pour m et $-m$, la somme à considérer est $\overset{\nu}{\Sigma}_n \overset{\infty}{\Sigma}_m \frac{1}{n^2\omega^2 - m^2}$, et il s'agit de faire voir qu'il est permis de substituer pour cela la somme

$$\overset{\nu}{\Sigma}_n \overset{\nu}{\Sigma}_m \frac{1}{n^2\omega^2 - m^2}. \qquad (\nu = 1 \text{ à } \nu = \infty).$$

La différence des deux expressions est une somme double $n = 1$ jusqu'à $n = \nu$ et $m = \nu + 1$, jusqu'à $m = \infty$, savoir cette somme est égale à

$$\begin{aligned}\cos \nu\pi \Big\{ &+ \left[\frac{1}{\omega^2 - (\nu+1)^2} - \frac{1}{\omega^2 - (\nu+2)^2} + \frac{1}{\omega^2 - (\nu+3)^2} - \dots\right] \\ &- \left[\frac{1}{4\omega^2 - (\nu+1)^2} - \frac{1}{4\omega^2 - (\nu+2)^2} + \frac{1}{4\omega^2 - (\nu+3)^2} - \dots\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \cos \nu\pi &\left[\frac{1}{\nu^2\omega^2 - (\nu+1)^2} - \frac{1}{\nu^2\omega^2 - (\nu+2)^2} + \frac{1}{\nu^2\omega^2 - (\nu+3)^2} - \dots\right] \Big\},\end{aligned}$$

laquelle somme $\left(\text{sauf pour une valeur imaginaire } \omega = \frac{m}{n} + i\alpha, \ \alpha \text{ positif}\right)$ devient aussi petite que l'on veut en donnant à ν une valeur suffisamment grande; c'est-à-dire qu'on peut négliger cette différence et ainsi considérer la somme $\Sigma_n \Sigma_m \frac{1}{n(n\omega - m)}$, dont je me suis servi dans l'investigation comme ayant pour n et pour les valeurs positives ou négatives de m les mêmes limites 1, ν $(\nu = \infty)$.

La forme trouvée pour $\chi\omega$ met en évidence que $\omega = 0$, $\omega = \infty$, et $\omega = \pm \frac{m}{n}$ sont des valeurs essentiellement singulières pour la fonction.