II.

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE FUNZIONI PUNTEGGIATE DISCONTINUE (*)

« Giornale di Matematiche », vol. XIX, 1881, pp. 76-87;

I.

Il prof. DINI chiama funzioni *infinite volte discontinue* ed HANKEL *funzioni linearmente discontinue* quelle funzioni definite in un certo intervallo che in esso hanno un numero infinito di discontinuità (1); chiama poi HANKEL *funzioni punteggiate discontinue* quelle funzioni linearmente discontinue tali, che in ogni porzione dell'intervallo in cui sono definite, si possono trovare dei punti in cui sono continue (2).

Mediante il *principio della condensazione delle singolarità* (3) HANKEL venne a costruire delle funzioni (che hanno una espressione analitica) le quali sono continue in tutti i punti irrazionali e discontinue in tutti i punti razionali di un certo intervallo, tantochè possono aversi delle funzioni definite in un certo intervallo, tali che in ogni porzione di esso è possibile trovare dei punti in cui sono continue e dei punti in cui sono discontinue.

Riguardo a queste funzioni può enunciarsi il seguente teorema:

Se una funzione punteggiata discontinua ammette in ogni porzione dell'intervallo in cui è definita dei punti di discontinuità, non può esistere un'altra funzione punteggiata discontinua, la quale sia continua nei punti in cui la prima è discontinua e sia discontinua nei punti in cui la prima è continua.

Infatti due punteggiate discontinue $f(x)$ e $\varphi(x)$ definite in un dato intervallo devono avere in ciascuna porzione dell'intervallo dei punti in cui ambedue sono continue.

Sia $(\alpha\beta)$ l'intervallo in cui ambedue le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono definite; perchè sono punteggiate discontinue si avrà che presa una porzione arbitraria $(a\,b)$ dell'intervallo stesso, e fissato un numero arbitrariamente

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) HERMANN HANKEL, *Untersuchungen über die oscillirenden und unstetigen Functionen*, p. 23; ULISSE DINI, *Fondamenti per la Teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 62.

(2) Vedi HANKEL, op. cit., p. 25; DINI, op. cit., p. 62.

(3) Il principio della condensazione delle singolarità dovuto ad HANKEL (Vedi HANKEL, op. cit., p. 15) venne reso completo e rigoroso dal prof. DINI (Vedi DINI, op. cit., p. 117 e sgg.).

piccolo σ, dovrà trovarsi un intervallo (a_1, b_1) in (ab) in tutti i punti del quale la $f(x)$ fa dei salti minori di σ, ed entro $(a_1 b_1)$ potrà trovarsi un intervallo (a'_1, b'_1) in tutti i punti del quale la $\varphi(x)$ fa essa pure salti minori di σ. Entro (a'_1, b'_1) potrà poi trovarsi un intervallo (a_2, b_2) in cui $f(x)$ fa salti minori di $\sigma/2$, e dentro questo uno (a'_2, b'_2) in cui la $\varphi(x)$ fa essa pure salti minori di $\sigma/2$. Così proseguendo si trova che deve sempre trovarsi un intervallo $(a'_n\, b'_n)$ in tutti i punti del quale ambedue le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ fanno salti minori di $\sigma/2^n$, n essendo tanto grande quanto si vuole. I punti a'_n, b'_n dico vanno avvicinandosi indefinitamente col crescere indefinito di n. Infatti se ciò non fosse dovrebbe trovarsi un certo tratto in tutti i punti del quale le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono ambedue continue il che è contro le ipotesi fatte. Poichè i punti a'_n, b'_n vanno indefinitamente avvicinandosi, si scorge come deve esistere un punto A in cui ambedue le funzioni sono continue come volevasi dimostrare.

Poichè dunque si hanno delle funzioni continue in tutti i punti irrazionali e discontinue nei razionali, sarà impossibile trovare una funzione che sia discontinua in tutti i punti irrazionali e continua nei razionali. In questo caso può asserirsi ancora di più, cioè, che *se una funzione è discontinua in tutti i punti irrazionali di un dato intervallo, essa deve essere totalmente discontinua in quell'intervallo* (4).

Questa proprietà dei due gruppi di punti razionali e irrazionali può estendersi ancora ad altri infiniti gruppi di punti mediante il seguente teorema generale:

Se costruendo successivamente nell'intervallo $(a\, b)$ *i gruppi di punti* $P_1, P_2, \cdots, P_m$ *di prima specie in numero infinito l'insieme dei punti che si ottiene costituisce un gruppo* Q *tale che questi punti si trovano in ogni porzione dell'intervallo* $(a\, b)$:

1° *dovranno trovarsi in ogni porzione dell'intervallo dei punti che non appartengono al gruppo* Q;

2° *potrà costruirsi una funzione discontinua nel gruppo* Q *e continua in tutti gli altri punti* R *dell'intervallo* $(a\, b)$;

3° *qualunque funzione discontinua in tutti i punti del gruppo* R *dovrà essere totalmente discontinua in* $(a\, b)$.

Formiamo una funzione $f(x)$ entro $(a\, b)$ così definita nel gruppo Q: prendiamo uno qualunque dei gruppi P_m componenti, sia n_m il suo grado; nei punti del suo n^{esimo} gruppo derivato che appartengono allo stesso gruppo P_m, e non fanno parte di nessuno dei gruppi $P_1, \cdots, P_{m-1}$, sia la $f(x)$ eguale a σ^m $(\sigma < 1)$; in ciascuno dei punti dell'$(n-1)^{\text{esimo}}$ gruppo derivato, che fanno parte del gruppo P_m e non dei gruppi $P_1, \cdots, P_{m-1}$, esclusi i punti del gruppo derivato n^{esimo}, sia la $f(x)$ eguale a $\sigma^m h$, h essendo la distanza al punto dell'n^{esimo} gruppo derivato che è più vicino; in ogni punto dell'$(n-2)^{\text{esimo}}$ gruppo derivato che appartiene al gruppo P_m, esclusi i punti che fanno parte dell'$(n-1)^{\text{esimo}}$ gruppo derivato e dei gruppi $P_1 P_2, \cdots, P_{m-1}$,

(4) Vedi HANKEL, op, cit., p. 39; DINI, op. cit., p. 62.

sia eguale a $k\sigma^m$, k essendo la distanza al più vicino dei punti dell'$(n-1)^{esimo}$ gruppo derivato e così di seguito.

In tutti i punti che non appartengono al gruppo Q la funzione sia zero.

Il limite dei valori della funzione $f(x)$ a destra e a sinistra di un punto arbitrario p è 0. Infatti preso un intorno $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ di questo punto, tale che nel suo interno non si trovino punti appartenenti agli ultimi gruppi derivati dei gruppi $P_1, P_2, \cdots, P_m$ (il punto p al più escluso) avremo che i valori della funzione nell'intervallo $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ (il punto p al più escluso) saranno inferiori al più grande dei due numeri $\varepsilon\sigma$ e σ^m.

La funzione $f(x)$ è dunque infinite volte discontinua, e le discontinuità si troveranno in ognuno dei punti del gruppo Q; ma le discontinuità della nostra funzione sono di prima specie, dunque essa sarà una punteggiata discontinua (5) e quindi in ogni intervallo dovranno trovarsi dei punti in cui essa è continua, cioè dei punti che non appartengono al gruppo Q, ma appartengono invece al gruppo R. Reciprocamente in ogni punto del gruppo R la funzione è continua perchè nei punti R la funzione è 0.

Dimostriamo che una funzione discontinua nel gruppo R è totalmente discontinua. Infatti supponiamo che esista una funzione $\varphi(x)$ discontinua in R e continua in una porzione Q_1 del gruppo Q, mentre nell'altra porzione Q_2 è discontinua. Prendiamo la funzione $\psi(x)$ eguale alla $f(x)$ nei punti del gruppo Q_1, eguale a 0 in tutti gli altri punti. Questa funzione sarà continua in tutti i punti dei gruppi R e Q_2, essa poi resterà discontinua nei punti del gruppo Q_1. Ne segue che le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ non possono coesistere e quindi l'ipotesi della esistenza della $\varphi(x)$ è assurda.

Deriva subito di qui come caso particolare che una funzione discontinua nei punti irrazionali è totalmente discontinua perchè i punti razionali di un intervallo si possono ottenere prendendo i punti di divisione che si hanno dal dividere successivamente in $2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$, parti eguali l'intervallo.

Dai teoremi enunciati può dedursi il seguente:

Se una funzione finita e continua, definita in un certo intervallo, non ha tratti d'invariabilità devono sempre esistere in qualunque porzione dell'intervallo stesso dei punti irrazionali a cui corrispondono valori irrazionali della funzione.

Infatti sia $\varphi(x)$ una funzione finita continua e senza alcun tratto d'invariabilità; essa dovrà assumere valori razionali e irrazionali in qualunque porzione dell'intervallo in cui è definita.

Suppongasi che assuma nei punti irrazionali soltanto valori razionali; dovrà evidentemente esistere un gruppo A di punti razionali esistenti in qualunque porzione dell'intervallo, in cui la funzione assume valori irrazionali. Prendiamo a considerare una funzione $f(x)$, continua pei valori irrazionali e discontinua pei valori razionali di x, definita fra il massimo e il minimo valore della $\varphi(x)$. La funzione $f[\varphi(x)]$ è evidentemente discontinua per tutti i valori irrazionali della x e continua nel gruppo di punti razionali A il che è assurdo.

(5) Vedi Dini, op. cit., p. 201.

Dal primo dei teoremi enunciati può dedursi subito che *la somma o il prodotto di un numero finito di funzioni punteggiate discontinue di cui i valori si mantengono tutti inferiori a un certo numero finito non può essere una funzione totalmente discontinua.*

Infatti più punteggiate discontinue definite in uno stesso intervallo hanno in ciascuna porzione dell'intervallo stesso dei punti in cui sono tutte continue, e quindi in cui anche la somma è continua.

Si può poi enunciare il teorema:

Una serie convergente in egual grado semplicemente (6) *di cui tutti i termini sono funzioni punteggiate discontinue non può essere una funzione totalmente discontinua.*

Sia

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n$$

una serie convergente in egual grado semplicemente nell'intervallo $(\alpha\beta)$, e sieno i diversi termini nello stesso intervallo funzioni punteggiate discontinue.

Fissato un numero arbitrariamente piccolo σ potremo trovare un valore n_1 di n per cui R_{n_1} risulta minore di $\sigma/4$ in qualunque punto dell'intervallo $(\alpha\beta)$. D'altronde perchè le $u_1, u_2, \cdots, u_{n_1}$ sono punteggiate discontinue, anche la loro somma $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}$ risulterà una punteggiata discontinua e quindi avremo che in una porzione qualunque dell'intervallo $(\alpha\beta)$ potrà trovarsi un altro intervallo in tutti i punti del quale i salti della somma $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}$, saranno minori di $\sigma/2$; in questo intervallo i salti della R_{n_1} non potranno superare $\sigma/2$, e quindi i salti di U, σ. Ne segue che la U è una punteggiata discontinua.

Si riconosce facilmente come il teorema enunciato può estendersi a tutte le serie *generalmente* convergenti in egual grado semplicemente e a tutte quelle tali, che esclusi degli intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, nei rimanenti risultano convergenti in egual grado semplicemente.

II.

Passiamo a considerare la integrazione delle funzioni punteggiate discontinue, le quali sono le uniche funzioni (*) che possono essere atte alla integrazione.

(6) Le serie convergenti in egual grado semplicemente vennero definite dal professore Dini nell'op. cit. a p. 103. Di queste serie non convergenti in egual grado assolutamente cito un esempio poichè, a quanto so, non credo se ne conoscano.

La serie definita per tutti i valori della x da 0 a 1 (1 escluso) da

$$x^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{1\cdot 2}\right) + x^3 - x^3\left(1 - \frac{1}{\pi(3)}\right) + \cdots + x^n - x^n\left(1 - \frac{1}{\pi(n)}\right) + \cdots,$$

e nel punto 1 da una serie convergente arbitraria $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, è convergente in egual grado semplicemente senza esserlo assolutamente.

(*) In un esemplare del lavoro, già posseduto dall'A., si trova l'aggiunta autografa « infinite volte discontinue ». [N.d.R.].

HANKEL ha cercato di dimostrare che ogni funzione punteggiata discontinua definita in un dato intervallo è in quell'intervallo atta alla integrazione (7).

Il prof. DINI ha riconosciuto che la dimostrazione di HANKEL non è rigorosa (8); a questo proposito può citarsi un esempio di una funzione punteggiata discontinua (la quale ha anche una espressione analitica) che in un dato intervallo non è atta alla integrazione.

Costruiamo nell'intervallo da 0 a 1 un gruppo infinito di punti α'_1, $\alpha'_2, \alpha'_3, \cdots, \alpha'_n, \cdots$, ognuno situato alla sinistra dei precedenti che abbia per unico punto limite il punto 0, tale che il punto α'_1 sia $1 - 1/2^2$ e le distanze fra i punti consecutivi $(\alpha'_1, \alpha'_2), (\alpha'_2, \alpha'_3), \cdots, (\alpha'_n, \alpha'_{n+1}), \cdots$, vadano sempre decrescendo e siano tutte minori di $(1\ \alpha'_1)$. A sinistra di ciascuno di questi punti α'_n si separi un intervallo $(\alpha'_n, \alpha''_{n,1})$ eguale a $1/2^4$ dell'intervallo $(\alpha'_n, \alpha'_{n+1})$ e si costruisca un gruppo di punti $\alpha''_{n,1}, \alpha''_{n,2}, \cdots, \alpha''_{n,m}, \cdots$, che abbiano per unico punto limite il punto α'_{n+1} e le distanze fra i punti consecutivi $(\alpha''_{n,1}, \alpha''_{n,2}), (\alpha''_{n,2}, \alpha''_{n,3}), \cdots, (\alpha''_{n,m}, \alpha''_{n,m+1}), \cdots$, vadano sempre decrescendo e sieno tutte minori di $(\alpha'_n, \alpha''_{n,1})$. Supponiamo di più che le diverse divisioni così formate entro i varii intervalli α'_n, α'_{n+1} sieno tutte simili. A sinistra di ciascuno dei punti $\alpha''_{n,m}$ si separi un intervallo $(\alpha''_{n,m}, \alpha'''_{n,m,1})$ eguale a $1/2^6$ dell'intervallo $\alpha''_{n,m}, \alpha''_{n,m+1}$ e si costruisca un gruppo di punti $\alpha'''_{n,m,1}, \alpha'''_{n,m,2}, \cdots$, $\alpha'''_{n,m,p}, \cdots$, che abbiano per unico punto limite $\alpha''_{n,m+1}$ tali che le distanze fra i punti consecutivi $(\alpha'''_{n,m,1}, \alpha'''_{n,m,2}) (\alpha'''_{n,m,2}, \alpha'''_{n,m,3}), \cdots, (\alpha'''_{n,m,p}, \alpha'''_{n,m,p+1}), \cdots$, vadano sempre decrescendo e sieno tutte inferiori a $(\alpha''_{n,m}, \alpha'''_{n,m,1})$. Supponiamo che tutte le divisioni fatte entro gli intervalli $(\alpha''_{n,m}, \alpha''_{n,m+1})$ sieno tutte simili fra loro. Si continui indefinitamente nella stessa guisa.

Consideriamo il gruppo di punti formato da tutti i punti che così vengono a costruirsi e da tutti i loro punti limiti. Tutti i punti compresi entro l'intervallo $(\alpha'_1, 0)$ sono tali che le distanze fra due consecutivi sono minori di $1/2^2$; tutte le distanze fra i punti consecutivi compresi entro gli intervalli $(\alpha''_{n,1}, \alpha'_{n+1})$ sono minori di $1/2^4$; quelle fra punti consecutivi compresi entro gli intervalli $(\alpha'''_{n,m,1}, \alpha''_{n,m+1})$ sono minori di $1/2^6$, e così di seguito. Se ne conclude che chiamando s_h la somma delle distanze fra punti consecutivi maggiori o eguali a $1/2^{2h}$ si ha:

$$s_1 = (1\ \alpha'_1) = \frac{1}{2^2} < \frac{1}{3}$$

$$s_2 < (1\ \alpha'_1) + \sum (\alpha'_n\ \alpha''_{n,1}) < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} < \frac{1}{3}$$

$$s_3 < (1\ \alpha'_1) + \sum (\alpha'_n\ \alpha''_{n,1}) + \sum (\alpha''_{n,m}\ \alpha'''_{n,m,1}) < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} < \frac{1}{3}.$$

. . . .

In generale si ha che, qualunque sia h, $s^h < 1/3$. Se ne deduce che supposto di aver diviso l'intervallo in 2^n parti eguali, la somma degli

(7) Vedi HANKEL, op. cit., p. 31.

(8) Vedi DINI, op. cit., p. 250.

intervalli che contengono punti del gruppo è maggiore di 2/3. Infatti la somma di tutti gli intervalli che non contengono punti del gruppo è evidentemente minore della somma delle distanze fra punti consecutivi maggiori di $1/2^n$, ma questa somma è sempre minore di 1/3, dunque la somma degli intervalli che contengono punti del gruppo è maggiore di 2/3. Un'altra proprietà si riscontra immediatamente in questo gruppo di punti, cioè, presa una porzione qualunque dell'intervallo (0 1), in essa si può trovare un altro intervallo in cui mancano punti del gruppo. Infatti se la porzione d'intervallo è maggiore di $1/2^{(n+1)n}$ deve in esso trovarsi o nessun punto del gruppo o un punto $\alpha^{(p)}$ in cui $p < n$ e quindi a sinistra di questo un intervallo senza alcun punto del gruppo.

Ciò premesso consideriamo una funzione che abbia il valore 0 in tutti i punti del gruppo e in tutti i punti limiti, ed il valore 1 in tutti gli altri punti. Questa funzione è una punteggiata discontinua, perchè, preso un intervallo qualunque, entro di esso si può trovarne un'altra in cui mancano punti del gruppo; in un punto interno qualunque di questo intervallo la funzione è continua. È poi evidente che in tutti i punti del gruppo e in tutti i punti limiti la funzione è discontinua ed i salti che essa fa in quei punti sono eguali a 1. Poichè dunque i punti del gruppo non sono rinchiudibili in intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, così ne risulta, che la funzione non è atta alla integrazione.

La funzione ora considerata ha una espressione analitica. Infatti può definirsi fra 0 e 1 una funzione in modo che in tutti i punti del gruppo e in tutti i suoi punti limiti sia eguale a 0; preso poi un altro punto qualunque x che non appartenga al gruppo né sia uno dei suoi punti limiti si potrà trovare un intorno (AB) di esso in cui non esistono punti del gruppo ed A e B sieno o punti, o punti limiti del gruppo; se nel punto x alla funzione diamo per valore la minima delle due distanze xA, xB e, quando è nel punto di mezzo di (AB), il valore 1/2 (AB), la funzione $\varphi(x)$ che così si viene a definire risulta continua e quindi ha una espressione analitica. Si vede subito che il massimo valore che potrà avere la funzione sarà 1/8. Ora la serie:

$$y + y(1-y) + y(1-y)^2 + \cdots + y(1-y)^n + \cdots$$

è eguale a 1 per y compreso fra 0 e 1 (0 escluso) ed è 0 per $y = 0$; ne segue che la funzione:

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(x)[1-\varphi(x)] + \varphi(x)[1-\varphi(x)]^2 + \cdots + \varphi(x)[1-\varphi(x)]^n + \cdots$$

la quale così viene ad avere una espressione analitica, è 0 nei punti del gruppo ed è 1 in tutti gli altri punti.

Con processi analoghi si potrebbero costruire altre funzioni punteggiate discontinue non atte alla integrazione.

Enunciamo alcune proprietà riguardo alla integrazione delle funzioni punteggiate discontinue.

Quando si prenda come salto di una funzione in un punto in cui essa è continua lo *zero* e si chiami *funzione dei salti* corrispondente ad una funzione definita in un certo intervallo, una funzione che in ciascun punto abbia per valore il salto della funzione in quel punto; *funzione dei salti di destra* o *di sinistra* una funzione che abbia per valore in ogni punto il salto di destra o di sinistra della funzione in quel punto, si può riconoscere subito che:

Una funzione punteggiata discontinua e la corrispondente funzione dei salti sono o non sono atte alla integrazione insieme (9).

Infatti il salto di una funzione punteggiata discontinua $f(x)$ in un punto qualunque a dell'intervallo in cui è definita, è lo stesso di quello della corrispondente funzione dei salti $\varphi(x)$ nello stesso punto, perchè in intorni comunque piccoli di a non si possono trovare dei salti della funzione $f(x)$ che superino di una data quantità finita il numero 2σ, σ essendo il salto che la funzione fa in a; d'altronde nelle vicinanze di a si hanno tanti punti quanti se ne vogliono in cui il valore del salto della $f(x)$ è lo zero, dunque la funzione $\varphi(x)$ in a ha un salto eguale a σ. Ne segue che se i salti della funzione $f(x)$ maggiori di un certo numero arbitrariamente piccolo sono rinchiudibili in un numero finito di intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole lo stesso avverrà per la $\varphi(x)$ e reciprocamente.

Si deduce di qui che *se una funzione punteggiata discontinua è atta alla integrazione saranno pure atte alla integrazione, le corrispondenti funzioni dei salti di destra e di sinistra*; reciprocamente può dimostrarsi che *se la funzione dei salti di destra o quella dei salti di sinistra corrispondente a una funzione punteggiata discontinua è atta alla integrazione, anche questa funzione è atta alla integrazione.*

La dimostrazione di questo teorema si fa in un modo del tutto analogo a quello seguito dal prof. DINI a p. 246 della di lui opera già citata.

Se la funzione dei salti di sinistra è atta alla integrazione evidentemente potranno escludersi con un numero finito di intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole i punti in cui i salti di sinistra sono maggiori di un numero arbitrariamente piccolo $\sigma/3$. Consideriamo in uno degli intervalli rimanenti (ab) la punteggiata discontinua data. Nell'intervallo $(a, a+\varepsilon)$, in cui ε è un numero arbitrariamente piccolo possiamo trovare un punto x_1 di continuità della funzione, e quindi potremo formare il massimo intervallo $(x_1\, y_1)$ entro cui i salti della funzione si mantengono minori o eguali a σ; entro l'intervallo $(y_1, y_1+\varepsilon/2)$ possiamo trovare un punto x_2 di continuità della funzione, potremo poi formare il massimo intervallo $(x_2\, y_2)$ entro il quale i salti della funzione sono minori o eguali a σ; entro l'intervallo $(y_2, y_2+\varepsilon/2^2)$ possiamo trovare un punto x_3 di continuità, quindi formare il massimo intervallo (x_3, y_3) in cui la funzione fa salti minori o eguali a σ, e così di seguito. Se non si raggiunge il punto b dopo aver formato un numero finito di intervalli, i punti $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$, ammetteranno un punto limite c rispetto al quale essi sono tutti situati a sinistra. Ne segue che in intorni a sinistra arbitrariamente piccoli di c si possono trovare tanti punti quanti se ne vogliono in cui i salti della funzione sono maggiori di σ, dunque

(9) È evidente che questa proprietà non può valere per le funzioni totalmente discontinue.

il salto a sinistra di c sarebbe $\sigma/2$ o maggiore di $\sigma/2$ il che è assurdo. I punti $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$, devono dunque essere in numero finito. Se ne deduce che in ciascuno degli intervalli (ab) i punti in cui i salti sono maggiori di σ si possono includere negli intervalli $(a, x_1), (y_1, x_2), \cdots, (y_{n-1}, x_n), \cdots$ in numero finito di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole perchè è inferiore a 2ε. Dunque la funzione proposta è atta alla integrazione.

Da questo teorema può dedursi:

Se i salti di destra o di sinistra di una funzione punteggiata discontinua coll'avvicinarsi da una stessa parte a tutti i punti dell'intervallo, in cui la funzione è definita, decrescono indefinitamente, la funzione è atta alla integrazione.

Infatti se si verifica questa condizione la funzione dei salti di destra o di sinistra viene ad ammettere da una stessa parte discontinuità di prima specie soltanto ed è quindi atta alla integrazione [10].

Dal teorema prima enunciato può dedursi un'altra conseguenza. Dimostriamo prima che *se una funzione è tale che possono rinchiudersi in intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole i punti in cui i salti a destra, oppure quelli a sinistra, sono maggiori di* σ (*σ essendo un numero piccolo ad arbitrio*), *la funzione è una punteggiata discontinua, o è generalmente continua.*

Sia $f(x)$ la funzione in quistione definita nell'intervallo $(\alpha\beta)$, e supponiamo che i salti a destra maggiori di σ siano rinchiudibili in intervalli di cui la somma sia tanto piccola quanto si vuole. Presa dell'intervallo $(\alpha\beta)$ una porzione arbitraria (ab) in essa esisterà sempre un punto a_1 (che non coincide cogli estremi) in cui il salto a destra sarà minore di $\sigma/2$ perchè la somma degli intervalli in cui il salto a destra è maggiore di $\sigma/2$, potendosi rendere tanto piccola quanto si vuole, si potrà anche rendere minore di (ab); quindi si scorge che non tutti i punti interni ad (ab) possono avere salti a destra maggiori di $\sigma/2$. Poichè dunque deve esistere un punto a_1 in cui il salto a destra è minore di $\sigma/2$ dovrà esistere un intorno a destra (a_1, b_1) di questo punto che può prendersi minore di $1/2\,(ab)$ e tutto contenuto in (ab) in cui l'oscillazione della funzione è minore di σ. Entro (a_1, b_1) si può determinare un punto a_2 che non coincide cogli estremi in cui il salto a destra sia minore di $\sigma/4$ e quindi un intervallo

$$(a_2, b_2) < \frac{1}{2}(a_1, b_1) < \frac{1}{4}(ab),$$

tutto interno ad (a_1, b_1) in cui l'oscillazione della funzione sia minore di $\sigma/2$ e così seguitando si potrà trovare un intervallo $(a_n, b_n) < (ab)/2^n$ situato internamente agli intervalli precedentemente costruiti in cui l'oscillazione della funzione è minore di $\sigma/2^{n-1}$.

Poichè i punti a_n e b_n vanno indefinitamente avvicinandosi, così dovrà esistere un punto m compreso sempre fra a_n e b_n nei cui intorni le oscilla-

(10) Vedi Dini, op. cit., p. 246.

zioni delle funzioni sono tanto piccole quanto si vuole e in cui quindi la funzione è continua.

Si deduce dunque:

Se una funzione è tale che possono rinchiudersi in un numero finito d'intervalli, di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, tutti i punti in cui i salti a destra o a sinistra sono maggiori di σ (σ essendo tanto piccola quanto si vuole), la funzione è atta alla integrazione.

L'esempio citato innanzi di una funzione punteggiata discontinua non atta alla integrazione, mostra che se due funzioni $\varphi(x)$, definita nell'intervallo (ab), e $f(x)$, definita fra L e l, rispettivamente limiti superiore e inferiore di $\varphi(x)$ in (ab), sono atte alla integrazione, la funzione

$$\psi(x) = f[\varphi(x)],$$

definita fra a e b, può non esserlo anche se la $\varphi(x)$ fosse continua e la $f(x)$ essendo discontinua fosse generalmente continua; però *se la $f(x)$ è continua* e la $\varphi(x)$ *è atta alla integrazione la $\psi(x)$ lo è pure.*

Questo teorema non è altro che un caso particolare di uno enunciato del signor DU BOIS REYMOND [11].

Un altro caso in cui la $\psi(x)$ risulta atta alla integrazione si ha *quando la $f(x)$ è generalmente continua e la $\varphi(x)$ non ha che un numero finito di oscillazioni.*

Se la $\varphi(x)$ nell'intervallo (ab) in cui è definita non compie che un numero finito di oscillazioni potremo dividere l'intervallo stesso negli altri (a, m_1), $(m_1, m_2), \cdots, (m_n, b)$ in numero finito in ciascuno dei quali la funzione si mantiene sempre crescente o sempre decrescente. Poichè la $f(x)$ è continua generalmente, sarà finito il numero dei valori di x in cui capitano le discontinuità della funzione stessa; potremo dunque dividere ciascuno degli intervalli (m_k, m_{k+1}) in un numero finito d'intervalli (m_k, x'_k), $(x'_k, x''_k), \cdots, (x_k^{(n)}, m_{k+1})$ in modo che in nessuno dei punti *interni* ad essi la $\varphi(x)$ possa prendere nessuno dei valori di x per cui la $f(x)$ risulta discontinua. Esclusi dunque i punti m_k e i punti $x_k^{(n)}$ che sono in numero finito con intorni arbitrariamente piccoli, negli intervalli rimanenti la $\psi(x)$ per il teorema enunciato precedentemente risulta atta alla integrazione, poichè in questi intervalli la $f(x)$ è continua; di più sappiamo che la $\varphi(x)$ è atta alla integrazione nell'intervallo (ab) perchè essa compie in questo intervallo solo un numero finito di oscillazioni [12]; se ne conclude che la $\psi(x)$ è atta alla integrazione in tutto l'intervallo (ab) come volevasi dimostrare.

Pisa, Febbraio 1880.

(11) «Mathematische Annalen», vol. XVI, 1880, p. 112.

(12) Vedi DINI, op. cit., p. 249.