http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego
http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

Zarys Rachunku geometrycznego.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

Druk P. Laskauera & W. Babickiego w Warszawie, Ś-to Krzyska 11.

http://rcin.org.pl

Inw

Kat.

G. Peano.

ZARYS
Rachunku geometrycznego

Przełożył za upoważnieniem autora

S. Dickstein.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego
L. inw. 1416

WARSZAWA.
Wydawnictwo Redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych."
1897.

http://rcin.org.pl

Opis nr. 44747

Дозволено Цензурою.
г. Варшава, 10 Іюня 1897 г.

PAŃST'W. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA
5416

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

Rachunek geometryczny różni się od geometryi kartezyuszowskiej tem, że ta ostatnia operuje analitycznie na spółrzędnych, gdy pierwsza wykonywa swe działania bezpośrednio na utworach geometrycznych.

Pierwsza próba rachunku geometrycznego datuje od Leibniza, którego umysł szeroki otworzył wiele nowych dróg matematyce.

Najprzód rozwinęła się analiza nieskończonościowa, dzięki jego rówieśnikom i uczniom. Rachunek geometryczny, którym się zajmujemy, rozwinął się dopiero w stuleciu bieżącem, lubo jeszcze dotąd nie rozpowszechnił się dostatecznie. Logika matematyczna, której zasady jasno Leibniz wyłożył, dopiero teraz rozwija się szybko, rozwiązując rozmaite nastręczające się trudności.

O tych wszystkich różnych przedmiotach Leibniz pisał szkicowo. O rachunku geometrycznym mówi z zapałem w liście swym do Huygensa (8 września 1679 r.), tłomacząc wielkie pożytki, jakie przynieść może.

Po Leibnizu — jeżeli pominiemy interpretacyę geometryczną liczb urojonych podaną przez Arganda, — przedmiotem tym zajmował się dość szczęśliwie Möbius w „Rachunku barycentrycznym" (1827), który zastosował do wielu pytań, zwłaszcza w swojej „Mechanice niebieskiej" (1842).

Równocześnie i niezależnie od niego, Bellavitis w swojej pracy „Metodo delle equipollenze" (1854), której początki

http://rcin.org.pl

znaleść można już w jego pracach z r. 1832, podał liczne zastosowania rachunku geometrycznego.

W r. 1844 Grassmann ogłosił swoją naukę rozciągłości (Ausdehnungslehre), mało czytaną i nieocenioną przez współczesnych i dopiero później podziwianą przez wielu uczonych. Tą pracą zajmiemy się specyalnie w tej rozprawie.

Dla zakończenia tych treściwych wiadomości historycznych wspomnijmy jeszcze, że Hamilton utworzył na drodze od poprzednich niezależnej teoryę kwaternionów, która jest nową metodą rachunku geometrycznego. Zarys tej teoryi był ogłoszony w r. 1843; wykład zupełny w r. 1853. Dzieło Hamiltona miało powodzenie u współczesnych, po części dzięki jasności wykładu i szczęśliwej nomenklaturze. Kwaterniony stosowano w wielu pracach i traktatach tak z czystej jak i ze stosowanej matematyki n. p. w „Traktacie o elektryczności i magnetyzmie” Maxwella. Lecz w naszych czasach jedni dążą do uproszczenia teoryi kwaternionów (Macfarlane), drudzy chcą powrotu do pomysłów Grassmanna lub skombinowania różnych metod rachunku geometrycznego.

W samej rzeczy, te różne metody rachunku geometrycznego nie pozostają wcale ze sobą w sprzeczności. Są one różnemi stronami tej samej nauki, skąd też wypływają różne sposoby, pod jakiemi ten sam przedmiot przedstawia się różnym autorom, badającym go niezależnie od innych.

Rachunek geometryczny bowiem, jak każda nowa metoda, nie jest układem konwencyonalnym, lecz układem prawd. Podobnie, metoda niepodzielnych (Cavalieri), nieskończenie małych (Leibniz), fluksyj (Newton), są jedną i tą samą nauką, mniej lub więcej doskonałą, pod różnemi postaciami.

Teorya Grassmanna zyskuje dziś najwyższe pochwały od różnych autorów, którzy ją wykładali lub stosowali. Czytelnik znajdzie o tem wiadomcść w spisie bibliograficznym o „Nauce rozciągłośei“ H. Grassmanna, ogłoszonym w „Rivista di Matematica“ (1895 str. 179), a zwłaszcza w najnow-

http://rcin.org.pl

szem, bardzo ważnem dziełku Schlegela: „Die Grassmannsche Ausdehnungslehre" [1]).

Musiała istnieć przyczyna, dla której dzieło Grassmanna tak późno zostało poznane i z taką trudnością się rozpowszechniało. Według mnie, przyczyna ta tkwiła w formie wykładu metafizycznej i mglistej, dalekiej od zwykłego języka matematyków, tak że od samego początku odpychała, zamiast przyciągać czytelnika. Ja sam, studyując to dzieło, poznałem potęgę tej metody jedynie ze szkicu jej zastosowań, ogłoszonych w r. 1845 w „Archivie" Grunerta (H. Grassmann's Werke, I str. 297).

Oparcie się na tych zastosowaniach umożliwiło mi dopiero rekonstrukcyę teoryi i utworzenie definicyj wprowadzonych utworów, przy stosowaniu jedynie geometryi elementarnej. Ogłosiłem tę teoryę z licznemi zastosowaniami w dziele »Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann« (Turyn, 1888). Też same definicye przyjął p. Carvallo w rozprawie «La méthode de Grassmann» (Nouvelles Annales de mathématiques; 1892, str. 8—37) odznaczającej się jasnością i prostotą wykładu. Następnie (w «Lezioni di analisi infinitesimale, 1893) wyłożyłem za pomocą symbolów logiki matematycznej twierdzenia tej teoryi. Tak więc, dzięki usiłowaniom różnych autorów, został z jednej strony znacznie uproszczony wykład metody Grassmanna, z drugiej zaś rozwinięto jej zastosowania do różnych części matematyki.

Wykłady zupełne rachunku geometrycznego, w których zakłada się jedynie znajomość matematyki elementarnej, są z natury rzeczy bardzo obszernemi. Z drugiej strony, wiele postępowań w tym rachunku ma pokrewieństwo z postępowaniami, które później często wprowadzano do geometryi analityczno-rzutowej, analizy, mechaniki; niektóre twierdzenia są znane

---

[1]) Dziełko to wydane zostało w przekładzie polskim: «Nauka rozciągłości H. Grassmanna;» Warszawa, 1896. (Przyp. tłom.).

http://rcin.org.pl

w tych naukach pod często różną postacią. Zwracając się przeto nie do autorów lecz do kolegów, pragnę uczynić zadość wielokrotnie objawionemu życzeniu wyłożenia sposobem zwięzłym definicyj i zasadniczych własności utworów, na których operuje rachunek geometryczny, zestawiając go z analogicznemi utworami, badanemi w różnych częściach matematyki.

Określimy tu utwory, t. j. formy geometryczne, stopnia 1go, 2go, 3go i 4go, których przypadkami szczególnemi są wektory, dwuwektory i trójwektory; dalej związek równości, jedyny, jaki tu występuje; działania dodawania i mnożenia i dwa działania, oznaczone symbolami ω i $|$. Ten układ zupełny działań pozwala już badać wszelkie pytania geometryi. W wykładzie częściowym można rozważać tylko niektóre z tych utworów i działań.

§ 1. **Czworościany.**

Niechaj znaki A, B, C, D. oznaczają punkty; przez ABCD oznaczamy czworościan, którego wierzchołkami są te punkty. $ABCD=0$ oznacza, że te cztery punkty leżą w jednej płaszczyźnie.

W czworościanie nierównym zeru rozważać będziemy z Möbiusem zwrot [1]). Czworościan ABCD nazywa się prawozwrotnym jeżeli osoba, umieszczona głową w A, stopami w B i obrócona ku CD, ma po swojej lewej ręce punkt C, po prawej punkt D. Nazwiemy czworościan lewozwrotnym w razie przeciwnym.

Pojęcie zwrotu czworościanu, jakkolwiek dość proste, bo sprowadzające się do rozważania strony prawej i lewej, nie napotyka się w księgach Euklidesa; dostajemy je dopiero, wyobrażając sobie osobę, umieszczoną sposobem wyżej wskazanym. Wprowadziwszy raz to pojęcie fizyczne zwrotu

[1]) Znajdujemy trudność w oddaniu pojęcia *il Senso* (Sinn, sens) w języku polskim; sądzimy atoli, że termin wyżej użyty, nie da tu powodu do dwuznaczności. (Przyp. tłom.).

http://rcin.org.pl

do rozważań nad czworościanami, będziemy już mogli określić zwrot innych badanych utworów geometrycznych.

Dwa czworościany nazywają się równemi, gdy mają tę samą wielkość i tenże sam zwrot. Czworościany można dodawać, można je mnożyć przez liczby rzeczywiste dodatnie lub ujemne i otrzymuje się zawsze czworościan. Tak więc, gdy $t_1, t_2 \ldots t_n$ są czworościany, $x_1\ x_2 \ldots x_n$ — liczby, to $x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_n t_n$ jest czworościanem; wielomian ten ma wszystkie własności wielomianów algebraicznych: można przemieniać porządek jego wyrazów, a mnożenie liczby przez czworościan ma własność rozdzielności względem obu czynników.

Czworościan zmienia znak, jeżeli przestawimy dwa jego wierzchołki (Möbius, Werke, str. 41)

$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC.$$

Przez stosunek $\frac{t}{u}$ dwóch czworościanów t i u, z których drugi nie jest zerem, rozumiemy liczbę rzeczywistą, przez którą pomnożywszy u, znajdziemy t. Stosunek ten jest miarą czworościanu t, przy przyjęciu czworościanu u za jednostkę miary: W wielu pytaniach zamiast o czworościanach można mówić o liczbach, będących ich miarą.

Czworościanem A B C D nazywa się także iloczyn czterech punktów A, B, C, D lub iloczyn punktu A. przez trójkąt B C D lub linii A B przez linię C D, lub wreszcie trójkąta A B C przez punkt D. Iloczyn ten nie jest przemiennym; przestawiając dwa wierzchołki, sprawiamy zmianę znaku; własność tę nazwano znakozmiennością.

Zobaczymy, jakie przyczyny usprawiedliwiają nazwanie czworościanu iloczynem.

§ 2. Formy geometryczne.

Niechaj $x_1, x_2 \ldots x_n$ będą liczby rzeczywiste; literami wielkiemi oznaczać będziemy punkty.

http://rcin.org.pl

Połóżmy jako określenia:

$$(x_1 A_1 + .. + x_r A_r) BCD = x_1 A_1 BCD + ... + x_r A_r BCD$$

$$x_1 A_1 B_1 + .. + x_r A_r B_r) CD = x_1 A_1 B_1 CD + .. + x_r A_r B_r CD$$

$$(x_1 A_1 B_1 C_1 + ... + x_r A_r B_r C_r) D = x_1 A_1 B_1 C_1 D + ... + x_r A_r B_r C_r D$$

Pierwsze strony tych równości nie mają dotąd znaczenia; nadajmy im wartość, jaką przedstawiają strony drugie, które są sumami czworościanów.

Nazywamy formą stopnia pierwszego każde wyrażenie postaci:

$$x_1 A_1 + ... + x_r A_r$$

t. j, ogół punktów A_1 . . . A_r ze spółczynnikami lub ma sami x_1 . . . x_r; formą drugiego stopnia każde wyrażenie postaci:

$$x_1 A_1 B_1 + ... + x_r A_r B_r;$$

formą trzeciego stopnia każde wyrażenie postaci:

$$x_1 A_1 B_1 C_1 + ... + x_r A_r B_r C_r.$$

Możemy formą stopnia czwartego nazwać każdą sumę czworościanów, która zresztą sprowadza się do pojedyńczego czworościanu.

Mnożąc tedy formę stopnia pierwszego przez trzy punkty lub formę stopnia drugiego przez dwa punkty, lub wreszcie formę stopnia trzeciego przez jeden punkt, otrzymujemy czworościany.

Forma s stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego, jest zerem, co piszemy: $s=o$, jeżeli mnożąc ją odpowiednio przez trzy, dwa, jeden punkt dowolny, otrzymujemy iloczyn zero.

Dwie formy s i s' jednego stopnia: pierwszego, drugiego lub trzeciego nazywają się równemi, co się pisze: $s=s'$, jeżeli

http://rcin.org.pl

mnożąc je odpowiednio przez trzy, dwa i jeden punkt dowolny, otrzymujemy iloczyny równe.

Te określenia form zerowych oraz równości dwu form są zasadniczemi w teoryi naszej; uciekamy się do nich zawsze, ilekroć powstaje jaka wątpliwość co do interpretacyi wzorów.

Iloczyn formy geometrycznej stopnia pierwszego przez trójkąt BCD jest, przy zmienianiu się formy, proporcyonalny do momentu tej formy względem płaszczyzny trójkąta, t. j. do sumy odległości punktów formy od płaszczyzny, pomnożonych przez odpowiednie masy. Stąd, dwie formy stopnia pierwszego nazywają się równemi wtedy, gdy mają momenty równe względem każdej płaszczyzny,

Jeżeli linia A B przedstawia siłę, iloczyn A B C D jest proporcyonalny do tego, co nazywamy momentem siły względem osi C D; stąd dwie formy stopnia drugiego nazywają się równemi, gdy mają ten sam moment względem każdej osi. Widzimy tedy analogię teoryi form pierwszego stopnia z teoryą środków ciężkości, teoryi zaś form stopnia drugiego z teoryą redukcyi sił, przyłożonych do ciała sztywnego.

§ 3. Działania na formach.

Już nazwaliśmy linią iloczyn A B dwu punktów, trójkątem — iloczyn A B C trzech punktów. Przez to wyrazy te nabierają znaczenia specyalnego i jako przypadki szczególne form drugiego i trzeciego stopnia. Stąd równość $ABC = A'B'C'$ oznacza, według definicyi, że gdy weźmiemy jakikolwiek punkt D, będzie zawsze $ABCD = A'B'C'D$; można to wyrazić, mówiąc, że dwa trójkąty leżą na tej samej płaszczyźnie, mają tę samą wielkość i tenże sam zwrot. Podobnież $AB = A'B'$ oznacza, że dwa odcinki znajdują się na tej samej prostej, mają tę samą wielkość i ten sam zwrot i to nie przez definicyę, lecz jako wynik bezpośredni definicyi.

Na sumę i iloczyn form geometrycznych podajemy następujące definicye, bezpośrednio jasne:

http://rcin.org.pl

Suma dwóch form tego samego stopnia jest to forma, którą otrzymujemy, pisząc jedne za drugiemi wyrazy pierwszej i drugiej formy,

Iloczynem formy stopnia i przez formę stopnia j, w założeniu $i+j \leq 4$, jest suma iloczynów każdego wyrazu formy pierwszej przez każdy wyraz formy drugiej.

Bezpośredniem następstwem tych definicyj jest, że rachunek geometryczny różni się od rachunku algebraicznego tylko tem:

1. Że możemy mnożyć przez siebie tylko dwa, trzy lub cztery punkty, gdyż nie ma form stopnia wyższego nad czwarty.

2. Że jest $A B = -B A$, a stąd $A A = 0$.

Poza tem rachunek geometryczny posiada wszystkie własności rachunku algebraicznego wielomianów.

Dodawanie jest przemiennem i łącznem, mnożenie łącznem i rozdzielnem względem obu czynników. Zawsze zamiast jednej formy można podstawić inną jej równą.

Ta zgodność obu rachunków stanowi wielce ważną zaletę metody Grassmanna. Pozwala on operować i rozumować z wielką oszczędnością sił i pamięci, albowiem w tym nowym rachunku operuje się tak, jak w rachunku już znanym. Rachunek ten odpowiada przeto zasadzie najmniejszego wysiłku, znajdującej zastosowanie nietylko w mechanice lecz także i w dydaktyce.

Odwrotnie, jeżeli przypiszemy wyrażeniu $A B C D$ wyżej podane znaczenie i zechcemy, aby utrzymały się wspomnione prawidła algebraiczne, dojdziemy z konieczności do rachunku Grassmannowskiego, który będzie tym sposobem określony. Lecz określenie takie byłoby za obszerne: jest ono równoważnem grupie twierdzeń, z których niektóre są definicyami, inne zaś są ich następstwem.

§ 4. Wektory.

Pomiędzy formami stopnia pierwszego na wyróżnienie zasługuje różnica $B-A$ dwóch punktów, t. j. ogół dwóch

http://rcin.org.pl

punktów A i B z ich spółczynnikami -1 i $+1$. Różnica taka nazywa się wektorem.

Dwa wektory B—A i B′—A′ są na zasadzie określenia równemi wtedy, gdy wziąwszy jakiekolwiek trzy punkty P, Q, R, będziemy mieli:

$$BPQR - APQR = B'PQR - A'PQR.$$

Warunek ten łatwo przekształcić na następujący: „dwa wektory są równe, gdy mają tę samą długość, są równoległe i skierowane w jednę stronę."

A i B nazywają się początkiem i końcem wektoru B—A.

Początek wektoru można obrać dowolnie.

Aby do punktu A dodać wektor I, należy wyznaczyć punkt B taki, aby było $B - A = I$

Przenosząc, mamy $B = A + I$.

Dla dodania dwóch wektorów I i J, bierzemy dowolnie punkt A, wyznaczamy punkt $A + I$, potem punkt $A + I + J$; wektor $(A + I + J) - A$ znaczy to samo co $I + J$. Tak więc suma dwu wektorów jest wektorem.

Mnożąc wektor przez liczbę rzeczywistą, otrzymujemy wektor równoległy do danego.

Jeżeli daną jest forma stopnia pierwszego

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$$

i punkt O, to mamy tożsamość.

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = (x_1 + \ldots + x_n) O$$
$$+ x_1 (A_1 - O) + \ldots + x_n (A_n - O)$$

t. j. każda forma stopnia pierwszego daje się sprowadzić do punktu dowolnego O ze spółczynnikiem, równym sumie spółczynników formy, i do wektoru.

http://rcin.org.pl

„Każda forma pierwszego stopnia, w której suma spółczynników jest zerem, sprowadza się do wektoru.»

«Każda forma stopnia pierwszego, w której suma spółczynników nie jest zerem, podzielona przez tę sumę, daje punkt».

Ten punkt jest środkiem ciężkości układu danych punktów z odpowiedniemi masami. W ten sposób wynika stąd rachunek barycentryczny, i w samej rzeczy, teorya form stopnia pierwszego zlewa się tak co do swej istoty, jak i co do znakowań, z rachunkiem Möbiusa.

Möbius wszakże ograniczył się na niewielu tylko uwagach, odnoszących się do przypadku, w którym forma sprowadza się do wektoru, nie podnosząc atoli wielkiej ważności tego przypadku.

Termin wektor wprowadzony został przez Hamiltona; odpowiada on dokładnie odcinkowi Bellavitisa; w użyciu coraz ogólniejszem bywa pierwsza nazwa, wykluczająca wszelką dwuznaczność.

Lecz ci autorowie rozważają wprost wektor, nie czyniąc go zależnym od form pierwszego stopnia i przyjmując za definicye równości i sumy podane dopiero co przez nas własności. Zresztą pojęcie wektorów, ich sumy lub składania jest nieco dawniejsze, ponieważ napotykamy je już w pojęciu prędkości i siły; mimo to zasługą tych autorów jest okazanie, w jak sposób na składaniu wektorów można oprzeć rachunek geometryczny.

Tak Bellavitis jak i Hamilton oznaczają przez AB wektor o początku A i końcu B, to co my według Grassmanna oznaczamy przez B—A. Już Hamilton zwrócił był uwagę na wyższość znakowania B—A, lecz nie uczynił z niego użytku.

Według naszych znakowań B—A i AB są utworami całkowicie różnemi. Niezależnie od tego, wzory Hamiltona (A, B, C są punktami):

http://rcin.org.pl

$$BA = -AB;\ AB + BC + CA = 0$$

wyrażają to samo, co wzory Grassmanna:

$$A - B = -(B - A);\ (B - A) + (C - B) + (A - C) = 0$$

i widzimy, że te ostatnie mają postać tożsamości algebraicznych, gdy tymczasem pierwsze mają postać odmienną i wymagają nowego wysiłku pamięci. Widzimy tedy, że rachunek Grassmanna jest ekonomicznie wyższy od rachunku Hamiltona.

Bellavitis wprowadza znak dla wskazania ekwipolencyi dwóch odcinków; dla odcinków tedy mamy do rozważania równość i ekwipolencyę. Dwa odcinki ekwipolentne mogą zastępować się wzajemnie we wzorach, które trzeba pamiętać. Tymczasem mając jeden tylko znak równości, możemy zawsze, w każdym wzorze, zamiast danego utworu, podstawić inny mu równy; jest to prawidło, od którego żadne nie może być już prostszem.

§ 5. Formy stopnia 2-go i 3-go.

Teorya form stopnia drugiego zlewa się z teoryą układów sił, przyłożonych do ciała sztywnego; lecz w pierwszej z nich występują tylko pojęcia geometryczne i działania wykonywają się z algorytmami algebraicznemi.

Oto kilka prób. Mamy $A(B-A)=AB$, a więc każda linia jest iloczynem punktu przez wektor, i odwrotnie. Przez wektor formy 2go stopnia rozumiemy sumę wektorów jego wyrazów. Mamy tożsamościowo:

$$AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n = A[A + (B_1 - A) + \ldots (B_n - A)]$$

t. j. suma linij, mających wspólny początek, jest linią, mającą ten sam początek, a koniec w punkcie przedstawionym w wyrażeniu, objętem przez nawias.

http://rcin.org.pl

Iloczyn dwu wektorów nazywa się *dwuwektorem*. Jest to forma drugiego stopnia, odpowiadająca *parze* w mechanice. Suma dwuwektorów jest dwuwektorem. Każda forma stopnia drugiego daje się nieskończenie wielu sposobami sprowadzić do sumy linii i dwuwektoru.

Formy stopnia 3-go nie dają się interpretować mechanicznie:

Mamy twierdzenie:

«Każda suma trójkątów daje się sprowadzić do jednego pojedyńczego trójkąta lub do iloczynu trzech wektorów.»

Iloczyn trzech wektorów nazywa się *trójwektorem*. Jeżeli dołączymy trójwektor do trójkąta, to ten ostatni przenosi się równolegle do samego siebie.

Krótkie ćwiczenie wystarczy do nabrania wprawy w tym rachunku, różniącym się od rachunku algebraicznego tem, że mnożenie jest znakozmiennem.

Nie będą być może bezużytecznemi następujące uwagi:

Wektor B—A jest formą pierwszego stopnia; linia AB jest formą drugiego stopnia.

Dwa wektory B—A, B′—A′ są równemi wtedy, gdy pomnożywszy je przez trzy punkty dowolne, otrzymamy iloczyny równe; dwie linie AB i A′B′ są równe, gdy pomnożywszy je przez dwa punkty dowolne, otrzymamy iloczyny równe.

Z równości AB = A′B′ wyprowadzamy: B—A=B′—A′, lecz nie odwrotnie.

Dwuwektor (B—A) (C—A)=BC+CA+AB jest formą stopnia drugiego, trójkąt ABC formą stopnia trzeciego. Pomnożywszy tamten dwuwektor przez punkt A, otrzymamy trójkąt ABC.

Dwa dwuwektory AB+BC+CA i A′B′+B′C′+C′A′ są równemi wtedy, gdy, pomnożone przez dwa punkty dowolne, dają iloczyny równe; dwa trójkąty są równemi wtedy, gdy, po pomnożeniu przez jeden i ten sam punkt dowolny, dają iloczyny równe.

http://rcin.org.pl

Równość $ABC = A'B'C'$ orzeka, że dwa te trójkąty leżą na tej samej płaszczyźnie, mają pola równe i jednego zwrotu.

Równość $AB + BC + CA = A'B' + B'C' + C'A'$ orzeka, że dwa trójkąty leżą na płaszczyznach równoległych, mają pola równe i jednego zwrotu.

Z równości $ABC = A'B'C'$ wynika również $AB + BC + CA = A'B' + B'C' + C'A'$, lecz nie odwrotnie.

Trójwektor daje się sprowadzić do postaci:

$$(B - A)(C - A)(D - A)$$

po rozwinięciu zaś do postaci:

$$BCD - ACD + ABD - ABC,$$

t. j. do powierzchni czworościanu ABCD. Mnożąc ten trójwektor przez punkt dowolny, otrzymujemy ten sam trójwektor.

Jeżeli dwa czworościany są równe, to są równemi ich trójwektory, i odwrotnie.

Niechaj będzie w płaszczyźnie stałej forma drugiego stopnia, t. j. układ linij:

$$A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_n B_n$$

Jeżeli przyjmiemy dla przykładu, że wektor tej formy nie jest zerem, to ona da się sprowadzić do jednej linii CD; tak, że gdy weźmiemy jakikolwiek punkt P na płaszczyźnie, będzie

$$PA_1B_1 + PA_2B_2 + \ldots + P A_n B_n = PCD.$$

Konstrukcya linii CD, wynikająca z naszej teoryi, jest identyczna z konstrukcyą wypadkowej sił $A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots$ i z przekształceniem sumy trójkątów na trójkąt, i—w przypadku szczególnym—z przekształceniem wielokąta na trójkąt, podawanem w grafice statycznej. Dla tego przyjęliśmy pojęcie pól równych, bez rozbioru. Lecz łatwo widzieć, że to przekształcenie opiera się na następującej tożsamości, zachodzącej pomiędzy trzema wektorami I, J, K:

$$(I + J) K = IK + JK$$

która stanowi twierdzenie Varignona.

http://rcin.org.pl

Dwuwektory lub pola, z dwóch wyrazów złożone, można rozłożyć na części, wzajem na siebie przypadające. Stąd wielokąt dany daje się w istocie rzeczy podzielić na części, które ułożone w sposób odmienny, tworzą trójkąt; trójkąt ten nazywamy równym wielokątowi. Mamy tym sposobem drogę do rozwiązania zadania, często dyskutowanego w ostatnich latach, że wiolokąty równe według Euklidesa dają się rozłożyć na części, wzajemnie na siebie przypadające. Dowodzenie to zgadza się co do swej istoty z dowodzeniem p. Gérarda w artykule: «Sur le mesure des polygones» (Bulletin de mathématiques élémentaires, 1896 p. 102.)

§ 6. **Spółrzędne.**

Niechaj A_1, A_2, A_3, A_4 będą cztery formy stopnia pierwszego, których iloczyn nie jest zerem. Nazwijmy je «formami odniesienia.» Każda forma stopnia pierwszego daje się sprowadzić do postaci:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$

gdzie x_1, x_2, x_3, x_4 są liczbami, które nazywamy spółrzędnemi formy.

Każda forma stopnia drugiego jest funkcyą liniową sześciu iloczynów; czynnikami każdego z nich są dwie formy Forma ta może być napisaną w postaci

$$y_{12} A_1 A_2 + y_{13} A_1 A_3 + \dots + y_{34} A_3 A_4$$

Liczby $y_{12}, \dots, y_{34}$ nazywają się spółrzędnemi formy stopnia drugiego.

Każda forma stopnia 3-go jest funkcyą liniową iloczynów; czynnikami każdego z nich są trzy formy odniesienia. Forma ta może być napisaną tak:

$$z_1 A_2 A_3 A_4 - z_2 A_1 A_3 A_4 + z_3 A_1 A_2 A_4 - z_4 A_1 A_2 A_3;$$

cztery liczby z_1, z_2, z_3, z_4 nazywają się spółrzędnemi formy

http://rcin.org.pl

Spółrzędne formy można łatwo wyrazić przez stosunk czworościanów. Istotnie, jeżeli

$$S = x_1 \, A_1 + x_2 \, A_2 + x_3 \, A_3 + x_4 \, A_4 ,$$

to, po pomnożeniu obu stron przez $A_2 \, A_3 \, A_4$, pozostanie po stronie drugiej tylko wyraz pierwszy; a stąd:

$$x_1 = \frac{S_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4}{A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4}$$

Analogiczne wyrażenie otrzymujemy dla pozostałych spółrzędnych.

Niechaj będzie forma stopnia drugiego:

$$s = y_{12} \, A_1 \, A_2 + y_{13} \, A_1 \, A_3 + \ldots$$

Po pomnożeniu obu stron przez $A_3 \, A_4$, otrzymujemy

$$y_{12} = \frac{s \, A_3 \, A_4}{A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4}, \text{ i t. d.}$$

Podobnie rzecz się ma dla form stopnia trzeciego.

Z wielką prostotą rozwiązujemy różne zadania, dotyczące spółrzędnych, a między innemi zadanie o znalezieniu spółrzędnych sum lub iloczynów form o danych spółrzędnych. W tym celu dość wykonać tylko wskazane działania.

Obliczmy naprzykład, objętość czworościanu, który jest iloczynem czterech form pierwszego stopnia o danych spółrzędnych $(x_1 \ldots x_4)$, $(y_1 \ldots y_4)$, $(z_1 \ldots z_4)$, $(t_1, \ldots t_4)$.

Formy dane mają wyrażenia:

$$x_1 \, A_1 + x_2 \, A_2 + x_3 \, A_3 + x_4 \, A_4,$$
$$y_1 \, A_1 + y_2 \, A_2 + y_3 \, A_3 + y_4 \, A_4,$$
$$z_1 \, A_1 + z_2 \, A_2 + z_3 \, A_3 + z_4 \, A_4,$$
$$t_1 \, A_1 + t_2 \, A_2 + t_3 \, A_3 + t_4 \, A_4.$$

http://rcin.org.pl

Pomnóżmy przez siebie te wielomiany. Iloczyn składać się będzie z pewnej liczby wyrazów. Przy mnożeniu dwu wyrazów, należących do tej samej linii pionowej, otrzymujemy w iloczynie zero; potrzeba więc będzie mnożyć tylko wyrazy z różnych kolumn i wierszy. Jednym z wyrazów iloczynu będzie $x_1 y_2 z_3 t_4 \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \mathrm{A}_4$; z niego otrzymamy każdy inny wyraz, przemieniając skaźniki 1, 2, 3, 4; a jeżeli chcemy, aby czynnikiem wspólnym było $\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \mathrm{A}_4$, to trzeba będzie dać spółczynnikowi znak $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy liczba inwersyj jest parzystą lub nieparzystą. Otrzymujemy tedy na iloczyn wyrażenie:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ t_1, & t_2, & t_3, & t_4 \end{vmatrix} \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \mathrm{A}_4,$$

które jest wyznacznikiem.

Widzimy więc, że występuje tu pojęcie wyznacznika, którego teorya może być całkowicie rozwinięta za pomocą metod ogólnych Grassmanna; ograniczamy się wszakże na tej uwadze, gdyż mówimy tu tylko o zastosowaniach geometrycznych.

Elementy odniesienia $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ mogą być dowolne Zasługuje na uwagę przypadek, w którym za elementy te bierzemy punkt O oraz trzy wektory I, J, K, nie leżące na jednej płaszczyźnie. Taki układ spółrzędnych nazywa się kartezyuszowskim. Każda forma stopnia pierwszego daje się sprowadzić do postaci:

$$m\mathrm{O} + x\mathrm{I} + y\mathrm{J} + z\mathrm{K};$$

każdy punkt do formy

$$\mathrm{O} + x\mathrm{I} + y\mathrm{J} + zK,$$

każdy wektor do formy:

$$x\mathrm{I} + y\mathrm{J} + zK$$

http://rcin.org.pl

każda forma stopnia drugiego daje się sprowadzić do postaci

$$l\mathrm{OI} + m\mathrm{OJ} + n\mathrm{OK} + p\mathrm{JK} + q\mathrm{KI} + r\mathrm{IJ}$$

Jeżeli forma przedstawia układ sił, wtedy sześć spółrzędnych formy nazywamy w mechanice charakterystykami układu.

Iloczyn formy przez samą siebie ma postać:

$$(lp + mq + nr)\,OIJK;$$

Znikanie tej formy jest warunkiem na to, aby forma dała się sprowadzić do linii lub do dwuwektoru.

Każdy dwuwektor daje się sprowadzić do postaci:

$$pJK + qKI + rIJ$$

i t. d.

§ 7. Zastosowanie do geometryi analityczno-rzutowej.

Do tej pory uważaliśmy formy geometryczne w ścisłym związku z utworami znanemi. Forma stopnia pierwszego nie znikająca daje się sprowadzić do punktu z masą lub do wektoru. Jeżeli pomnożymy ją przez liczbę nierówną zeru, to położenie punktu lub kierunek wektoru zmianie nie ulegnie. Stąd forma stopnia pierwszego określa punkt lub kierunek t. j. określa w każdym przypadku punkt rzutowy. Cztery spółrzędne formy stopnia pierwszego nazywają się spółrzędnemi jednorodnemi tego punktu. Jeżeli pomnożymy spółrzędne przez tę samą liczbę, to i forma będzie przez nią pomnożona, lecz punkt rzutowy nie zmieni się.

Jeżeli cztery elementy odniesienia A_1 A_2 A_3 A_4 są czterema formami dowolnemi, wtedy spółrzędne nazywają się rzutowemi; jeżeli są czterema punktami, mamy spółrzędne barycentryczne, jeżeli punkt i trzy wektory—kartezyuszowskie.

http://rcin.org.pl

Forma stopnia drugiego nierówna zeru lecz taka, że iloczyn jej przez samą siebie znika, daje się sprowadzić do linii lub do dwuwektoru; a więc określa prostą lub położenie t. j. w każdym razie określa prostą w skończoności lub w nieskończoności. Sześć spółrzędnych formy nazywają się spółrzędnemi jednorodnemi prostej.

Forma stopnia drugiego taka, że jej iloczyn przez samą siebie zerem nie jest, określa kompleks liniowy.

Forma stopnia trzeciego nie równa zeru, daje się sprowadzić do trójkąta lub do trójwektoru. W pierwszym razie określa płaszczyznę w skończoności, trójwektor zaś odpowiada płaszczyźnie w nieskończoności. Cztery spółrzędne formy są spółrzędnemi jednorodnemi płaszczyzny *).

§ 8. Iloczyny wsteczne.

Niechaj będą dwie formy stopnia pierwszego (lub punkty) A i B i trójkąt lub płaszczyzna π. Chcemy wyznaczyć punkt spotkania prostej AB z płaszczyzną π. Każdy punkt prostej wyraża się formą $x\mathrm{A} + y\mathrm{B}$; ponieważ punkt szukany ma leżeć na płaszczyźnie π, przeto być winno

$$(x\mathrm{A} + y\mathrm{B})\pi = 0.$$

lub

$$x\mathrm{A}\pi + y\mathrm{B}\pi = 0.$$

Równanie to spełni się, jeżeli na x i y weźmiemy wartości proporcyonalne do objętości $\mathrm{B}\pi$. i $-\mathrm{A}\pi$. Jeżeli więc

[1]) Obszerniejsze rozwinięcie spółrzędnych rzutowych, wyprowadzonych z rachunku geometrycznego, znaleść można w rozprawie; Burali Forti: «Il metodo del Grassmann nella geometria projettiva. (Rend. Circolo Palermo, 1896. str. 177).

http://rcin.org.pl

oznaczymy przez [t] liczbę, która mierzy objętość czworościanu t względnie do pewnego czworościanu stałego, to forma

$$[B\,\pi]\,A - [A\,\pi]\,B$$

leżeć będzie na prostej A B i na płaszczyźnie π. Jest to właśnie punkt przecięcia prostej z płaszczyzną.

Można dowieść, że ta forma, która przedstawia się jako funkcya form A i B jest w rzeczy samej funkcyą samego iloczynu AB, t. j. że nie zmienia się, jeżeli zamiast A i B weźmiemy inne formy A' i B' takie, że $A\,B = A'\,B'$. Dla tego nazwiemy znalezione wyrażenie iloczynem A B przez π, i napiszemy:

$$A\,B.\,\pi = [B\,\pi]\;A - [A\,\pi]\,B.$$

Iloczyn formy stopnia drugiego przez formę stopnia trzeciego jest więc formą stopnia pierwszego, zupełnie określoną. Punkt, który ona określa, jest przecięciem prostej i płaszczyzny, określonych przez formy dane.

Podobnie określamy iloczyn dwu form trzeciego stopnia (płaszczyzn), który jest formą stopnia $3+3-4=2$ (prostą), oraz iloczyn trzech form trzeciego stopnia, który jest formą stopnia $3+3+3-8$.

Te iloczyny, które nazywamy «wstecznemi» mają też własność rozdzielności względem obu czynników. Pomiędzy temi iloczynami i iloczynami postępowemi, uważanemi poprzednio, zachodzą godne uwagi związki. Badanie ich przedstawia interes dla geometryi wyższej, gdyż metoda Grassmanna może wskazać w symbolach wszelkie konstrukcye, jakie otrzymujemy za pomocą rzutów i przecięć; pozwala przeprowadzać rozumowanie na tych wzorach, przekształcać jedne wzory na drugie i rozpoznawać stopień tak określonego miejsca geometrycznego. Wielu autorów, wymienionych w moim «Rachunku geometrycznym», postępując tą drogą, doszło do godnych uwagi wyników. Lecz ponieważ iloczyny wsteczne są

http://rcin.org.pl

mniej prostemi od innych działań, wystarczy na tem miejscu to, co o nich powiedzieliśmy.

§ 9. Działanie ω na formach.

Ważnym jest przypadek iloczynu wstecznego, w którym jeden czynnik jest trójwektorem stałym, przyjętym za jednostkę. Nie chcąc wszakże mówić o iloczynach wstecznych, podamy określenia następujące:

Jeżeli s jest formą stopnia pierwszego, to przez ωs oznaczymy jej masę, t. j. sumę spółczynników formy.

Jeżeli s jest formą stopnia drugiego, to przez ωs oznaczymy wektor formy, t. j. sumę wektorów jej wyrazów: tak, np. gdy A i B są punktami, będzie $\omega(AB) = B - A$.

Jeżeli s jest formą stopnia trzeciego, przez ωs oznaczymy dwuwektor formy s: tak, gdy A, B, C są punktami, będzie:

$$\omega(ABC) = (B - A)\ (C - A) = BC + CA + AB.$$

I podobnie $\omega(ABCD)$ oznacza trójwektor czworościanu

ABCD, t. j. $BCD - ACD + ABD - ABC$

Działanie ω jest rozdzielnem, to jest:

$$\omega\ (s + s') = \omega s + \omega s';$$

Znak ω we wszystkich rachunkach zachowuje się jako czynnik stały. Działanie ω, wykonane na wektorze, dwuwekitorze lub trójwektorze, daje na rezultat zero.

§ 10. Działanie skaźnikowe na wektorach i dwuwektorach.

Metrem nazwijmy jednostkę miary długości.

Przez moduł wektoru I rozumiemy długość jego, wymierzoną w metrach.

http://rcin.org.pl

Przez moduł dwuwektoru IJ rozumiemy pole równoległoboku o bokach równych wektorom I i J, wymierzone w metrach kwadratowych. Moduł wektoru lub dwuwektoru jest więc liczbą dodatnią lub zerem.

W trójwektorze IJK, prócz jego wielkości, t. j. objętości równoległościanu, zbudowanego na trzech wektorach danych, wymierzonej w metrach sześciennych, rozważamy jeszcze zwrot. Trójwektor nazywa się dodatnim, jeżeli np. czworościan OIJK jest prawozwrotnym.

Dla dogodności w pisaniu będziemy utożsamiali trójwektor z liczbą, która go mierzy, poprzedzoną odpowiednim znakiem. Innemi słowy, niechaj ω będzie trójwektorem trzech wektorów o długości jednego metra, prostopadłych po dwa do siebie, i takich, że czworościan $O\omega$ jest prawozwrotny. Wtedy w stosunku $\frac{IJK}{\omega}$ zniesiemy mianownik (jeżeli nie ma obawy o dwuznaczność) i będziemy pisali wprost IJK.

Nazywamy skaźnikiem dwuwektoru IJ i oznaczamy go przez $|(IJ)$ wektor K prostopadły do IJ tak i że $IJK = KIJ$ jest dodatnie i którego moduł równa się modułowi dwuwektoru IJ.

Jeżeli $K = |(IJ)$, to mówimy także, że IJ jest skaźnikiem wektoru K i piszemy $IJ = |K$.

Tak więc skaźnikiem dwuwektoru jest wektor i odwrotnie. Jeżeli dwuwektor przedstawia parę sił, to skaźnik nazywa się w mechanice osią momentu pary.

Działanie $|$ jest rozdzielnościowem i w rachunkach ten znak zachowuje się jak czynnik stały.

Działanie $|$ określa pewną biegunowość, którą niektórzy autorowie nazywają absolutem. Pozwala ona badać własności metryczne figur. Oto niektóre wyniki:

$$I\,|\,I = (\text{mod. } I)^2 \tag{1}$$

t. j. iloczyn wektoru przez jego skaźnik równa się kwadratowi modułu. Grassmann skraca $I|I$ na J^2. Możemy pisać

http://rcin.org.pl

bez obawy dwuznaczności I^2 i czytać: kwadrat wektoru I przez co rozumiemy $I|I$ nie zaś $II=o$.

Z poprzedniego równania można otrzymać mod. I. Toż, samo otrzymuje się także, gdy I jest dwuwektorem

Wyrażenie $\frac{I}{\text{mod. } I}$ przedstawia wektor o długości jedność, i o kierunku i położeniu wektoru I.

Niechaj I i J będą dwa wektory o długości jedność; IJ jest dwuwektorem, mod. (IJ) — liczbą, którą nazywamy **wstawą** kąta dwu wektorów. Jeżeli I, J nie są równe jednostce miary, to najprzód je do niej sprowadzamy i będzie

$$\sin(I, J) = \frac{\text{mod. } (IJ)}{\text{mod. } I \text{ mod. } J}$$

Wstawa kąta dwu wektorów jest liczbą zawartą zawsze pomiędzy o a 1.

Niechaj I będzie wektorem, j — dwuwektorem, i niechaj moduły obu będą jednościami. Liczba Ij nazywa się **wstawą ich** kąta pomiędzy niemi. Jeżeli moduły wektoru I i dwuwektoru j są jakiekolwiek, będzie:

$$\sin(I, j) = \frac{Ij}{\text{mod. } I \text{ mod. } j}$$

Wstawa kąta pomiędzy wektorem i dwuwektorem jest liczbą zawartą pomiędzy -1 i $+1$.

Dostawą kąta dwu wektorów I i J nazywamy wstawę kąta pomiędzy I a $|J$, to jest

$$\cos(I, J) = \frac{I|J}{\text{mod. } I \text{ mod. } J}$$

Dostawa kąta dwu wektorów jest zawarta pomiędzy -1 i $+1$.

http://rcin.org.pl

Wzór ten, po zniesieniu mianowników, wyraża, że iloczyn jednego wektoru przez skaźnik drugiego równa się iloczynowi modułów przez dostawę kąta pomiędzy niemi zawartego.

Iloczyn $I \mid J$ nazwany został przez Grassmanna iloczynem wewnętrznym dwu wektorów. Iloczynem zewnętrznym nazwał on dwuwektor IJ. Ten iloczyn wewnętrzny występuje w mechanice, gdyż wyraża on pracę wykonaną przez siłę I, której punkt przyłożenia doznał przesunięcia J. W wielu traktatach mechaniki iloczyn ten oznaczany bywa osobnym znakiem.

Tak więc działania matematyki elementarnej: odległość dwu punktów, pole trójkąta wstawa i dostawa kąta, które to działania nie są rozdzielnościowemi lecz mają własności złożone, wyrażają się za pomocą iloczynów zewnętrznych i wewnętrznych Grassmanna, nad któremi operuje się za pomocą prawideł prawie identycznych z prawidłami algebraicznemi.

§ 11. Zastosowania do geometryi kartezyuszowskiej.

Niechaj I, J, K będą trzy wektory o długości jedność, każde dwa do siebie prostopadłe i takie, że $IJK = +1$. Będzie:

$$I \mid I = J \mid J = K \mid K = 1, \quad I \mid J = I \mid K = J \mid K = 0,$$

$$\mid (JK) = I, \quad \mid (KI) = J, \quad \mid (IJ) = K. \tag{1}$$

Wektor U o spółrzędnych x, y, z ma wyrażenie

$$U = xI + yJ + zK. \tag{2}$$

Mnożę U przez $\mid U$, t. j. tworzę kwadrat i kwadrat ten ma wartość (mod $U)^2$. Na stronie drugiej rozwijam kwadrat według prawideł algebraicznych, uwzględniając tożsamość (1) i otrzymuję:

$$(\text{mod } U)^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{3}$$

http://rcin.org.pl

Gdyby wektory I, J, K nie były do siebie prostopadłemi, otrzymalibyśmy jeszcze wyrazy $2xy$ I | J + . . .; gdzie I | J = cos (I, J).

Warunek, aby punkt

$$P = O + xI + yJ + zK \tag{4}$$

leżał na płaszczyźnie trójkąta o spółrzędnych a, b, c, d t. j. trójkąta

$$\pi = aOJK - bOIK + cOIJ - dIJK \tag{5}$$

jest, by ich iloczyn $P\pi$ = był zerem. Rozwijając ten iloczyn i znosząc czynnik wspólny, otrzymujemy

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{6}$$

t. j. równanie płaszczyzny o danych spółrzędnych.

Pole trójkąta π jest połową modułu jego dwuwektoru $\omega\pi$, gdzie

$$\omega\pi = aJK + bKI + cIJ,$$

stąd:

$$\text{pole } \pi = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{7}$$

Oznaczmy odległość δ punktu P od płaszczyzny π.

Mamy

$$P\pi = \frac{1}{3}\,\delta\,\frac{1}{2} \text{ mod } (\omega\pi)\; m^3,$$

gdzie dla jednorodności napisaliśmy czynnik m^3 (metr sześcienny).

Ponieważ $OIJK = \frac{1}{6}\, m^3$, przeto:

$$\delta = \frac{P\pi}{\text{mod } (\omega\pi)\; OIJK}$$

a wstawiając za $P\pi$ i $\omega\pi$ ich wartości, otrzymujemy wzór szukany.

http://rcin.org.pl

Jako ostatni przykład weźmy formę stopnia drugiego s, o spółrzędnych l, m, n, p, q, r, t. j.

$$s = l\mathrm{OI} + m\mathrm{OJ} + n\mathrm{OK} + p\mathrm{JK} + q\mathrm{KI} + r\mathrm{IJ}.$$

Ten wzór wyraża, że forma s jest sumą linii

$$\mathrm{O}\,(l\mathrm{I} + m\mathrm{J} + n\mathrm{K})$$

o początku w punkcie O, której wektorze ma spółrzędne l, m, n, i dwuwektoru o spółrzędnych p, q, r. Przekształćmy s na sumę linii i i dwuwektoru u do niej prosto-padłego, t. j. aby było:

$$s = i + u.$$

Wnoszę stąd, że $\omega s = \omega i$, gdyż $\omega u = 0$; a więc u, które ma być normalnem do $\omega i = \omega s$, będzie miało postać $u = x \mid \omega s$ gdzie x jest liczbą (rzeczywistą). Będzie zatem $s - x \mid \omega s = i$ mnożę to równanie przez samo siebie, uwzględniając że $(\mid \omega s)(\mid \omega s) = 0$, $i\,i = 0$; i otrzymuję

$$s\,s - 2\,x\,s \mid \omega\,s = 0.$$

Stąd

$$x = \frac{s\,s}{2\,s \mid \omega\,s}$$

i wreszcie:

$$u = \frac{s\,s}{2\,s \mid \omega\,s} \mid \omega\,s.$$

Mamy tym sposobem dwuwektor u, nazwany w mechanice «momentem głównym układu sił», wyrażony za pomocą samej formy s. Wprowadziwszy spółrzędne, otrzymujemy:

$$u = \frac{lp + mq + nr}{l^2 + m^2 + n^2}\,(l\mathrm{JK} + m\mathrm{KI} + n\mathrm{IJ}).$$

Linię i otrzymujemy jako różnicę: $i = s - u$.

Te przykłady elementarne stwierdzają, że metoda G r a s s m a n n a nie wyłącza bynajmniej geometryi analitycznej zwy-

http://rcin.org.pl

czajnej, przeciwnie podaje ona najprostsze drogi znajdowania wzorów w każdym układzie spółrzędnych. Nadto na tej drodze zyskujemy interpretacyę geometryczną oddzielną dla licznika, mianownika, każdego czynnika i każdego wyrazu we wzorach geometryi analitycznej.

§ 12. **Geometrya nieskończonościowa.**

Mówimy, że forma zmienna S pierwszego stopnia ma jako granicę formę stałą S_0, gdy—wziąwszy jakikolwiek trójkąt PQR, będziemy mieli

$$\lim S P Q R = S_0 P Q R.$$

Analogicznie rzecz się ma dla form stopni wyższych.

Jeżeli forma $S(t)$ jest funkcyą zmiennej liczbowej t, to kładziemy

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lim_{h \to 0.} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

gdzie znaki wprowadzone na stronie drugiej zostały już określone.

Dla sum i iloczynów form utrzymują się ogólne prawidła różniczkowania; symbole ω i | zachowują się jak czynniki stałe. Lecz należy strzedz się zmieniania porządku czynników.

Określenia kolejnych pochodnych i całek dają się tu stosować. Wzór T a y l o r a np. utrzymuje się tu w postaci:

«Jeżeli $S(t)$ jest formą geometryczną i funkcyą zmiennej t, mającą dla $t = t_0$ pochodne pierwszą i drugą, będzie

$$S(t_0 + h) = S(t_0) + h S'(t_0) + \frac{h_3}{2!} S''(t_0) + R$$

gdzie R jest formą nieskończenie małą względem h rzędu wyższego niż drugi.

http://rcin.org.pl

Nie potrzeba zakładać, jak tego dowiodłem w moich traktatach, ciągłości drugiej pochodnej $S''(t)$.

Wyrażenie reszty pod postacią całki, utrzymuje się bez żadnej zmiany.

Wzór Lagrange'a wymaga lekkiej modyfikacyi i ponieważ w moim «Calcolo geometrico» (Cap. VIII) podałem rezultat bez dowodzenia, nie będzie bezużytecznem, że tu je podam:

Określenie: «Nazywamy formę geometryczną S średnią form A, B ... tego samego stopnia np. pierwszego, jeżeli wziąwszy jakiekolwiek punkty P, Q, R,... otrzymamy SPQR jako średnią względem APQR, BPQR, ... ».

Twierdzenie: «Niechaj będzie forma $S(t)$ funkcyą zmiennej rzeczywistej t, mającą pochodne kolejne aż do pochodnej n-tej, wtedy dla przedziału od t do $t+h$ będzie:

$$S(t+h) = S(t) + hS'(t) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} S^{(n-1)}(t) + \frac{h_n}{n!} K$$

gdzie K jest formą geometryczną średnią pomiędzy wartościami $S^{(n)}(t+\theta h)$, gdzie θ zmienia się od 0 do 1.»

Oznacza to, że gdy dla funkcyj liczbowych K jest jedną z wartości pochodnych pochodnej n-tej, to dla formy geometrycznej K jest tylko jedną wartością średnią pomiędzy wartościami, jakie przyjmuje pochodna n-ta.

W samej rzeczy, wzór jest prawdziwym, gdy $S(t)$ jest liczbą, będącą funkcyą liczby t, gdyż K jest wtedy jedną z wartości pochodnej n-tej, a stąd wartością średnią pomiędzy wartościami, jakie ona przybierać może. Wzór ten jest także prawdziwym, gdy $S(t)$ jest czworościanem lub formą stopnia czwartego, gdyż czworościany mierzą się liczbami rzeczywistemi.

Jeżeli $S(t)$ jest formą stopnia pierwszego, mnożymy wzór napisany przez trójkąt dowolny PQR; wtedy dochodzimy do czworościanów; wnioskujemy stąd, że KPQR jest średnią

http://rcin.org.pl

pomiędzy wartościami $S^{(n)}(t)$ PQR, a stąd K średnią pomiędzy wartościami $S^{(n)}(t)$.

Jezeli P jako punkt jest funkcyą zmiennej rzeczywistej t, to jego pochodne są wektorami. Styczną do krzywej opisanej przez punkt P jest prosta PP″ a płaszczyzna ściśle styczną płaszczyzna PP′P″. Zakładamy, że ta prosta i ten trójkąt nie są zerami; w przeciwnym przypadku występują osobliwości zbadane w dziele mojem: «Applicazioni geometriche».

Jeżeli punkt P jest funkcyą dwóch zmiennych t i u, wtedy płaszczyzna P $\frac{dP}{dt}$ $\frac{dP}{du}$ jest styczną do powierzchni opisanej przez punkt P.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl