Samuelowi Dicksteinowi

na znak najgłębszego szacunku

J. Śleszyński

Dr. Bernard Bolzano.

ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО.

БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ. IV.

Б. БОЛЬЦАНО

ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО

изданные по посмертной рукописи автора

Др. Фр. Пржигонскимъ.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей

Проф. И. В. СЛЕШИНСКАГО.

Je suis tellement pour l'infinie actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (Leibniz. Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II. part. I. p. 243).

(Я въ такой мѣрѣ стою за актуальную безконечность, что не только не допускаю, что природа боится ея, какъ обыкновенно выражаются, но и признаю, что природа всюду являетъ именно такую безконечность, чтобы лучше отмѣтить совершенство своего Творца).

MATHESIS

ОДЕССА 1911

Типографія Л. Шутака. Троицкая 27.

Отъ редактора перевода.

Бернардъ Больцано (Bernard Bolzano. 5. X. 1781—18. XII 1848) занималъ съ 1805 по 1820 годъ каѳедру исторіи религіи въ Пражскомъ университетѣ. Уволенный на основаніи доносовъ враговъ, обвинявшихъ его въ отступленіи отъ догматовъ католической церкви, онъ посвятилъ остальную часть жизни исключительно научнымъ занятіямъ въ области логики и математики.

Приводя списокъ его работъ въ этой области, я пользуюсь случаемъ обратить вниманіе на хранящіяся въ вѣнской придворной библіотекѣ не опубликованныя рукописи Больцано. Онѣ составляютъ десять кипъ, помѣченныхъ буквами A, B, C, D, E, F, G, H, H, J. Только часть одной кипы содержитъ лекціи этики, все остальное математическаго содержанія.

Больцано первый ввелъ въ математику понятіе о верхней границѣ и раньше Коши установилъ понятіе о сходимости рядовъ, формулируя также общій критерій сходимости, извѣстный подъ именемъ критерія Коши. (См. сочиненія, помѣщенныя въ спискѣ подъ нумерами 3 и 4).

Въ сочиненіи, переводъ котораго здѣсь предлагается (№ 9 списка), Больцано является предшественникомъ Георга Кантора (Georg Kantor. 3. III. 1845) въ теоріи безконечныхъ многообразій. Именно, въ §§ 20-24 онъ устанавливаетъ и развиваетъ тѣ свойства безконечнаго, которыя легли въ основаніе теоріи Кантора.

Я хотѣлъ бы обратить вниманіе читателя еще на нѣкоторыя замѣчательныя мѣста этой книги. Въ § 5 дается то опредѣленіе суммы, на которомъ построилъ свою ариѳметику Г. Грассманнъ (H. Grassmann. 15. IV. 1809—26. IX. 1877). Въ § 34 дается научное опредѣленіе нуля. Очень интересны разъясненія, содержащіяся въ концѣ § 36. Замѣчательныя мысли содержитъ § 37, посвященный обоснованію анализа. Отмѣтимъ еще конецъ § 40, конецъ § 41, начало § 49 и конецъ § 70.

Съ нѣкоторыми взглядами автора, въ особенности въ области метафизики, трудно согласиться. Утвержденія, содержащіяся въ примѣчаніяхъ на страницахъ 61 и 64, оказались невѣрными, но мнѣнія эти раздѣлялись наиболѣе знаменитыми математиками этой эпохи.

Пониманіе математическихъ частей сочиненія предполагаетъ лишь элементарныя знанія изъ области высшей математики. Для пониманія сказаннаго на страницѣ 91 необходимо знать свойства логариѳмической спирали.

И. Слешинскій.

30. III. 1911 Одесса.

Сочиненія Больцано по логикѣ и математикѣ.

1. Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. Prag. 1804.

2. Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. 1. Lieferung. Prag. 1810.

3. Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag. 1816.

4. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag. 1817. Berlin 1894.

5. Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich kleinen, ohne die Annahme des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig. 1817.

6. Dr. B. Bolzano's Wissenschaftslehre, Versuch einer ausfürlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Herausgegeben von mehreren seiner Freunde. Mit einer Vorrede des Dr. J. G. A. Heinroth. 4. Bde. Sulzbach 1837.

7. Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte. Prag. 1842.

8. Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes. Prag. 1843.

9. B. Bolzano's Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben von Přihonsky. Leipzig. 1851. Berlin. 1889.

Матеріалы для біографіи и оцѣнки дѣятельности Больцано.

1. Lebensbeschreibung des Dr. B. Bolzano mit einigen seinen ungedruckten Aufsätze und dem Bildnisse des Verfassers, eingeleitet und erläutert vom Herausgeber. Sulzbach. 1836. (Автобіографія).

2. Skizzen aus dem Leben Dr. B. Bolzano's von dessen Arzte Dr. A. Wisshaupt. Leipzig. 1850.

3. Bruchstücke zu einer künftigen Lebensbeschreibung des sel. Professors Bernard Bolzano von Josef Hoffman in Techobuz. Wien. 1850.

4. Bernard Bolzano. Životopisny nástin. Sepsala Marie Červinková. V. Praze. 1881.

5. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Von Stolz in Innsbruck. 1881. Math. Ann. Bd. XVIII. s. 255.

6. Erdmann. Grundriss der Geschichte der Philosophie. Bd. 2. 1878. S. 389.

7. Bernard Bolzano. Přednaška Marie Červinkové-Riergové. V Praze. 1893.

8. Husserl. Logische Untersuchungen. 1900. s. 225.

9. Palágyi. Kant und Bolzano. 1902.

Предисловіе издателя.

Больцано началъ писать замѣчательное сочиненіе «о парадоксахъ безконечнаго» еще лѣтомъ 1847-го года на прелестной дачѣ въ Либохѣ близъ Мельника, въ сообществѣ издателя, но, вслѣдствіе перерыва, обусловленнаго другими работами, закончилъ это сочиненіе только лѣтомъ слѣдующаго года, послѣдняго года своей жизни. Больцано доказалъ этимъ сочиненіемъ, что, несмотря на поздній возрастъ – 66 лѣтъ—и на очевидный упадокъ тѣлесныхъ силъ, его духовныя силы сохранили еще всю свѣжесть и подвижность. Кромѣ того, эта работа показала всему ученому міру всю самобытность его воззрѣній на самые отвлеченные и глубокіе вопросы математики, чистаго естествознанія и метафизики. Дѣйствительно, если бы Больцано не написалъ и не оставилъ намъ ничего больше, кромѣ этого одного трактата, то и въ такомъ случаѣ его слѣдовало-бы причислить, по нашему глубокому убѣжденію, къ самымъ выдающимся людямъ нашего столѣтія. Самые интересные и запутанные вопросы, возникающіе при изслѣдованіи понятія о безконечности, вопросы, которые занимали съ давнихъ временъ ученыхъ, работавшихъ въ области апріорныхъ наукъ, онъ умѣетъ разрѣшать съ поразительной легкостью. Кромѣ того, онъ умѣетъ излагать и развертывать передъ глазами читателя эти вопросы съ такой ясностью, что они въ большинствѣ случаевъ становятся доступными для каждаго, кто не вполнѣ чуждъ этой области и лишь немногое усвоилъ въ ней. Знатокъ-же, если только онъ отнесется къ этому трактату съ нѣкоторымъ вниманіемъ, (и развѣ мы не въ правѣ ожидать этого отъ каждаго ученаго?) вскорѣ узнаетъ значеніе взглядовъ Больцано, намѣченныхъ здѣсь и разработанныхъ обстоятельнѣе въ другихъ его сочиненіяхъ (особенно въ его «Логикѣ» и въ «Athanasia»), и вскорѣ замѣтитъ, что ими намѣчается полное преобразованіе всей современной системы науки.

Издатель, получивъ этотъ трактатъ въ рукописи отъ наслѣдниковъ автора съ обязательствомъ напечатать его возможно скорѣе, принялъ на себя это обязательство тѣмъ охотнѣе, что оно вполнѣ согласовалось съ самымъ сокровеннымъ его желаніемъ (Больцано былъ его незабвеннымъ учителемъ и другомъ). Онъ охотно исполнилъ-бы и раньше это обязательство, если бы не возникли препятствія, которыя онъ могъ устранить лишь въ теченіе настоящаго года. Только теперь сдѣлалось для него возможнымъ исправить переписанное по рукописи, не всегда четкой и представляющей кое-гдѣ даже неправильности, составить точный указатель содержанія для удобства въ пользованіи книгой и найти подходящее мѣсто для ея изданія. Для этой цѣли онъ выбралъ Лейпцигъ, съ одной стороны, надѣясь на болѣе широкое распространеніе сочиненія, напечатаннаго именно въ Лейпцигѣ; съ другой стороны, желая почтить знаменитый городъ книгъ, украшеніе и гордость новой родины издателя (онъ чехъ по происхожденію), такъ какъ онъ вѣритъ, что въ будущемъ, когда великій геній Больцано будетъ признанъ всѣми, Лейпцигъ прославится тѣмъ, что былъ мѣстомъ, гдѣ появились впервые «Парадоксы».

Будиссинъ, 10 Іюля, 1850.

СОДЕРЖАНІЕ.

§ 24. Двѣ суммы попарно равныхъ величинъ, если ихъ многообразіе безконечно, могутъ не быть равными; это равенство будетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда оба множества опредѣляются одинаковыми условіями.

§ 25. Въ области дѣйствительнаго также существуетъ безконечное.

§ 26. Законъ полной опредѣленности всего дѣйствительно существующаго не противорѣчитъ этому утвержденію.

§ 27. Заблужденіе тѣхъ математиковъ, которые говорятъ о безконечно большихъ промежуткахъ времени, ограниченныхъ однако съ обѣихъ сторонъ, или, что случается еще чаще, о безконечно малыхъ промежуткахъ времени. Заблуждаются и тѣ, что говорятъ о безконечно большихъ и безконечно малыхъ разстояніяхъ. Ошибаются также физики и метафизики, предполагая или утверждая, что существуютъ силы во вселенной въ безконечное число разъ бóльшія или меньшія, чѣмъ другія.

§ 28. Главнѣйшіе парадоксы безконечнаго въ области математики; прежде всего въ общей теоріи величинъ и особенно въ ученіи о числахъ.

Какъ разрѣшается парадоксъ исчисленія безконечнаго.

§ 29. Существуетъ исчисленіе безконечно большихъ.

§ 30. Точно также существуетъ и исчисленіе безконечно малыхъ.

§ 31 и 32. Неправильность нѣкоторыхъ понятій, принятыхъ даже въ математикѣ, о безконечно большихъ и безконечно малыхъ.

§ 33. Осторожность, которую необходимо соблюдать для избѣжанія ошибокъ при производствѣ вычисленій съ безконечными.

§ 34. Болѣе точное опредѣленіе понятія о нулѣ. Нуль не можетъ являться дѣлителемъ въ равенствѣ, не представляющемъ простого тождества.

§ 35. Противорѣчія, вытекающія изъ встрѣчающагося иногда утвержденія, что безконечно малыя величины, соединенныя помощью сложенія или вычитанія съ нѣкоторыми другими, обращаются въ нуль или исчезаютъ.

§ 36. Эти противорѣчія не устраняются предположеніемъ нѣкоторыхъ математиковъ, что безконечно малыя величины равны нулю, безконечно-же большія суть частныя отъ дѣленія конечной величины на нуль.

§ 37. Какъ, по мнѣнію автора, слѣдуетъ понимать методъ исчисленія безконечныхъ, чтобы освободить его отъ всякихъ противорѣчій.

§ 38. Парадоксы безконечнаго въ прикладной части ученія о величинахъ, а именно въ ученіи о времени и пространствѣ.

Уже самое понятіе о континуумѣ или непрерывномъ протяженіи заключаетъ въ себѣ кажущіяся противорѣчія. Какъ разрѣшить эти противорѣчія?

§ 39. Парадоксы въ понятіи о времени.

§ 40. Парадоксы въ понятіи о пространствѣ.

§ 41. Какимъ образомъ бóльшая часть парадоксовъ въ ученіи о пространствѣ объясняется изъ понятія о пространствѣ, которое предлагаетъ авторъ?

§ 42 и 43. Какимъ образомъ неправильное пониманіе ученія о безконечно большомъ привело нѣкоторыхъ математиковъ къ неправильнымъ представленіямъ?

§ 44. Вычисленіе величины безконечнаго пространства, принадлежащее І. Шульцу, и въ чемъ собственно заключается ошибка этого вычисленія.

§ 45. Ученіе о безконечно маломъ тоже подало поводъ къ нѣкоторымъ несообразностямъ.

§ 46. Что слѣдуетъ думать о предложеніи Галилея: окружность круга также велика, какъ и его центръ.

§ 47. Объясненіе предложенія, что обыкновенная циклоида имѣетъ безконечную кривизну въ той точкѣ, гдѣ она встрѣчаетъ свое основаніе.

§ 48. Какимъ образомъ происходитъ то, что нѣкоторыя протяженія, распространяясь въ безконечномъ пространствѣ, тѣмъ не менѣе имѣютъ конечную величину; другія-же, напротивъ того, будучи ограничены конечнымъ пространствомъ, имѣютъ все-таки безконечную величину; и далѣе, нѣкоторыя другія сохраняютъ конечную величину, хотя дѣлаютъ безконечное число оборотовъ вокругъ одной точки.

§ 49. Еще нѣкоторыя парадоксальныя отношенія пространственныхъ протяженій, имѣющихъ безконечную величину.

§ 50. Парадоксы безконечнаго въ области физики и математики.

Какія истины слѣдуетъ признать, чтобы судить правильно объ этихъ парадоксахъ.

Доказательство того, что нѣтъ двухъ совершенно равныхъ вещей, а также, слѣдовательно, двухъ совершенно равныхъ атомовъ (простыхъ субстанцій) во вселенной; далѣе,—что несомнѣнно существуютъ простыя субстанціи, и что это суть перемѣнныя субстанціи.

§ 51. Предразсудки, отъ которыхъ слѣдуетъ освободиться, чтобы правильно судить объ относящихся сюда парадоксахъ. Нѣтъ мертваго вещества, но есть инертное вещество.

§ 52. Предположеніе, что непосредственное дѣйствіе субстанцій недопустимо, представляетъ предразсудокъ школы.

§ 53. Подобнымъ-же образомъ увѣренность въ томъ, что непосредственное вліяніе на разстояніи невозможно, является предразсудкомъ.

§ 54. Проникновеніе одной субстанціи въ другую безусловно отрицается.

§ 55. Предразсудокъ, состоящій въ томъ, что духовныя существа не занимаютъ пространства, такъ что не могутъ даже занимать мѣста одной точки.

Между созданными субстанціями нѣтъ другихъ различій, кромѣ различій въ степени.

§ 56. Съ этой точки зрѣнія устраняется самъ собой большой парадоксъ о связи духовныхъ и матеріальныхъ субстанцій.

§ 57. Ошибочное представленіе о построеніи вселенной изъ однѣхъ силъ, безъ субстанцій.

§ 58. Нѣтъ ни высшей, ни низшей ступени бытія въ твореніи Бога.

§ 59. Непрерывное наполненіе безконечнаго пространства субстанціями хорошо согласуется съ различною плотностью тѣлъ, и нѣтъ никакой надобности предполагать, что субстанціи проникаютъ одна въ другую.

§ 60. Каждая субстанція въ мірѣ находится въ постоянномъ взаимодѣйствіи съ каждой другой.

§ 61. Существуютъ между ними субстанціи господствующія, но ни одна изъ нихъ не обладаетъ силами, которыя-бы превосходили силы подчиненныхъ субстанцій на безконечную величину.

§ 62. Существуетъ-ли господствующая субстанція въ каждой совокупности субстанцій.

§ 63. Кромѣ господствующихъ субстанцій существуетъ еще міровое вещество—эѳиръ, которое заполняетъ все остальное міровое пространство и соединяетъ всѣ міровыя тѣла

Между субстанціями существуетъ притяженіе и отталкиваніе, и какимъ образомъ авторъ представляетъ себѣ это.

Отчего происходитъ, что вещества, различающіяся между собой своими силами, а именно степенью взаимнаго притяженія, по вѣсу равны между собой или что вѣса ихъ относятся между собою, какъ массы.

§ 64. Въ чемъ проявляется господство опредѣленныхъ субстанцій или атомовъ надъ другими, и что отсюда слѣдуетъ.

§ 65. Ни одна особенная субстанція не можетъ испытывать такого измѣненія, чтобы, благодаря ему, освободиться отъ всѣхъ ближайшихъ частицъ, окружающихъ ее.

§ 66. Гдѣ кончается одно тѣло и начинается другое или вопросъ о границахъ тѣла.

§ 67. Находятся-ли тѣла въ непосредственномъ соприкосновеніи одно съ другимъ, и когда это бываетъ.

§ 68. Возможные виды движеній во вселенной.

§ 69. Описываетъ-ли какой-нибудь атомъ во вселенной въ какое-либо время линію вполнѣ прямую или вполнѣ кривую.

Принимая во вниманіе мнѣніе автора о безконечности вселенной, возможно-ли допустить поступательное движеніе ея въ какомъ-нибудь опредѣленномъ направленіи или вращательное движеніе ея вокругъ данной міровой оси или мірового центра.

§ 70. Два парадокса, получившихъ, благодаря Эйлеру, большую извѣстность.

§ 1.

Хотя и нельзя согласиться съ мнѣніемъ Кестнера, что всѣ встрѣчающіяся въ математикѣ парадоксальныя утвержденія представляютъ собою предложенія, которыя либо непосредственно заключаютъ въ себѣ понятіе о безконечномъ, либо такъ или иначе опираются на это понятіе, когда дѣлается попытка ихъ доказать, но это несомнѣнно справедливо для большей части этихъ утвержденій. Еще безспорнѣе то, что къ разряду такихъ утвержденій принадлежатъ именно тѣ математическіе парадоксы, которые заслуживаютъ наибольшаго вниманія по той причинѣ, что рѣшеніе важнѣйшихъ вопросовъ въ нѣкоторыхъ другихъ наукахъ, какъ, напримѣръ, въ метафизикѣ и физикѣ, зависитъ отъ удовлетворительнаго опроверженія кажущихся противорѣчій, заключающихся въ этихъ утвержденіяхъ.

Это-же и составляетъ причину, по которой я въ предлагаемомъ сочиненіи занимаюсь исключительно разсмотрѣніемъ парадоксовъ безконечнаго. Прежде всего необходимо выяснить, какое собственно понятіе мы разумѣемъ подъ словомъ «безконечное»; иначе окажется для насъ невозможнымъ обнаружить, что противорѣчія, заключающіяся въ этихъ математическихъ парадоксахъ, представляются лишь кажущимися. Поэтому-то мы и начинаемъ съ опредѣленія понятія безконечнаго.

§ 2.

Само названіе показываетъ, что безконечное противоставляется всему конечному. То обстоятельство, что мы выводимъ названіе безконечнаго изъ названія конечнаго, указываетъ намъ сверхъ того, что мы представляемъ себѣ понятіе безконечнаго происходящимъ изъ понятія конечнаго, вслѣдствіе присоединенія къ нему новой составной части (такой частью является уже и понятіе о простомъ отрицаніи). Что оба эти понятія относятся къ многообразіямъ, къ количествамъ (т. е. къ многообразіямъ единицъ), а потому и къ величинамъ, этого нельзя отрицать уже по той причинѣ, что именно въ математикѣ, т. е. въ наукѣ о величинахъ, мы и говоримъ чаще всего о безконечномъ, разсматривая конечныя и безконечныя множества и дѣлая предметомъ нашего изслѣдованія и даже вычисленія, наряду съ конечными, не только безконечно большія, но даже и безконечно малыя величины. Не дѣлая еще предположенія, что оба эти понятія—конечнаго и безконечнаго—примѣняются всегда только къ такимъ вещамъ, въ которыхъ въ какомъ-либо смыслѣ могутъ быть обнаружены величина и множество, мы въ правѣ надѣяться, что болѣе точное изслѣдованіе вопроса, при какихъ обстоятельствахъ мы считаемъ многообразіе конечнымъ или безконечнымъ, дастъ намъ возможность опредѣлить, что такое безконечность вообще.

§ 3.

Съ этой цѣлью мы должны однако обратиться къ одному изъ простѣйшихъ понятій нашего ума, имѣя въ виду установить значеніе термина, который будемъ употреблять для обозначенія этого понятія. Мы говоримъ о понятіи, лежащемъ въ основѣ союза *и*. Для того, чтобы сдѣлать это понятіе настолько яснымъ, насколько этого во множествѣ случаевъ требуютъ математика и философія, я думаю, лучше всего выразить его слѣдующими словами: совокупность извѣстныхъ вещей или цѣлое, состоящее изъ извѣстныхъ частей. При этомъ мы должны установить, что эти слова принимаются въ томъ широкомъ значеніи, что во всѣхъ предложеніяхъ, гдѣ употребляется союзъ *и*, предметъ рѣчи есть извѣстная совокупность предметовъ, цѣлое, состоящее изъ извѣстныхъ частей. Напримѣръ: 1) солнце, земля и луна находятся во взаимодѣйствіи; 2) роза и понятіе о розѣ—двѣ различныя вещи; 3) имена Сократъ и сынъ Софрониска обозначаютъ одно и то же лицо. Въ первомъ примѣрѣ это цѣлое составляютъ солнце, земля и луна, и объ этомъ цѣломъ высказывается мысль, что части его находятся во взаимодѣйствіи. Во второмъ примѣрѣ это совокупность двухъ вещей: розы и понятія о ней, при чемъ высказывается сужденіе, что это двѣ совершенно различныя вещи и т. д. Этихъ немногихъ словъ уже будетъ достаточно для установленія соглашенія относительно понятія, о которомъ идетъ рѣчь, если мы при этомъ еще, конечно, прибавимъ, что любая вещь

A съ любыми вещами B, C, $D\ldots$ можетъ составить совокупность вещей, или еще, говоря точнѣе, сама по себѣ составляетъ совокупность, о которой можно высказать много болѣе или менѣе важныхъ истинъ, постольку, поскольку представленія A, B, C, $D\ldots$ въ дѣйствительности соотвѣтствуютъ различнымъ предметамъ, т. е. поскольку ложно каждое изъ слѣдующихъ предложеній: A есть то же, что B; A есть то же, что C; B есть то же, что C и т. д. Если бы, напримѣръ, A было то-же самое, что B, то конечно было бы нелѣпымъ говорить о совокупности вещей A и B.

§ 4.

Существуютъ совокупности, которыя, хотя и заключаютъ тѣ же части A, B, C, $D\ldots$, но являются различными (мы назовемъ ихъ существенно различными) въ зависимости отъ точки зрѣнія (понятія), съ которой мы ихъ разсматриваемъ, напримѣръ, цѣлый и разбитый въ куски стаканъ, разсматриваемые, какъ сосуды для питья. То, что лежитъ въ основаніи различія такихъ совокупностей, мы называемъ способомъ соединенія или расположенія ихъ частей. Совокупность, опредѣляемую такимъ понятіемъ, при которомъ расположеніе частей безразлично (въ которой, слѣдовательно, не происходитъ никакихъ существенныхъ измѣненій, если мѣняется только расположеніе частей),—такую совокупность я называю многообразіемъ; а такое многообразіе, всѣ части котораго будутъ разсматриваться, какъ единицы извѣстнаго рода A, т. е. какъ предметы, содержащіеся въ понятіи A, называется множествомъ предметовъ A.

§ 5.

Извѣстно, что существуютъ совокупности, части которыхъ являются также составными, т. е. представляютъ изъ себя опять совокупности. Между ними есть также совокупности, которыя мы разсматриваемъ съ такой точки зрѣнія, что въ нихъ не произойдетъ существеннаго измѣненія, если мы станемъ разсматривать части частей, какъ части цѣлаго. Этого рода совокупности я назову терминомъ, заимствованнымъ у математиковъ,—суммами. Дѣйствительно, понятіе суммы и состоитъ въ томъ, что

$$A+(B+C)=A+B+C.$$

§ 6.

Если мы разсматриваемъ предметъ, какъ принадлежащій къ такому роду вещей, что любыя двѣ изъ нихъ M и N не могутъ никогда имѣть другого отношенія между собой, какъ то, что онѣ или равны между собой, или одна изъ нихъ представляетъ сумму, содержащую часть, равную другой, т. е. что или $M = N$ или $M = N + \nu$ или $N = M + \mu$; причемъ для составныхъ частей ν и μ имѣетъ мѣсто то же самое, т. е., что онѣ или равны между собой, или одна изъ нихъ можетъ быть разсматриваема, какъ часть другой, то этотъ предметъ мы разсматриваемъ, какъ величину.

§ 7.

Если данная совокупность предметовъ A, B, C, D, E, F. . . L, M, N. . . . обладаетъ такимъ свойствомъ, что для каждой части M можно указать одну и только одну часть N такого рода, что мы можемъ опредѣлить помощью закона, одинаковаго для всѣхъ частей совокупности, — или N его отношеніемъ къ M, или M его отношеніемъ къ N, — то такое собраніе я называю рядомъ, а части его членами этого ряда. Законъ, по которому или N опредѣляется отношеніемъ къ M, или M отношеніемъ къ N, законъ этотъ называется закономъ составленія ряда. Одинъ изъ членовъ ряда, притомъ какой угодно, я назову предыдущимъ, другой — послѣдующимъ (не обозначая этимъ названіемъ дѣйствительной послѣдовательности во времени или пространствѣ). Я назову внутреннимъ членомъ ряда каждый членъ M, который имѣетъ предыдущій членъ и послѣдующій, т. е. не только самъ получается изъ другого члена, но и отъ котораго тоже получается третій членъ, по закону составленія этого ряда. Отсюда уже само собой ясно, какіе члены я назову внѣшними, въ случаѣ, если только они существуютъ, какой членъ я назову первымъ или послѣднимъ*).

§ 8.

Представимъ себѣ рядъ, первый членъ котораго есть единица рода A, а каждый послѣдующій членъ составляется изъ своего предыдущаго такимъ образомъ, что, взявъ предметъ, ему рав-

*) Дальнѣйшія разъясненія этихъ и нѣкоторыхъ изъ установленныхъ въ предыдущихъ §§ понятій слѣдуетъ искать въ «Wissenschaftslehre».

ный, соединяютъ его съ новой единицей рода A, образуя изъ нихъ сумму. Тогда всѣ входящіе въ этотъ рядъ члены, за исключеніемъ перваго, который представляетъ простую единицу рода A, будутъ количествами. Они будутъ представлять именно тѣ количества, которыя я называю конечными или исчислимыми количествами или даже — со включеніемъ перваго члена — числами, болѣе опредѣленно: цѣлыми числами.

§ 9.

Смотря по различнымъ свойствамъ понятія, которое мы здѣсь обозначаемъ черезъ A, оно можетъ заключать въ себѣ то бо́льшее, то меньшее количество предметовъ, т. е. единицъ рода A; поэтому въ вышеупомянутомъ рядѣ можетъ быть и большее и меньшее количество членовъ. Ихъ можетъ быть также столько, что рядъ, который долженъ исчерпать всѣ эти единицы, не будетъ имѣть послѣдняго члена, какъ это мы покажемъ обстоятельнѣе впослѣдствіи. Установивъ это, я буду называть безконечнымъ количествомъ количество бо́льшее, чѣмъ каждое конечное, т. е. количество такого рода, что каждое конечное многообразіе представляетъ только часть его.

§ 10.

Со мной, я надѣюсь, согласятся въ томъ, что приведенное здѣсь опредѣленіе обоихъ понятій, конечнаго и безконечнаго количества, устанавливаетъ различіе между ними такъ, какъ его представляли себѣ тѣ, кто употреблялъ эти выраженія въ строгомъ смыслѣ слова. Со мною согласятся и въ томъ, что въ этихъ опредѣленіяхъ нѣтъ ложнаго круга. Теперь для насъ является важнымъ только то, сможемъ-ли мы при посредствѣ опредѣленія одного только безконечнаго количества дать опредѣленіе безконечности вообще. Это было-бы такъ, если-бы оказалось, что понятіе безконечнаго въ настоящемъ значеніи слова можетъ быть примѣнено только къ количествамъ, т. е., что безконечность есть свойство только однихъ количествъ; иначе говоря, что мы, называя нѣчто безконечнымъ, постольку даемъ ему это названіе, поскольку мы въ немъ находимъ свойство, которое можно разсматривать, какъ безконечное количество. А это, по моему мнѣнію, дѣйствительно справедливо. Математикъ, очевидно, не употребляетъ никогда этого слова въ другомъ смыслѣ, такъ какъ онъ вообще занимается почти исключительно опредѣленіемъ величинъ, принимая одну изъ нихъ, того-же рода, за единицу и пользуясь понятіемъ о числѣ. Если онъ находитъ величину, которая больше, чѣмъ любое число тѣхъ, которыя приняты за единицу, то онъ называетъ ее безконечно большой. Если-же онъ находитъ величину столь малую, что каждое кратное ея оказывается меньше единицы, то онъ называетъ ее безконечно малой. Кромѣ этихъ двухъ родовъ безконечнаго и кромѣ выводимыхъ изъ нихъ родовъ безконечно большихъ и безконечно малыхъ величинъ высшаго порядка, которыя вытекаютъ всѣ изъ того-же понятія, не существуетъ для него ничего безконечнаго.

§ 11.

Это, столь извѣстное математикамъ, понятіе о безконечномъ не удовлетворяетъ однако нѣкоторыхъ философовъ, особенно философовъ новѣйшаго времени, какъ Гегеля, и его послѣдователей. Они называютъ его презрительно плохимъ безконечнымъ и думаютъ, что знаютъ несравненно болѣе высокое, истинное, качественное безконечное, которое они находятъ только въ Богѣ и вообще въ абсолютѣ. Если они, какъ Гегель, Эрдманъ и другіе, представляютъ себѣ математическую безконечность только, какъ величину, которая измѣняется и не имѣетъ границъ въ своемъ возрастаніи (что принимается нѣкоторыми математиками, какъ мы вскорѣ увидимъ, за опредѣленіе этого понятія),—то я охотно присоединяюсь къ нимъ въ отрицательномъ отношеніи къ этому понятію о величинѣ, которая только безконечно возрастаетъ, но никогда не достигаетъ безконечности. Дѣйствительная безконечная величина, напримѣръ, длина цѣлой прямой, неограниченной съ обѣихъ сторонъ (т. е. величина протяженія, заключающаго всѣ точки, которыя опредѣляются только выражаемымъ въ понятіяхъ отношеніемъ къ двумъ даннымъ точкамъ), не должна быть перемѣнной, чего и нѣтъ на самомъ дѣлѣ въ приведенномъ здѣсь примѣрѣ. Величина, которая можетъ быть всегда взята бо̀льшей, чѣмъ мы ее брали раньше, и которая можетъ стать бо̀льше, чѣмъ каждая данная (конечная) величина, можетъ при этомъ оставаться всегда просто конечной величиной, что вѣрно, напримѣръ, для каждой числовой величины 1, 2, 3, 4 . . . *). Я не допускаю только того, чтобы философу извѣстенъ былъ какой либо предметъ, которому онъ былъ-бы въ правѣ приписать свою безконечность, какъ качество, не обнаруживъ раньше въ этомъ предметѣ, въ какомъ-либо отношеніи, безконечной величины или безконечнаго количества. Если я могу доказать, что даже говоря о Богѣ, котораго мы разсматриваемъ, какъ всесовершенно единое, можно указать такія точки зрѣнія, съ которыхъ мы видимъ въ немъ безконечное количество, и что эти-то точки зрѣнія и позволяютъ приписывать ему безконечность, то врядъ-ли нужно будетъ доказывать дальше, что подобныя соображенія лежатъ также въ основѣ всѣхъ остальныхъ случаевъ, гдѣ правильно употребляется понятіе о безконечности. Я же говорю: мы называемъ Бога безконечнымъ, потому что мы должны признать, что онъ владѣетъ силами болѣе, чѣмъ одного рода, имѣющими безконечную величину. Такъ мы должны приписать ему силу познанія, которая и есть истинное всевѣдѣніе, т. е. обнимаетъ безконечное множество истинъ, а именно всѣ истины, и т. д. Что же это за понятіе объ истинно безконечномъ, которое намъ хотятъ навязать вмѣсто того, которое мы здѣсь установили? Это должно быть Все, заключающее въ себѣ каждое нѣчто, абсолютное Все, внѣ котораго нѣтъ ничего. Согласно такому объясненію это была-бы безконечность, заключающая въ себѣ и по нашему опредѣленію безконечно многое. Это была-бы совокупность не только всѣхъ дѣйствительныхъ вещей, но также и всего того, что не имѣетъ никакой дѣйствительности, совокупность предложеній и истинъ въ себѣ. Итакъ, не принимая даже въ разсчетъ всѣхъ остальныхъ ошибокъ, которыя вплетены въ это ученіе о понятіи «все», мы не имѣемъ никакого основанія отказываться отъ нашего пониманія безконечности и принимать ученіе нашихъ противниковъ.

§ 12.

Я долженъ, однако, признать неправильными и отвергнуть также нѣкоторыя другія опредѣленія безконечнаго, которыя были предложены даже математиками, полагавшими при томъ, что эти опре-

*) Мысль автора заключается, повидимому, въ томъ, что перемѣнная величина, принимающая сколь угодно большія значенія, не есть истинно безконечная величина, потому что каждое значеніе ея конечно.

Прим. ред.

дѣленія представляютъ только составныя части одного и того же понятія.

1. Въ самомъ дѣлѣ, какъ я уже упоминалъ, нѣкоторые математики, въ томъ числѣ даже Cauchy (въ своемъ «*Cours d'analyse*» и нѣкоторыхъ другихъ сочиненіяхъ), авторъ статьи «безконечное» въ словарѣ Клюгеля (Klügel) считали, что даютъ опредѣленіе безконечнаго, описывая его, какъ перемѣнную величину, которая возрастаетъ безгранично и можетъ сдѣлаться бо̀льше всякой данной величины, какъ-бы велика она ни была. Граница этого безграничнаго возрастанія должна быть безконечно большой величиной. Такъ, тангенсъ прямого угла, разсматриваемый, какъ величина непрерывная, безграничная, не имѣющая конца, является въ собственномъ смыслѣ слова безконечнымъ. Ошибочность этого опредѣленія ясно видна уже изъ того, что то, что математики называютъ перемѣнной величиной, на самомъ дѣлѣ не есть величина, а только понятіе, представленіе о величинѣ, и при томъ такое представленіе, которое заключаетъ въ себѣ не одну величину, а безконечное множество различающихся по своимъ значеніямъ величинъ, то есть величинъ, которыя отличаются другъ отъ друга по своей величинѣ (Grossheit). Называютъ безконечнымъ не различныя значенія приведеннаго здѣсь для примѣра выраженія *tang.* φ при различныхъ значеніяхъ φ, а только то единственное значеніе, о которомъ думаютъ, хотя въ данномъ случаѣ и неправильно, что это выраженіе принимаетъ его для значенія $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Противорѣчиво также говорить о границѣ безграничнаго возрастанія и, при опредѣленіи безконечно малаго, о границѣ безграничнаго убыванія. Если мы считаемъ первую опредѣленіемъ безконечно большого, то по аналогіи слѣдовало-бы считать нуль (ничто) опредѣленіемъ безконечно малаго, что, однако, несомнѣнно неправильно, и чего не позволяютъ себѣ говорить ни Cauchy, ни Grunert.

2. Если вышеприведенное опредѣленіе слишкомъ широко, то опредѣленіе, принятое Спинозой (Spinoza) и многими другими философами и математиками, напротивъ того, слишкомъ узко. Это опредѣленіе состоитъ въ томъ, что только то безконечно, что не способно къ дальнѣйшему увеличенію, или—къ чему не можетъ быть ничто прибавлено (приложено). Математикъ

позволяетъ себѣ прибавлять къ каждой величинѣ, также и къ безконечно большой, еще другія величины, и не только конечныя, но даже и безконечныя; онъ даже повторяетъ безконечную величину безконечное число разъ и т. д. Если нѣкоторые и спорятъ еще о томъ, законно-ли это, то какой математикъ — если только онъ не отрицаетъ все безконечное — откажется признать, что длина прямой, ограниченной съ одной стороны, но простирающейся въ безконечность съ другой, безконечна, и можетъ быть, несмотря на это, увеличена прибавленіями съ первой стороны.

3. Мы не можемъ признать болѣе удовлетворительнымъ также опредѣленіе, предлагаемое тѣми, которые, придерживаясь точно значенія составныхъ частей слова, говорятъ, что безконечное есть то, что не имѣетъ конца. Если-бы при этомъ они имѣли въ виду только конецъ во времени, т. е. прекращеніе, то только вещи, существующія во времени, могли-бы называться конечными или безконечными. Но вѣдь мы спрашиваемъ также о вещахъ, которыя существуютъ не во времени, напримѣръ, о линіяхъ и вообще о величинахъ, конечны-ли онѣ или безконечны? Если-же они понимаютъ это слово въ болѣе широкомъ смыслѣ, напримѣръ, въ смыслѣ границы вообще, то я напомню, во-первыхъ, что существуютъ предметы, для которыхъ нельзя надлежащимъ образомъ доказать, что они имѣютъ границу, если не придавать этому слову въ высшей степени неопредѣленнаго и сбивчиваго значенія; а между тѣмъ никто не причислитъ ихъ къ безконечнымъ. Такъ, напримѣръ, каждая простая часть времени или пространства (точка во времени или пространствѣ) не имѣетъ границъ, а, напротивъ того, разсматривается сама, какъ граница (промежутка времени или линіи), даже опредѣляется многими именно такъ, какъ будто-бы это и составляло ея сущность; но, однако, не пришло еще въ голову никому (даже Гегелю) увидѣть безконечность въ простой точкѣ. Точно также математикъ не знаетъ границы окружности и столь многихъ другихъ замкнутыхъ линій и поверхностей, считаетъ ихъ однако предметами конечными (если только онъ не имѣетъ въ виду безконечнаго множества точекъ, заключающихся въ нихъ, хотя съ этой точки зрѣнія онъ долженъ признать нѣчто безконечное въ каждой ограниченной линіи). Я замѣчу, во-вторыхъ, что существуетъ много предметовъ, безспорно ограниченныхъ, но разсматриваемыхъ, какъ величины безконечныя. Это имѣетъ мѣсто не только для ранѣе упомянутой прямой, которая

только съ одной стороны простирается въ безконечность, но также для площади, ограниченной двумя безконечными параллельными прямыми или двумя простирающимися въ безконечность сторонами угла, начерченнаго на плоскости и т. д. Точно также, въ раціональной психологіи мы назовемъ безконечно большой познавательную силу въ томъ случаѣ, когда, не будучи всеобъемлющей, она можетъ обозрѣвать только какое-либо безконечное множество истинъ, напримѣръ, только безконечный рядъ десятичныхъ знаковъ, заключающихся въ единственной величинѣ $\sqrt{2}$.

4. Самое обыкновенное опредѣленіе таково: безконечно большимъ называется то, что больше всякой данной величины. Здѣсь приходится прежде всего опредѣлить точнѣе, что подразумѣваютъ подъ словомъ «данный». Означаетъ-ли оно нѣчто возможное, т. е. то, что можетъ существовать въ дѣйствительности или лишь то, что не содержитъ въ себѣ противорѣчія? Въ первомъ случаѣ понятіе конечнаго ограничиваютъ только разрядомъ предметовъ, принадлежащихъ къ реальностямъ, т. е. такихъ, которые всегда реальны или были когда то, или еще только станутъ реальными, или, по крайней мѣрѣ, могли-бы когда либо стать реальными. Fries (Naturphilosophie, § 47), какъ кажется, и понимаетъ безконечность именно въ этомъ смыслѣ, называя ее неосуществимой. Въ разговорномъ языкѣ, однако, примѣняется понятіе конечнаго, также, какъ и безконечнаго, въ обоихъ случаяхъ: и къ предметамъ, которымъ присуща дѣйствительность, какъ, напримѣръ, къ Богу, и къ другимъ предметамъ, о существованіи которыхъ не можетъ быть и рѣчи, каковы, напримѣръ, простыя предложенія и истины сами въ себѣ, вмѣстѣ со своими составными частями, представленіями въ себѣ; при этомъ мы допускаемъ, какъ конечныя, такъ и безконечныя множества ихъ. Если-же понимать подъ даннымъ все то, что только не содержитъ внутренняго противорѣчія, то уже въ самое опредѣленіе понятія вносится утвержденіе, что безконечное не существуетъ, потому что величина, бо̀льшая, чѣмъ каждая величина, не заключающая въ себѣ внутренняго противорѣчія, должна бы быть больше самой себя, что, очевидно, нелѣпо. Но есть еще третье значеніе, въ которомъ можно принимать слово данный, а именно, если мы подъ этимъ словомъ подразумѣваемъ все, что намъ можетъ быть только дано т. е. что можетъ сдѣлаться предметомъ нашего опыта. Но я

обращаюсь съ вопросомъ къ каждому, не понимаетъ-ли онъ выраженій «конечное» и «безконечное» именно такъ (и, если только употребленіе ихъ должно быть полезно въ наукѣ, то не долженъ-ли онъ ихъ понимать непремѣнно въ этомъ смыслѣ), что эти выраженія относятся во всякомъ случаѣ къ извѣстнымъ внутреннимъ свойствамъ предметовъ, а никоимъ образомъ не касаются только отношеній ихъ къ нашей познавательной способности, даже къ нашимъ чувствамъ (въ томъ смыслѣ, можемъ-ли мы или не можемъ производить надъ ними опытовъ). Слѣдовательно, вопросъ о томъ, конечно-ли что-нибудь или безконечно, не можетъ зависѣть отъ того, имѣетъ-ли предметъ, о которомъ идетъ рѣчь, такую величину, которую мы можемъ воспринимать (напримѣръ, отъ того, можемъ-ли мы его обозрѣвать или нѣтъ).

§ 13.

Какъ только мы пришли къ соглашенію, какое понятіе мы должны связывать со словомъ безконечный, и какъ только мы уяснили себѣ вполнѣ составныя части этого понятія, то ближайшимъ вопросомъ является слѣдующій: обладаетъ ли это понятіе предметностью, то есть существуютъ-ли предметы, къ которымъ оно примѣнимо, многообразія, которыя мы можемъ назвать безконечными въ установленномъ нами значеніи. На этотъ вопросъ я смѣло отвѣчаю утвердительно самымъ рѣшительнымъ образомъ. Уже въ ряду тѣхъ предметовъ, которые не имѣютъ никакихъ притязаній на дѣйствительность и даже на возможность, безспорно существуютъ многообразія безконечныя. Очень легко замѣтить, что многообразіе предложеній и истинъ самихъ въ себѣ—безконечно. Если мы станемъ, напримѣръ, разсматривать какую нибудь истину, скажемъ, предложеніе, что истины вообще существуютъ, или любую другую истину, которую мы обозначимъ черезъ A, то мы увидимъ, что предложеніе, выраженное словами «A истинно», уже отлично отъ A, потому что предложеніе A имѣетъ, очевидно, совершенно другое подлежащее, а именно: подлежащимъ второго предложенія будетъ все первое предложеніе A. Далѣе, по тому самому закону, по которому мы вывели изъ предложенія A отличное отъ него предложеніе, которое мы назовемъ B, мы можемъ вывести изъ B третье предложеніе C, и такъ далѣе безъ конца. Совокупность всѣхъ этихъ предложеній, изъ которыхъ каждое послѣдующее находится къ непосредственно предыдущему въ только что указанномъ отношеніи, а именно, что подлежащимъ послѣдующаго предложенія является предыдущее предложеніе, о которомъ высказывается, что оно истинно, совокупность эта—утверждаю я – обнимаетъ такое многообразіе частей (предложеній), которое больше, чѣмъ всякое конечное многообразіе. Ибо читатель замѣтитъ безъ указаній съ моей стороны сходство, которое имѣетъ рядъ предложеній, составленныхъ по только что приведенному закону образованія, съ рядомъ чиселъ, разсмотрѣннымъ въ § 8. Сходство это состоитъ именно въ томъ, что къ каждому члену послѣдняго ряда найдется соотвѣтствующій въ первомъ ряду, что, слѣдовательно, для каждаго числа, какъ-бы велико оно ни было, найдется равное ему число различныхъ предложеній, и что мы можемъ всегда составить новыя предложенія, или, лучше сказать, что существуютъ сами по себѣ подобныя предложенія, независимо отъ того, будемъ-ли мы ихъ составлять или нѣтъ. Отсюда слѣдуетъ, что совокупность всѣхъ этихъ предложеній имѣетъ множественность, которая больше всякаго числа и, слѣдовательно, безконечна.

§ 14.

Какъ ни просто и какъ ни ясно только что приведенное доказательство, однако есть много ученыхъ и очень остроумныхъ людей, которые считаютъ парадоксальнымъ и даже ложнымъ то предложеніе, которое я считаю здѣсь доказаннымъ. Они отрицаютъ существованіе чего-либо безконечнаго. Они утверждаютъ, что не только среди реальныхъ, но и среди остальныхъ предметовъ нѣтъ ни отдѣльнаго предмета, ни совокупности нѣсколькихъ предметовъ, въ которыхъ можно было-бы допустить наличность безконечнаго множества частей. Мы разсмотримъ позже возраженія, которыя они приводятъ противъ безконечнаго въ области дѣйствительнаго, такъ какъ мы только позже приведемъ основанія существованія такой безконечности. Здѣсь-же мы разсмотримъ только тѣ положенія, которыми пользуются для доказательства того, что нѣтъ безконечнаго нигдѣ, даже и въ области предметовъ, не имѣющихъ притязаній быть дѣйствительными. 1. «Безконечнаго множества», какъ говорятъ наши противники, «не можетъ быть нигдѣ «уже потому, что безконечное не можетъ быть соединено въ «одно цѣлое, не можетъ быть объято цѣликомъ въ «мысли». Это утвержденіе я долженъ назвать попросту ошибочнымъ. Ошибка вытекаетъ изъ ложнаго убѣжденія, что для того, чтобы вообразить себѣ цѣлое, состоящее изъ извѣстныхъ предметовъ *a*, *b*, *c*, *d*.... нужно сперва составить себѣ представленіе о каждомъ отдѣльномъ предметѣ. На самомъ дѣлѣ это совершенно невѣрно. Я могу вообразить себѣ множество или совокупность всѣхъ жителей Праги или Пекина или, если ужъ такъ предпочитаютъ, цѣлое населеніе этихъ городовъ, не представляя себѣ каждаго изъ жителей въ отдѣльности, т. е. не составляя отдѣльныхъ представленій о каждомъ. Я это и дѣлаю въ данную минуту, говоря объ этомъ множествѣ и высказывая, напримѣръ, сужденіе, что количество это въ Прагѣ колеблется между 100000 и 120000. Какъ только мы имѣемъ представленіе *A*, которое соотвѣтствуетъ каждому изъ предметовъ *a*, *b*, *c*, *d*.... и не соотвѣтствуетъ ничему другому, то намъ очень легко составить представленіе о совокупности всѣхъ этихъ предметовъ. Для этого не нужно ничего другого, какъ только связать понятіе, заключенное въ словѣ совокупность съ представленіемъ *A* такимъ образомъ, какъ это указываютъ слова: совокупность всѣхъ *A*. Одно это замѣчаніе, правильность котораго, я думаю, очевидна каждому, уничтожаетъ всѣ трудности, которыя хотятъ усмотрѣть въ понятіи о многообразіи, состоящемъ изъ безконечнаго числа частей. Для этого нужно только, чтобы было на лицо родовое понятіе, заключающее въ себѣ всѣ эти части заключающее ничего другого, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ понятіи «совокупность всѣхъ предложеній или истинъ въ «себѣ», въ которомъ необходимымъ родовымъ понятіемъ является «предложеніе или истина въ себѣ».

Я, однако, не могу оставить незатронутой еще другую ошибку, которая таится въ обсуждаемомъ возраженіи.

А именно это—мнѣніе, которое гласитъ, что «многообразіе не существовало-бы, если-бы не было кого либо, кто бы думалъ о немъ. Утверждающій это--если только онъ желаетъ быть послѣдовательнымъ настолько, насколько это возможно, защищая ошибочное положеніе—долженъ не только утверждать, что нѣтъ безконечныхъ многообразій предложеній или истинъ въ себѣ, но долженъ также утверждать, что нѣтъ вообще ни предложеній, ни истинъ въ себѣ. Дѣйствительно, если мы уяснили себѣ вполнѣ понятіе о предложеніяхъ и истинахъ въ себѣ и если мы не сомнѣваемся нисколько въ ихъ существованіи, то врядъ-ли мы дойдемъ до подобныхъ утвержденій и уже во всякомъ случаѣ не будемъ на нихъ настаивать. Чтобы сдѣлать это вполнѣ очевиднымъ, я позволю себѣ предложить одинъ вопросъ: находятся-ли на полюсахъ земли тѣла жидкія и твердыя, воздухъ, вода, камни и т. п., дѣйствуютъ-ли эти тѣла по извѣстнымъ законамъ другъ на друга, напримѣръ, такъ, что скорости, которыя они передаютъ другъ другу при ударѣ, находятся въ отношеніи обратномъ къ ихъ массамъ, и т. п., и происходитъ-ли это и тогда, когда этого не наблюдаетъ ни одинъ человѣкъ, ни вообще ни одно мыслящее существо? Если на этотъ вопросъ послѣдуетъ утвердительный отвѣтъ (а кто-же могъ бы отвѣтить иначе?), то имѣются предложенія и истины въ себѣ, которыя выражаютъ всѣ эти явленія, несмотря на то, что никто не думаетъ и не знаетъ о нихъ. Въ этихъ-же предложеніяхъ часто говорится о цѣломъ, о множествѣ, потому что каждое тѣло есть вѣдь цѣлое и производитъ многія изъ своихъ дѣйствій только благодаря множеству своихъ составныхъ частей. Существуютъ, слѣдовательно, множества и цѣлыя независимо отъ того, имѣется-ли существо, которое-бы о нихъ думало. А если бы этого не было, если бы даже эти множества не существовали, то какимъ образомъ могли-бы быть правильными сужденія, которыя мы о нихъ высказываемъ? Или, больше того, какой былъ-бы смыслъ этихъ сужденій, если бы они были истинными лишь постольку, поскольку есть кто-то, воспринимающій эти явленія? Когда я говорю: «Эта глыба оторвалась на «моихъ глазахъ отъ той скалы и упала внизъ, разсѣкая воздухъ», то это должно было-бы имѣть приблизительно слѣдующій смыслъ: въ то время, какъ я представлялъ себѣ мысленно извѣстныя простыя существа тамъ наверху, произошло соединеніе ихъ, которое я назову глыбой; это соединеніе отдѣлилось отъ другихъ соединеній, которыя, въ то время, какъ я соединялъ ихъ мысленно, объединились въ одно цѣлое, которое я называю скалой и т. д.

2. Можно было-бы, однако, сказать: «при всемъ томъ остается «все-же справедливымъ тотъ фактъ, что исключительно отъ н а с ъ, «и по большей части, вполнѣ отъ нашего произвола зависитъ «то, захотимъ-ли мы соединить нѣсколько простыхъ предметовъ «въ одну совокупность или нѣтъ, и что только въ случаѣ, когда «мы это дѣлаемъ, между ними возникаютъ извѣстныя отношенія. «Центральный атомъ пуговицы на моемъ сюртукѣ и централь-

«ный атомъ того яблока на башнѣ не имѣютъ ни малѣйшаго «отношенія другъ къ другу и другъ съ другомъ ничѣмъ не связаны, «и только благодаря тому, что я думаю о нихъ одновременно, воз- «никаетъ нѣкоторый родъ связи между ними».—Но я долженъ высказаться и противъ этого. Еще до того, какъ мыслящее существо связало оба атома въ своемъ представленіи, они уже находились во взаимодѣйствіи, напримѣръ, въ силу притяженія и т. п.; и если-бы только это мыслящее существо не предприняло подъ вліяніемъ своихъ мыслей никакихъ дѣйствій, которыя повліяли-бы на отношенія между обоими атомами, то было бы совершенно невѣрно утверждать, что только благодаря тому, что ихъ мыслятъ вмѣстѣ, между ними возникли отношенія, которыхъ безъ этого не было-бы; неправильно также утверждать, что эти отношенія не существовали между ними и раньше. Если я сужу правильно, что одинъ атомъ находится ниже, а другой выше, и что, слѣдовательно, этотъ притягивается тѣмъ нѣсколько вверхъ и т. д., то все это имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда я и не думаю объ этомъ.

3. Нѣкоторые говорятъ: «Для того, чтобы существовала совокупность, нѣтъ надобности въ томъ, чтобы мыслящее существо «дѣйствительно думало о ней, но необходимо, чтобы о «ней можно было думать. А такъ какъ мыслящее существо не мо- «жетъ представить себѣ безконечное множество вещей, каждую въ «отдѣльности, и связать затѣмъ эти представленія въ совокупность, «то невозможна и совокупность, заключающая въ себѣ безконечное «множество вещей въ качествѣ составныхъ частей».

Мы уже видѣли въ № 1, насколько ошибочно повторенное здѣсь предположеніе, что для того, чтобы мыслить о совокупности, необходимо мыслить всѣ ея части въ отдѣльности, т. е. мыслить каждую отдѣльную часть при посредствѣ соотвѣтствующаго ей единичнаго представленія. Не представляется намъ также никакой надобности въ томъ, чтобы указывать на всевѣдущее существо, какъ на такое, котораго не затрудняетъ даже пониманіе безконечнаго множества предметовъ, каждаго въ отдѣльности. Мы не должны соглашаться даже и съ первымъ предположеніемъ, а именно съ тѣмъ, что существованіе совокупности вещей покоится на возможности думать объ этой совокупности. Ибо возможность мыслить вещь никоимъ образомъ не составляетъ основанія для возможности ея существованія. Напротивъ того, возможность существованія вещи составляетъ основаніе для того, чтобы разумное существо, если оно только не впадаетъ въ ошибку, нашло эту вещь возможной или, какъ говорятъ (въ переносномъ смыслѣ), мыслимой, т. е. чтобы ее можно было мыслить. Мы убѣдимся вполнѣ въ правильности этого замѣчанія и въ полной несостоятельности, правда, очень распространеннаго мнѣнія, которое я здѣсь оспариваю, если постараемся уяснить себѣ составныя части весьма важнаго понятія «возможности». Если называть возможнымъ то, что можетъ быть, то это, очевидно, еще не будетъ разложеніе понятія о возможности, такъ какъ оно заключается еще цѣликомъ въ выраженіи «можетъ быть». Но еще неправильнѣе было бы пытаться установить слѣдующее опредѣленіе: возможно то, что можно мыслить. Мыслить, въ собственномъ значеніи этого слова, включая сюда уже и простое представленіе, мы можемъ и невозможное. Это мы и дѣлаемъ въ дѣйствительности каждый разъ, когда мы высказываемъ о немъ сужденіе, — признаемъ его, напримѣръ, невозможнымъ. Такъ, мы говоримъ, что нѣтъ и не можетъ быть величины, которая-бы выражалась нулемъ или $\sqrt{-1}$. Но даже если-бы мы разумѣли подъ мышленіемъ не простое представленіе, а признаніе дѣйствительнаго существованія, то ложнымъ является утвержденіе, что возможно все то, что мы можемъ считать истиннымъ. Вѣдь мы считаемъ иногда ошибочно и невозможное истиннымъ, какъ, напримѣръ, то, что мы нашли квадратуру круга. Въ такомъ случаѣ, слѣдовало бы сказать (съ поправкой, которую я уже дѣлалъ выше), что возможно то, о чемъ мыслящее существо, при условіи правильности сужденія, высказываетъ, что оно можетъ случиться, т. е. возможно. Объясненіе, заключающее въ себѣ очевидный ложный кругъ! Итакъ, мы вынуждены отказаться окончательно отъ отношенія къ мыслящему существу при объясненіи возможнаго и поискать другого признака. Иногда говорятъ, что возможно то, «что себѣ «не противорѣчитъ». Все, что содержитъ въ себѣ противорѣчіе, конечно, невозможно, такъ, напримѣръ, сужденіе, что шаръ не есть шаръ. Но не все невозможное является именно такимъ, что противорѣчіе содержится уже въ составныхъ частяхъ, изъ которыхъ составлено представленіе. Невозможно, чтобы тѣло, ограниченное семью плоскими гранями, имѣло равныя грани, но въ данномъ случаѣ противорѣчіе еще не обнаруживается сразу въ соединеніи словъ. Слѣдовательно, мы должны расширить наше опредѣленіе.

Если-бы мы сказали, что невозможно все, что противорѣчитъ какой либо истинѣ, то этимъ мы-бы провозгласили невозможность всего, что не существуетъ, потому что сужденіе, что возможное есть, противорѣчитъ истинѣ, что его нѣтъ. Въ такомъ случаѣ мы не допускали-бы никакой разницы между возможнымъ и истиннымъ, и даже необходимымъ, что мы дѣлаемъ однако всѣ. Отсюда мы видимъ, что область истинъ, которымъ противорѣчитъ невозможное, должна быть ограничена только извѣстнымъ родомъ ихъ, и врядъ-ли теперь отъ насъ можетъ ускользнуть, какого рода будутъ эти истины. Это— истины, содержащія чистыя понятія. Что противорѣчитъ истинѣ, содержащей чистыя понятія, то слѣдуетъ назвать невозможнымъ; возможно, слѣдовательно, то, что не противорѣчитъ никакой истинѣ, содержащей чистыя понятія. Кто разъ постигъ, что это и есть правильное опредѣленіе понятія возможности, тому врядъ-ли прійдетъ на умъ утверждать, что нѣчто возможно лишь тогда, когда оно мыслимо, т. е. когда мыслящее существо, не ошибающееся въ своемъ сужденіи, найдетъ его возможнымъ. Это вѣдь значило-бы: «Предло«женіе лишь тогда не противорѣчитъ истинѣ, содержащей чистыя «понятія, когда не противорѣчитъ никакой истинѣ, содержащей чис«тыя понятія то, что существуетъ мыслящее существо, которое въ «согласіи съ истиной находитъ, что это предложеніе не противорѣ«читъ никакой истинѣ, содержащей чистыя понятія». Кто-же не замѣтитъ, какимъ лишнимъ, не относящимся къ дѣлу является здѣсь введеніе этого мыслящаго существа? Если же рѣшено, что возможность создается не мышленіемъ, то гдѣ-же найдется основаніе для вывода о невозможности безконечнаго множества на основаніи мнимаго обстоятельства, что невозможно мыслить совмѣстно безконечное множество вещей?

§ 15.

Я считаю теперь достаточно обоснованнымъ и доказаннымъ мнѣніе, что существуютъ безконечныя множества, по крайней мѣрѣ, среди вещей не реальныхъ, что именно множество всѣхъ истинъ въ себѣ безконечно. Подобно тому, какъ это было сдѣланы въ § 13, мы прійдемъ къ заключенію, что безконечно также множество всѣхъ чиселъ (такъ называемыхъ натуральныхъ или цѣлыхъ чиселъ, сущность которыхъ мы опредѣлили въ § 8). Но и это положеніе звучитъ парадоксально, и мы можемъ, собственно, считать его первымъ среди парадоксовъ, появляющихся въ области математики, такъ какъ раньше разсмотрѣнный парадоксъ относится къ болѣе общей наукѣ, чѣмъ наука о величинахъ.

«Если каждое число», можно сказать, «по самому понятію о «числѣ, есть лишь простое конечное множество, то какимъ образомъ «можетъ быть безконечнымъ множество всѣхъ чиселъ? Когда мы «разсматриваемъ рядъ натуральныхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots.,$$

«то мы замѣчаемъ, что множество чиселъ, которое содержитъ этотъ «рядъ, начиная съ перваго (единицы), до какого-нибудь другого, на- «примѣръ, до числа 6, выражается всегда этимъ послѣднимъ чис- «ломъ. Поэтому множество всѣхъ чиселъ должно быть именно «такъ велико, какъ послѣднее изъ нихъ и, слѣдовательно, само «должно быть числомъ, а не безконечностью».

Обманчивость этого вывода исчезаетъ тотчасъ-же, какъ только мы вспомнимъ, что во множествѣ всѣхъ чиселъ въ натуральномъ ряду нѣтъ послѣдняго числа, что такимъ образомъ понятіе о послѣднемъ (высшемъ) числѣ — понятіе безпредметное, потому что содержитъ противорѣчіе. Ибо, по закону образованія этого ряда, данномъ въ опредѣленіи его (§ 8), каждый членъ ряда имѣетъ послѣдующій. Однимъ этимъ замѣчаніемъ разрѣшается уже этотъ парадоксъ.

§ 16.

Если множество чиселъ (и именно такъ называемыхъ цѣлыхъ чиселъ) безконечно, то тѣмъ болѣе безконечно множество величинъ (по опредѣленію, приведенному въ § 6 и въ «Wissenschaftslehre» въ § 87). Въ самомъ дѣлѣ, по этому опредѣленію не только всѣ числа будутъ также и величинами, но имѣется гораздо больше величинъ, чѣмъ чиселъ, такъ какъ дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., а равно и такъ называемыя ирраціональныя выраженія $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ..., π, e, ... также обозначаютъ величины. По этому опредѣленію нѣтъ противорѣчія въ томъ, чтобы говорить о безконечно большихъ и безконечно малыхъ величинахъ, если подъ безконечно большой величиной подразумѣвается лишь такая величина, которая при разъ положенной въ основаніе единицѣ является цѣлымъ, по отношенію къ которому каждое конечное множество этихъ единицъ составляетъ только часть; а подъ безконечно малой величиной подразумѣвается такая, по отношенію къ которой сама единица является цѣлымъ, частью котораго будетъ каждое конечное множество этихъ величинъ. Множество всѣхъ чиселъ является неоспоримымъ примѣромъ безконечно большой величины. Я говорю: величины, а не безконечно большого числа, потому что, какъ мы уже замѣтили въ предыдущемъ параграфѣ, никакъ нельзя назвать числомъ это безконечно большое множество. Если-же величину, безконечно большую по сравненію съ другой величиной, взятой за единицу, мы примемъ за единицу и станемъ ею измѣрять ту величину, которую мы прежде принимали за единицу, то эта послѣдняя представится намъ безконечно малой.

§ 17.

Время и пространство представляютъ въ высшей степени важный родъ безконечно большихъ величинъ, которыя также еще не принадлежатъ къ области реальнаго, хотя и могутъ опредѣлять реальное. Ни время, ни пространство не представляютъ ничего реальнаго, такъ какъ они не представляютъ изъ себя ни субстанцій, ни свойствъ субстанцій. Они выступаютъ только, какъ нѣчто опредѣляющее для всѣхъ несовершенныхъ (ограниченныхъ, конечныхъ или, что сводится къ одному и тому-же, зависимыхъ, сотворенныхъ) субстанцій, а именно, каждая изъ послѣднихъ должна постоянно пребывать въ нѣкоторомъ времени и въ извѣстномъ пространствѣ, такимъ образомъ, что каждая простая субстанція въ каждомъ пунктѣ времени, т. е. въ каждой простой части времени должна пребывать въ какой-нибудь простой части пространства, т. е. въ какой-нибудь его точкѣ. Множество простыхъ частей или точекъ, изъ которыхъ состоитъ время и пространство, безконечно. Безконечно не только количество простыхъ частей, изъ которыхъ состоитъ все время и все пространство, т. е. количество точекъ времени и пространства вообще, но и количество точекъ времени между двумя точками a и b, какъ-бы близко ни отстояли эти точки другъ отъ друга, тоже безконечно. Точно также безконечно и количество точекъ пространства между любыми двумя точками пространства a и b, какъ-бы близко ни отстояли другъ отъ друга эти двѣ точки. Мнѣ нѣтъ нужды защищать эти предложенія, такъ какъ врядъ-ли найдется математикъ, (если только онъ не отрицаетъ всякой безконечности), который не согласился-бы съ ними. Чтобы спасти себя отъ признанія безконечнаго, которое здѣсь столь явно обнаружено, противники всякой безконечности приводятъ слѣдующее возраженіе: «Мы можемъ, конечно, всегда мыслить бóльшее количество точекъ време- «ни и пространства, чѣмъ то, которое мы мыслили, но количество «точекъ дѣйствительно существующихъ останется всегда «конечнымъ». Но на это я возражаю, что ни время, ни пространство, а потому также ни простыя части времени, ни простыя части пространства не представляютъ ничего дѣйствительнаго, и что поэтому несообразно говорить о конечномъ множествѣ ихъ, какъ существующихъ въ дѣйствительности. Тѣмъ болѣе несообразно воображать, что эти части становятся дѣйствительными только черезъ наше мышленіе. Ибо вѣдь отсюда слѣдовало-бы, что свойства времени и пространства зависятъ отъ нашего мышленія и нашей оцѣнки истинности, и что, слѣдовательно, отношеніе діаметра къ окружности круга было раціонально, пока мы ошибочно считали его раціональнымъ, и что пространство получитъ только тогда всѣ тѣ свойства, которыя мы узнаемъ впослѣдствіи, когда они намъ станутъ извѣстны. Если-же наши противники исправятъ вышеприведенное выраженіе въ томъ смыслѣ, что настоящія свойства времени и пространства опредѣляются только мышленіемъ, соотвѣтствующимъ истинѣ, то сказанное ими представитъ нѣчто тавтологическое, а именно: истинно то, что истинно; откуда, конечно, нельзя вывести ни малѣйшаго возраженія противъ утверждаемой нами безконечности времени и пространства. Во всякомъ случаѣ, нелѣпо говорить, что время и пространство заключаютъ столько точекъ, сколько мы ихъ мыслимъ.

§ 18.

Хотя каждая величина, вообще каждый предметъ, который намъ представляется безконечнымъ въ какомъ-либо отношеніи, долженъ представляться намъ именно въ этомъ отношеніи, какъ цѣлое, состоящее изъ безконечнаго множества частей,—невозможно однако утверждать наоборотъ, чтобы каждая величина, которую мы разсматриваемъ, какъ сумму безконечнаго множества другихъ конечныхъ величинъ, была непремѣнно безконечной. Такъ, напримѣръ, всѣми признается, что ирраціональныя величины, какъ

$\sqrt{2}$, по отношенію къ единицѣ, положенной въ основаніе, будутъ величинами конечными, хотя ихъ можно разсматривать, какъ составленныя изъ безконечнаго множества дробей вида $\frac{14}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots$, числители и знаменатели которыхъ — цѣлыя числа; точно также извѣстно, что сумма безконечнаго ряда слагаемыхъ вида $a + ae + ae^2 + \cdots \text{in inf.} = \frac{a}{1-e}$, т. е. равняется конечной величинѣ $\frac{a}{1-e}$ каждый разъ, какъ $e < 1$ *). Итакъ, въ утвержде-

---

*) Такъ какъ обыкновенное доказательство суммированія этого ряда представляется не вполнѣ строгимъ, то да будетъ мнѣ позволено по этому случаю привести слѣдующее доказательство. Если мы будемъ считать $a = 1$ и e положительнымъ (примѣненіе этого доказательства къ другимъ случаямъ дѣлается само собой), и если мы напишемъ символическое равенство

(1) $S = 1 + e + e^2 + \cdots \text{in inf}$

то вѣрно, по крайней мѣрѣ, то, что S означаетъ величину положительную, конечную или безконечно большую. Но для каждаго цѣлаго n

$$S = 1 + e + e^2 + \cdots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + \cdots \text{ in inf.}$$

или также

(2) $S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n + e^{n+1} + \cdots \text{in inf.}$

вмѣсто чего мы можемъ также написать

(3) $S = \frac{1-e^n}{1-e} + \overset{1}{P}$,

если обозначимъ значеніе безконечнаго ряда $e^n + e^{n+1} + \cdots$ in inf. черезъ $\overset{1}{P}$. При этомъ мы, по крайней мѣрѣ, знаемъ, навѣрное то, что $\overset{1}{P}$ означаетъ величину, зависящую отъ e и отъ n, измѣримую или неизмѣримую, во всякомъ случаѣ положительную. Но тотъ-же безконечный рядъ мы можемъ представить еще слѣдующимъ образомъ:

$$e^n + e^{n+1} + \cdots \text{ in inf.} = e^n [1 + e + \cdots \text{ in inf.}]$$

Здѣсь сумма безконечнаго числа членовъ, стоящая въ скобкахъ въ правой части равенства, а именно

$$[1 + e + \cdots \text{ in inf.}],$$

н , что сумма безконечнаго количества конечныхъ величинъ сама будетъ величиной конечной, нѣтъ никакого противорѣчія, потому что иначе оно не могло-бы оказаться правильнымъ. Парадоксъ, который можно было-бы въ немъ усмотрѣть, происходитъ только отъ того, что забываютъ о томъ, какъ складываемые здѣсь члены ста-

---

совершенно сходна по виду съ рядомъ, который въ символическомъ равенствѣ (1) положенъ $= S$, но не слѣдуетъ считать ее одной и той-же, такъ какъ множество слагаемыхъ здѣсь и въ (1), хотя оно и безконечно въ обоихъ случаяхъ, не будетъ однимъ и тѣмъ-же; здѣсь въ немъ несомнѣнно членовъ на n меньше, чѣмъ въ (1).

Итакъ, мы можемъ съ полной увѣренностью написать равенство $[1 + e + e^2 + \cdots \text{ in inf.}] = S - \overset{2}{P}$, при чемъ мы можемъ предположить, что $\overset{2}{P}$ обозначаетъ во всякомъ случаѣ величину, зависящую отъ n и всегда положительную. Поэтому мы получаемъ:

$$(4)\quad S = \frac{1 - e^n}{1 - e} + e^n\left[S - \overset{2}{P}\right] \text{ или}$$

$$S\left[1 - e^n\right] = \frac{1 - e^n}{1 - e} - e^n\overset{2}{P}, \text{ или, наконецъ,}$$

$$(5)\quad S = \frac{1}{1 - e} - \frac{e^n}{1 - e^n}\cdot\overset{2}{P}$$

Соединеніе обоихъ равенствъ (3) и (5) даетъ

$$\frac{-e^n}{1 - e} + \overset{1}{P} = \frac{-e^n}{1 - e^n}\cdot\overset{2}{P}$$

или

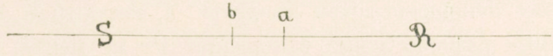
$$\overset{1}{P} + \frac{e^n}{1 - e^n}\cdot\overset{2}{P} = + \frac{e^n}{1 - e^n},$$

откуда можно видѣть, что если мы примемъ n сколь угодно большимъ и сдѣлаемъ такимъ образомъ значеніе $\frac{e^n}{1 - e^n}$ меньше любой, сколь угодно малой величины $\frac{1}{N}$, то каждая изъ величинъ $\overset{1}{P}$ и $\frac{e^n}{1 - e^n}.\overset{2}{P}$ должна сдѣлаться также меньше любого значенія. Но разъ это такъ, то каждое изъ равенствъ (3) и (5) показываетъ, что $S = \frac{1}{1 - e}$, такъ какъ S при одномъ значеніи e можетъ имѣть только одну неизмѣнную величину, слѣдовательно, не можетъ зависѣть отъ n.

новятся все меньше и меньше. Никого вѣдь не удивитъ, что сумма слагаемыхъ, въ которой каждое послѣдующее слагаемое составляетъ только половину предыдущаго, не можетъ никогда составить больше, чѣмъ удвоенное первое слагаемое, потому что при каждомъ самомъ далекомъ членѣ этого ряда не достаетъ до этого удвоеннаго числа именно столько, сколько составляетъ этотъ послѣдній членъ.

§ 19.

Мы не могли не замѣтить уже въ примѣрахъ безконечнаго, приведенныхъ до сихъ поръ, что не слѣдуетъ считать равными между собой всѣ безконечныя многообразія въ отношеніи ихъ множественности. Напротивъ того, нѣкоторыя изъ нихъ больше, другія меньше, т. е. одно многообразіе можетъ заключать въ себѣ другое, какъ часть (или, наоборотъ, можетъ само составить часть другого). Это утвержденіе также звучитъ парадоксально для многихъ. Конечно, всѣмъ тѣмъ, кто опредѣляетъ безконечное, какъ нѣчто неспособное къ дальнѣйшему увеличенію, должно казаться не только парадоксальнымъ, но даже противорѣчивымъ утвержденіе, что одно безконечное больше другого. Но мы нашли уже выше, что это мнѣніе опирается на такое понятіе о безконечномъ, которое не согласно съ обыкновеннымъ употребленіемъ этого слова въ рѣчи. По нашему опредѣленію, соотвѣтствующему не только обычному употребленію этого понятія, но и цѣлямъ науки, никто не можетъ найти ничего противорѣчиваго или даже страннаго, въ мысли, что одно безконечное множество можетъ быть больше другого. Для кого, напримѣръ, не будетъ ясно, что длина прямой,



простирающейся безгранично въ направленіи aR, безконечна, но что прямая bR, изъ точки b идущая въ томъ-же направленіи, больше, чѣмъ aR на отрѣзкѣ ba? и, наконецъ, что прямая, идущая неограниченно въ обоихъ направленіяхъ aR и aS, должна быть названа большей на величину, которая сама безконечна, и т. д.

§ 20.

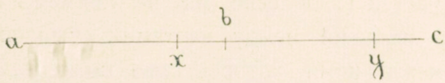
Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію въ высшей степени замѣчательной особенности, которая можетъ встрѣтиться въ отношеніи двухъ многообразій, если они оба безконечны; она, собственно говоря, дѣйствительно имѣетъ всегда мѣсто, но ее упускали до сихъ поръ изъ виду въ ущербъ познанію многихъ важныхъ истинъ метафизики, физики и математики—и она, пожалуй, и теперь, когда я это высказываю, покажется въ такой степени парадоксальной, что весьма необходимо остановиться нѣсколько дольше на ея разсмотрѣніи. Я утверждаю: два безконечныхъ многообразія могутъ быть въ такомъ отношеніи одно къ другому, что, съ одной стороны, возможно соединить каждую вещь одного многообразія съ нѣкоторой вещью другого въ пару такимъ образомъ, что не останется въ обоихъ многообразіяхъ ни одной вещи, не соединенной въ пару, и ни одна вещь не будетъ входить въ двѣ или нѣсколько паръ. Съ другой стороны, возможно при этомъ, что одно изъ этихъ многообразій заключаетъ въ себѣ другое просто какъ часть, такъ что множества, которыя они представляютъ, если мы разсматриваемъ составляющія ихъ вещи, какъ равныя, т. е. какъ единицы, имѣютъ между собой самыя разнообразныя отношенія. Я докажу это утвержденіе, приведя два примѣра, въ которыхъ сказанное несомнѣнно имѣетъ мѣсто.

1. Возьмемъ любыя двѣ (отвлеченныя) величины, напримѣръ, 5 и 12; очевидно, что многообразіе величинъ между нулемъ и пятью (или величинъ меньшихъ, чѣмъ 5), а также многообразіе величинъ, меньшихъ чѣмъ 12, безконечно. Точно также ясно, что послѣднее многообразіе должно считаться бо́льшимъ, чѣмъ первое, такъ какъ первое составляетъ только часть второго. Если мы возьмемъ другія величины, вмѣсто величинъ 5 и 12, то мы принуждены будемъ сказать, что оба эти многообразія не всегда сохраняютъ одно и то-же отношеніе другъ къ другу, а, напротивъ того, вступаютъ въ самыя разнообразныя отношенія. Но не менѣе всего этого истинно и слѣдующее: если x обозначаетъ любую величину, содержащуюся между 0 и 5, и если мы опредѣлимъ отношеніе между x и y уравненіемъ

$$5y = 12x,$$

то y будетъ величиной, лежащей между 0 и 12, и, наоборотъ, если только y содержится между 0 и 12, то x содержится между 0 и 5. Изъ этого уравненія слѣдуетъ также, что каждому значенію x принадлежитъ только одно значеніе y, и наоборотъ. Отсюда ясно, что для каждой величины многообразія величинъ между 0 и 5, равной x, существуетъ въ многообразіи величинъ, лежащихъ между 0 и 12, величина, равная y, которая можетъ быть соединена съ ней въ пару такимъ образомъ, что ни одна изъ вещей, составляющихъ оба эти многообразія, не останется не соединенной въ пару и ни одна не окажется въ двухъ или нѣсколькихъ соединеніяхъ.

2. Второй примѣръ заимствуемъ изъ пространственной вещи. Кто уже знаетъ, что свойства пространства основываются на свойствахъ времени, а свойства времени на свойствахъ отвлеченныхъ чиселъ и величинъ, тотъ не нуждается, конечно, въ примѣрѣ для усмотрѣнія того, что и во времени и въ пространствѣ находятся такія безконечныя многообразія, какія мы нашли въ области величинъ вообще. Однако, ради правильнаго примѣненія нашего предложенія впослѣдствіи, необходимо разсмотрѣть подробно по крайней мѣрѣ одинъ случай, въ которомъ-бы встрѣчались такія многообразія. Пусть будутъ поэтому a, b, c три любыя точки на прямой; отношеніе разстояній $ab:ac$ можетъ быть какимъ угодно, лишь-бы ac означало бо́льшее изъ двухъ разстояній. Въ такомъ случаѣ, хотя многообразія точекъ, лежащихъ на ab и на ac, оба безконечны,



однако многообразіе точекъ на ac превзойдетъ многообразіе ихъ на ab, такъ какъ на ac, кромѣ точекъ ab, находятся еще точки bc, которыхъ нѣтъ на ab. Если измѣнить произвольно отношеніе $ab:ac$, то мы даже принуждены будемъ сказать, что и отношеніе этихъ многообразій будетъ совершенно измѣнено. Относительно этихъ двухъ многообразій также справедливо то самое, что прежде было показано для двухъ многообразій величинъ, содержащихся между 0 и 5 и между 0 и 12, относительно паръ, которыя можно составить изъ любой вещи одного многообразія и любой вещи другого. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x—точка, лежащая на ab; если мы возьмемъ точку y въ направленіи ax такимъ образомъ, что $ab:ac=ax:ay$, то y будетъ точкой, лежащей на ac. Если же, наоборотъ, y—точка, лежащая на ac, если только мы будемъ опредѣлять ax по ay изъ того-же уравненія, то x будетъ точкой, лежащей на ab. Точно также всякое другое x будетъ опредѣлять другое y, и, наоборотъ, всякое другое y будетъ опредѣлять другое x. Изъ этихъ двухъ истинъ опять очевидно, что для каждой точки отрѣзка ab можно выбрать точку отрѣзка ac и для каждой точки отрѣзка ac—точку отрѣзка ab такимъ образомъ, что относительно паръ, образованныхъ соединенiемъ любыхъ двухъ такихъ точекъ, можно утверждать, что нѣтъ ни одной точки ни въ многообразiи точекъ ab, ни въ многообразiи точекъ ac, которая не входила-бы въ одну изъ этихъ паръ, и что нѣтъ также ни одной точки, которая-бы входила въ двѣ или болѣе пары.

§ 21.

Только на томъ основанiи, что два многообразiя A и B находятся другъ къ другу въ такомъ отношенiи, что къ каждой части a, находящейся въ A, поступая по извѣстному правилу, мы можемъ найти находящуюся въ B часть b такъ, что всѣ пары $(a+b)$, которыя мы составимъ такимъ образомъ, заключаютъ въ себѣ каждую вещь, находящуюся въ A и въ B и заключаютъ ее только по одному разу,—на одномъ только этомъ основанiи невозможно еще заключить, какъ видимъ, что эти оба многообразiя, если они безконечны, равны другъ другу въ отношенiи множества своихъ частей (т. е. если мы не примемъ во вниманiе никакихъ другихъ различiй между частями). Однако, несмотря на это отношенiе между ними, которое само по себѣ, во всякомъ случаѣ, представляется одинаковымъ для обоихъ многообразiй, они могутъ находиться въ отношенiи неравенства своихъ множествъ, такъ что одно изъ нихъ можетъ представлять цѣлое, а другое—его часть. О равенствѣ этихъ множествъ можно будетъ заключить только тогда, когда для этого будетъ существовать еще какое-нибудь другое основанiе, какъ, напримѣръ, то, что оба многообразiя имѣютъ совершенно одинаковыя опредѣляющiя ихъ основанiя, напримѣръ, совершенно одинаковое происхожденiе.

§ 22.

Парадоксальность, связанная (чего я вовсе не отрицаю) съ этимъ утвержденiемъ, проистекаетъ единственно изъ того обстоятельства, что взаимное отношенiе, которое мы находимъ въ двухъ сравниваемыхъ между собою многообразiяхъ, и которое состоитъ въ томъ, что мы можемъ соединить ихъ части въ пары по способу, уже многократно указанному,—что это взаимное отношенiе въ томъ случаѣ, когда эти многообразія конечны, совершенно достаточно для того, чтобы признать ихъ вполнѣ равными въ отношеніи множества ихъ частей. Дѣйствительно, два конечныхъ многообразія такого свойства, что для каждой вещи a одного многообразія можно найти вещь b въ другомъ и соединить ихъ въ пары такимъ образомъ, чтобы не осталось ни въ одномъ изъ обоихъ многообразій ни одной вещи, для которой не нашлось-бы соотвѣтствующей въ другомъ, и чтобы не было ни одной вещи, которая входила-бы въ двѣ или нѣсколько паръ,—два такихъ многообразія въ отношеніи множества всегда равны между собой. Поэтому кажется, что то же должно имѣть мѣсто, если многообразія будутъ безконечны.

Такъ, кажется, говорю я; но при ближайшемъ разсмотрѣніи обнаруживается, что это вовсе не является необходимымъ, такъ какъ основаніе, почему это всегда такъ во всѣхъ конечныхъ многообразіяхъ, заключается, именно, только въ конечности ихъ и, слѣдовательно, отпадаетъ для многообразій безконечныхъ. Дѣйствительно, положимъ, что два многообразія A и B конечны или (такъ какъ и этого уже достаточно), что мы знаемъ объ одномъ изъ нихъ A, что оно конечно, и, положимъ также, мы не обращаемъ вниманія ни на какія различія между вещами ихъ составляющими, съ цѣлью разсмотрѣть эти многообразія только въ отношеніи ихъ множествъ. Тогда, обозначивъ любой предметъ въ многообразіи A черезъ 1, какой-нибудь другой черезъ 2 и продолжая такимъ образомъ дальше, то есть, обозначая каждый послѣдующій всегда числомъ вещей, разсмотрѣнныхъ раньше (со включеніемъ его самого), мы должны будемъ дойти наконецъ до предмета въ A, послѣ обозначенія котораго не останется больше ни одного, не обозначеннаго. Это есть непосредственное слѣдствіе понятія о множествѣ конечномъ или исчислимомъ. Если этотъ послѣдній предметъ въ A, о которомъ мы только что говорили, получилъ для своего обозначенія число n, то число вещей въ A будетъ равно n. Такъ какъ для каждой вещи въ A должна находиться вещь въ B, которую можно соединить съ ней въ пару, то, обозначивъ каждую вещь въ B тѣмъ самымъ символомъ, которымъ обозначили въ A ту вещь, съ которой вещь B соединяется въ одну пару, мы необходимо должны прійти къ тому, что число вещей, взятыхъ нами такимъ образомъ изъ B, также будетъ n, при чемъ каждая изъ нихъ снабжена знакомъ, дающимъ возможность узнать, сколько мы до нея

3

употребили вещей. Отсюда ясно, что въ B вещей не меньше, чѣмъ n, ибо этимъ знакомъ отмѣчена одна вещь (та, которую мы употребили послѣдней). Но ихъ будетъ также и не больше, потому что, если-бы была хотя еще одна сверхъ уже употребленныхъ, то не было-бы такой вещи въ A, съ которой можно было-бы соединить ее въ пару,—а это противорѣчитъ предположенію. Итакъ, число вещей въ B не меньше и не больше, чѣмъ n, слѣдовательно, равно n. Оба многообразія имѣютъ, значитъ, одно и то же множество, или, какъ еще можно выразиться, равное множество. Очевидно, что это заключеніе не имѣетъ мѣста, какъ только многообразіе вещей въ A безконечно, потому что въ такомъ случаѣ не только мы, считающіе, не дойдемъ никогда до послѣдней вещи въ A, но, по опредѣленію безконечнаго многообразія, такая послѣдняя вещь въ A сама по себѣ не существуетъ, т. е. сколько бы мы не означали вещей въ A, все еще останутся другія для обозначенія. Поэтому, несмотря на то, что въ многообразіи B никогда не будетъ недостатка въ вещахъ, которыя могли-бы быть соединены все въ новыя и новыя пары съ вещами многообразія A, исчезнетъ, однако, всякое основаніе къ заключенію, что множество обоихъ многообразій одно и то же.

§ 23.

Изъ сказаннаго только что ясно, что для безконечныхъ многообразій исчезаетъ основаніе, обуславливающее необходимое равенство конечныхъ многообразій, какъ только имѣетъ мѣсто то отношеніе, о которомъ мы много разъ говорили. Но сказанное не указываетъ намъ, какимъ образомъ и вслѣдствіе чего является неравенство въ безконечныхъ многообразіяхъ. Это становится яснымъ только послѣ разсмотрѣнія приведенныхъ примѣровъ. Они именно учатъ насъ тому, что взятыя изъ сравниваемыхъ многообразій двѣ части a и b, которыя мы соединяемъ въ пару $a+b$, входятъ въ свои многообразія не вполнѣ одинаковымъ образомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если части a' и b' образуютъ еще одну, вторую пару, и если мы сравнимъ отношенія, въ которыхъ находятся a и a' въ многообразіи A, b и b' въ многообразіи B, то тотчасъ-же окажется, что эти отношенія различны. Если мы возьмемъ (въ первомъ примѣрѣ) изъ многообразія величинъ, содержащихся между 0 и 5, совершенно произвольно, двѣ величины, напримѣръ, 3 и 4, то величины, соотвѣтствующія имъ въ B (т. е. образующія съ ними пары), будутъ слѣдующія:

$$\tfrac{12}{5}\cdot 3 \text{ и } \tfrac{12}{5}\cdot 4, \text{ т. е. } 7\tfrac{1}{5} \text{ и } 9\tfrac{3}{5}.$$

Если мы правильно понимаемъ подъ отношеніемъ двухъ предметовъ совокупность всѣхъ свойствъ, обнаруживающихся при ихъ соединеніи, то при разсмотрѣніи отношенія, въ которомъ находятся въ одномъ многообразіи части 3 и 4, въ другомъ—части $7\frac{1}{5}$ и $9\frac{3}{5}$, мы должны обратить вниманіе не только на такъ называемое геометрическое отношеніе, но и на все, сюда относящееся, а именно также и на то, что ариѳметическое отношеніе между величинами 3 и 4 совершенно иное, чѣмъ между величинами $7\frac{1}{5}$ и $9\frac{3}{5}$, а именно—первое равно 1, второе $2\frac{2}{5}$. Итакъ, хотя каждая величина въ A или въ B можетъ соединиться въ пару съ одной, и только съ одной, величиной въ B или въ A, но однако множество величинъ въ B иное (бо́льше), чѣмъ въ A, потому что разстояніе между двумя любыми величинами въ B будетъ инымъ (бо́льше), чѣмъ разстояніе, раздѣляющее двѣ соотвѣтствующія имъ величины въ A. Отсюда, естественно, слѣдуетъ, что въ промежуткѣ каждыхъ двухъ величинъ въ B содержится другое (бо́льшее) количество величинъ, чѣмъ это имѣетъ мѣсто въ A; такимъ образомъ, нѣтъ ничего удивительнаго, что и все количество величинъ въ B другое (бо́льше), чѣмъ въ A.—Во второмъ примѣрѣ мы имѣемъ случай совершенно сходный съ первымъ; поэтому мы скажемъ о немъ только то, что точки въ ab, составляющія пары съ точками въ ac, стоятъ другъ къ другу ближе, чѣмъ соотвѣтственныя точки въ ac, такъ какъ разстояніе любыхъ двухъ точекъ перваго отрѣзка всегда относится къ разстоянію соотвѣтственныхъ двухъ точекъ второго отрѣзка, какъ $ab : ac$.

§ 24.

Если мы можемъ считать теперь вполнѣ доказаннымъ и разъясненнымъ предложеніе § 20, то ближайшимъ слѣдствіемъ его является то, что мы не можемъ считать сейчасъ-же равными двѣ суммы величинъ, которыя попарно равны (т. е. каждая величина изъ одной суммы равна нѣкоторой величинѣ изъ другой), если ихъ множество безконечно. Это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда мы заранѣе убѣдились въ томъ, что безконечное множество этихъ величинъ въ обѣихъ суммахъ то-же самое. Что сумма опредѣляется своими слагаемыми и что, слѣдовательно, равныя слагаемыя даютъ равныя суммы, это конечно безспорно и имѣетъ мѣсто не только тогда, когда многообразіе этихъ слагаемыхъ конечно, но и тогда, когда оно безконечно. Но такъ какъ безконечныя многообразія бываютъ различны, то въ послѣднемъ случаѣ должно быть также доказано, что безконечное многообразіе слагаемыхъ въ одной суммѣ въ точности таково-же, какъ и въ другой. Но, чтобы имѣть право сдѣлать это заключеніе, недостаточно ни въ какомъ случаѣ, по нашей теоремѣ, только того обстоятельства, что можно будетъ найти по какому нибудь способу для каждаго члена одной суммы равный ему членъ другой суммы. Мы можемъ сдѣлать это заключеніе съ полной увѣренностью только тогда, когда оба многообразія имѣютъ одинаковыя опредѣляющія ихъ основанія. Впослѣдствіи мы увидимъ на нѣсколькихъ примѣрахъ, къ какимъ несообразностямъ можно прійти при вычисленіяхъ съ безконечностями, если не принять этого въ разсчетъ.

§ 25.

Я обращаюсь теперь къ утвержденію, что существуетъ безконечное не только среди вещей, не имѣющихъ дѣйствительности, но также и въ самой области дѣйствительнаго. Кто только пришелъ къ чрезвычайно важному убѣжденію (помощью ли ряда заключеній изъ истинъ, касающихся чистыхъ понятій, или другимъ какимъ-либо образомъ), что существуетъ Богъ, существо, не имѣющее причины своего бытія ни въ какомъ другомъ существѣ и, вслѣдствіе этого, всесовершенное, т. е. соединяющее въ себѣ всѣ совершенства и силы, которыя только могутъ совмѣщаться, и каждую изъ нихъ въ самой высшей степени, въ какой только она можетъ существовать наряду съ другими—кто пришелъ къ этому убѣжденію, тотъ принимаетъ уже этимъ самымъ, что есть существо, безконечное не въ одномъ только отношеніи, въ своемъ вѣдѣніи, въ своей волѣ, въ своемъ внѣшнемъ воздѣйствіи, т. е. могуществѣ, такое существо, которое безконечно много знаетъ (совокупность всѣхъ истинъ), безконечно многаго желаетъ (сумму всего въ себѣ возможнаго добра), и все, чего только хочетъ, силою внѣшняго воздѣйствія, осуществляетъ въ дѣйствительности. Изъ этого послѣдняго свойства Бога вытекаетъ дальнѣйшее слѣдствіе, что, кромѣ него, существуютъ существа созданныя, которыя мы назовемъ, въ противоположность ему, существами конечными, въ которыхъ, однако, можно усмотрѣть нѣчто безконечное. Въ самомъ дѣлѣ, уже самое многообразіе этихъ существъ должно быть безконечнымъ; точно также многообразіе состояній, испытываемыхъ каждымъ изъ этихъ существъ въ отдѣльности, хотя-бы въ самое короткое время, должно быть безконечно (потому что каждый промежутокъ времени содержитъ въ себѣ безконечно много мгновеній) и т. д. Итакъ, и въ области дѣйствительнаго мы встрѣчаемъ вездѣ безконечное.

§ 26.

Не согласны съ этимъ, однако, даже многіе изъ тѣхъ ученыхъ, которые не находятъ возможнымъ отрицать безконечность въ вещахъ недѣйствительныхъ (какъ, напримѣръ, въ предложеніяхъ и истинахъ въ себѣ). Допустить безконечность также и въ области дѣйствительнаго, это, по ихъ мнѣнію, запрещается древнимъ основнымъ положеніемъ, по которому все дѣйствительное должно имѣть полную опредѣленность. Однако, я считаю уже доказаннымъ въ «Wissenschaftslehre» (Bd. 1 § 45), что это основное положеніе относится и къ предметамъ недѣйствительнымъ въ томъ-же смыслѣ, какъ и къ дѣйствительнымъ. Оно справедливо вездѣ только въ томъ смыслѣ, что изъ двухъ противорѣчащихъ другъ другу свойствъ у каждаго предмета одно должно ему принадлежать, а наличность другого должна отрицаться. Поэтому, если бы утвержденіе, что мы совершаемъ погрѣшность противъ этого положенія, допуская безконечность вещей дѣйствительныхъ, было обосновано,—мы бы не имѣли права говорить о безконечности даже въ случаѣ недѣйствительныхъ объектовъ нашего мышленія, слѣдовательно, мы-бы не могли допускать безконечнаго многообразія истинъ въ себѣ или простыхъ чиселъ. Но тѣмъ только, что мы признаемъ нѣчто безконечнымъ, мы не противорѣчимъ еще вышеприведенному основному положенію. Мы говоримъ только, что въ данномъ предметѣ, въ извѣстномъ отношеніи, существуетъ множество частей бо́льшее, чѣмъ какое угодно число, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, такое множество, которое невозможно опредѣлить просто числомъ. Отсюда, однако, вовсе не слѣдуетъ, чтобы это множество было чѣмъ-то, не поддающимся никоимъ образомъ опредѣленію; вовсе не слѣдуетъ также, чтобы существовала хоть одна пара свойствъ, противорѣчащихъ другъ другу, *b* и не-*b*, и чтобы ни одно изъ нихъ не было присуще этому множеству. Что́ не имѣетъ цвѣта, напримѣръ, предложеніе, не можетъ быть и опредѣлено указаніемъ цвѣта; что́ не издаетъ никакого тона, не можетъ быть опредѣлено указаніемъ тона и т. д. Но отсюда вовсе не слѣдуетъ, чтобы подобныя вещи были неопредѣлимы; онѣ и не составляютъ исключенія изъ того основного положеженія, что одинъ изъ предикатовъ, *b* или не-*b* (голубой или неголубой, благозвучный или неблагозвучный и т. д.), относятся къ каждой вещи, если только мы эти предикаты понимаемъ такъ, какъ слѣдуетъ, т. е. такъ, чтобы они остались противорѣчивыми. Совершенно такъ, какъ не голубое и не благовонное является опредѣленіемъ (правда, очень широкимъ) теоремы Пиѳагора, такъ и простое указаніе того, что многообразіе точекъ между *m* и *n* безконечно, является однимъ изъ опредѣленій этого многообразія. И часто нѣтъ надобности во многихъ данныхъ для того, чтобы вполнѣ опредѣлить подобное безконечное многообразіе вещей, т. е. такъ, чтобы в с ѣ его свойства сами собой вытекали изъ тѣхъ именно нѣсколькихъ, которыя даны. Такъ, мы опредѣлили самымъ совершеннымъ образомъ только-что упомянутое безконечное многообразіе точекъ между *m* и *n*, какъ скоро мы опредѣлили только двѣ точки *m* и *n* (напримѣръ, наглядно). Ибо этими немногими словами уже устанавливается дизъюнкція между принадлежностью или непринадлежностью къ этому многообразію всякой другой точки.

§ 27.

Если я имѣлъ смѣлость въ предыдущемъ защищать существованіе безконечнаго въ нѣкоторыхъ случаяхъ противъ лицъ, оспаривающихъ его, то теперь я долженъ признать съ тою же откровенностью, что многіе ученые, особенно м а т е м а т и к и, зашли слишкомъ далеко въ сторону противоположную, принимая б е з к о н е ч н о б о л ь ш о е и б е з к о н е ч н о м а л о е въ такихъ случаяхъ, когда, по моему глубокому убѣжденію, не существуетъ ни того, ни другого.

1. Я не имѣю ничего возразить противъ допущенія б е з к о н е ч н о б о л ь ш о г о періода времени, если разумѣть подъ этимъ періодъ, не имѣющій начала или конца, или ни того, ни другого (слѣдовательно, все время или совокупность всѣхъ точекъ времени вообще). Но о т н о ш е н і е, которое имѣетъ величина одного раз-

стоянія между двумя точками времени, или одного промежутка времени къ каждому другому разстоянію между двумя точками времени, или къ каждому другому промежутку времени, я нахожу нужнымъ признать только конечнымъ отношеніемъ величинъ, вполнѣ опредѣляемымъ съ помощью однихъ понятій, и потому не нахожу возможнымъ предположить, что промежутокъ времени, ограниченный началомъ и концомъ, въ безконечное число разъ больше или меньше другого подобнаго промежутка. А это именно и дѣлаютъ, какъ извѣстно, многіе математики, говоря не только о безконечно большихъ промежуткахъ времени, ограниченныхъ при этомъ съ обѣихъ сторонъ, но и еще чаще о безконечно малыхъ частяхъ времени, въ сравненіи съ которыми каждый конечный промежутокъ времени, напримѣръ, одна секунда, долженъ быть признанъ безконечно большимъ.

2. То-же самое слѣдуетъ сказать о разстояніяхъ между двумя точками въ пространствѣ, которыя, по моему мнѣнію, могутъ быть другъ къ другу всегда только въ отношеніи конечномъ (опредѣляемомъ вполнѣ съ помощью чистыхъ понятій). Между тѣмъ нѣтъ ничего болѣе обыкновеннаго у нашихъ математиковъ, какъ рѣчь о безконечно большихъ и безконечно малыхъ разстояніяхъ.

3. То-же самое слѣдуетъ наконецъ сказать о принимаемыхъ въ метафизикѣ и физикѣ силахъ, дѣйствующихъ во вселенной. Мы не должны предполагать, чтобы одна изъ этихъ силъ была въ безконечное число разъ больше или меньше, чѣмъ другая; напротивъ того, мы должны думать, что всѣ онѣ находятся между собой въ отношеніяхъ, вполнѣ опредѣляемыхъ посредствомъ понятій, какъ бы часто ни позволяли себѣ дѣлать обратное. Я не могу, конечно, съ достаточной ясностью указать здѣсь основанія этого утвержденія тому, кому не извѣстно, какія понятія я связываю со словами: возрѣніе и понятіе, выводимость одного предложенія изъ другого, объективный выводъ одной истины изъ другихъ, и многими другими словами, а также опредѣленіе времени и пространства. Кто, однако, прочелъ, по крайней мѣрѣ, двѣ статьи: «Опытъ объективнаго обоснованія ученія о сложеніи силъ»*) и «Опытъ объективнаго обоснова-

*) «Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte». (Prag 1842. In Commission bei Kronberger & Rziwnas).

нія ученія о трехъ измѣреніяхъ пространства», *) тому не покажется вполнѣ непонятнымъ слѣдующее доказательство.

Изъ опредѣленій времени и пространства слѣдуетъ непосредственно, что всѣ субстанціи зависимыя, т. е. созданныя, находятся въ безпрестанномъ взаимодѣйствіи; а также, что для каждыхъ двухъ точекъ времени α и β, какъ-бы близко или далеко другъ отъ друга онѣ ни отстояли, возможно разсматривать состояніе вселенной въ предыдущій моментъ α, какъ причину, а состояніе вселенной въ послѣдующій моментъ β, какъ слѣдствіе (по крайней мѣрѣ, не непосредственное), однако постольку, поскольку мы при этомъ отнесемъ къ причинѣ непосредственное воздѣйствіе Бога, которое могло имѣть мѣсто въ промежутокъ времени $\alpha\beta$. Отсюда слѣдуетъ дальше, что разъ даны обѣ точки времени α и β, всѣ силы, которыя имѣли созданныя субстанціи въ точкѣ времени α, мѣста нахожденія каждой субстанціи, наконецъ, даны божественныя вліянія, которыя испытала одна или другая изъ этихъ субстанцій внутри промежутка времени $\alpha\beta$,—то силы, которыя получили эти субстанціи въ точкѣ времени β, а также мѣста, которыя эти субстанціи заняли, могутъ быть выведены такимъ-же образомъ, какъ выводится дѣйствіе (непосредственное или черезъ посредство) изъ своей полной причины. Это-же опять требуетъ, чтобы всѣ свойства дѣйствія могли быть выведены изъ свойствъ причины съ помощью составленной изъ однихъ чистыхъ понятій большой посылки слѣдующаго вида: «каждая причина, обладающая свойствами u, u', u''..., имѣетъ дѣйствіе, обладающее свойствами w, w', w''... Отсюда легко вывести слѣдствіе, нужное для нашей цѣли: каждое обстоятельство въ причинѣ, не безразличное для дѣйствія, т. е. обстоятельство такого рода, что при его измѣненіи дѣйствіе не остается безъ измѣненія, должно быть вполнѣ опредѣлимо при помощи однихъ понятій, при чемъ въ основаніе могутъ быть положены въ крайнемъ случаѣ лишь такія воззрѣнія, которыя также необходимы для опредѣленія дѣйствія.

Послѣ этихъ предпосылокъ легко обосновать выше установленныя утвержденія. Дѣйствительно:

---

*) «Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes». (Prag 1843. In Commission bei Kronberger und Rziwnas).

1. если бы имѣлись даже только двѣ точки времени α и β, разстояніе которыхъ другъ отъ друга было-бы въ безконечное число разъ больше или меньше, чѣмъ разстояніе двухъ другихъ точекъ γ и δ, то отсюда вытекала-бы та несообразность, что рѣшительно невозможно было-бы опредѣлить состояніе вселенной, которое должно наступить въ моментъ β, по тому ея состоянію, которое имѣло мѣсто въ моментъ α, если даже принять при этомъ въ разсчетъ божественныя вліянія за промежутокъ времени $\alpha\beta$ и величину этого промежутка. Далѣе, для опредѣленія состоянія, въ которомъ находятся созданныя существа, и даже только для опредѣленія величины ихъ силъ въ моментъ α, необходимо положить въ основаніе особую единицу времени; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ эти силы только силы измѣняющія, то мы не можемъ опредѣлить иначе величину ихъ, какъ принявъ во вниманіе нѣкоторый данный промежутокъ времени, въ теченіе котораго онѣ производятъ данное дѣйствіе. Слѣдовательно, если мы примемъ (имѣя на это право) промежутокъ времени $\gamma\delta$ за эту единицу времени, то, даже въ самомъ благопріятномъ случаѣ, т. е. если бы возможно было опредѣлить при этой единицѣ времени всѣ силы созданныхъ субстанцій въ точкѣ времени α, и если бы возможно было опредѣлить совершенно точно все другое, что составляетъ полную причину состоянія вселенной въ точкѣ времени β, то, однако, невозможно-бы было, пользуясь этой единицей времени, опредѣлить разстояніе, въ которомъ находится эта точка времени отъ α, такъ какъ оно оказалось-бы безконечно большимъ или безконечно малымъ. Поэтому, если можно наоборотъ разсматривать любое состояніе вселенной (при нѣсколько разъ уже упомянутыхъ выше условіяхъ), какъ причину любого позднѣйшаго, то не могутъ существовать двѣ точки времени α и β, разстояніе которыхъ было-бы безконечно большимъ или безконечно малымъ въ сравненіи съ разстояніемъ, въ которомъ находится другая пара γ и δ.

2. Если бы были даны только двѣ точки въ пространствѣ a и b, разстояніе которыхъ другъ отъ друга въ сравненіи съ разстояніемъ другой пары c и d, оказалось-бы безконечно большимъ или безконечно малымъ, то въ опредѣленіе состоянія вселенной въ любой точкѣ времени α, входило бы между прочимъ опредѣленіе величины силы (напримѣръ, притяженія или отталкиванія), съ которой дѣйствуетъ въ этотъ моментъ времени находящаяся въ точкѣ a суб-

станція A на находящуюся въ точкѣ b субстанцію B. Это, однако, оказалось-бы невозможнымъ для этой силы, если бы мы приняли (что, во всякомъ случаѣ, позволительно) разстояніе cd за единицу, и если бы даже, въ самомъ благопріятномъ случаѣ, это могло быть сдѣлано для всѣхъ прочихъ силъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы сила притяженія или отталкиванія, съ которой субстанція A дѣйствуетъ на субстанцію, вполнѣ впрочемъ сходную съ субстанціей B, но находящуюся въ разстояніи, принятомъ за единицу длины (cd), имѣла даже совершенно опредѣленную величину, то, именно вслѣдствіе ея опредѣленности, сила притяженія или отталкиванія, съ которой A дѣйствуетъ на B, была-бы неопредѣленной, если бы отношеніе разстояній $ab:cd$, отъ котораго она во всякомъ случаѣ зависитъ, было безконечнымъ и потому неопредѣленнымъ.

3. Если бы, наконецъ, была только одна сила k, которая, по сравненію съ другой силой l, оказалась-бы безконечно большой или безконечно малой, и если бы мы обозначили точку времени, въ которой имѣетъ мѣсто это отношеніе черезъ α, то для этой самой точки времени въ самомъ благопріятномъ случаѣ, именно, если-бы всѣ остальныя силы при выбранныхъ для ихъ измѣренія единицахъ времени и пространства оказались конечными, причемъ, слѣдовательно, и l была-бы величиной конечной,—величина k, именно вслѣдствіе этого, оказалась-бы безконечно большой или безконечно малой, т. е. неопредѣлимой. Но вслѣдствіе этого все состояніе вселенной въ точкѣ времени α оказалось-бы неопредѣлимымъ; поэтому невозможнымъ оказалось-бы вывести позднѣйшее состояніе вселенной, какъ результатъ дѣйствія перваго.

§ 28.

Мнѣ кажется, что я установилъ уже въ предыдущемъ основныя правила, которыя дадутъ возможность судить правильно о всѣхъ тѣхъ странныхъ ученіяхъ, которыя намъ прійдется изложить ниже, а также рѣшить, слѣдуетъ-ли намъ отбросить эти ученія, какъ заблужденія, или принять ихъ, признавъ ихъ истинность, несмотря на всю ихъ кажущуюся несообразность. Порядокъ, въ которомъ мы будемъ приводить эти парадоксы, будетъ опредѣляться научной областью, къ которой они принадлежатъ, и ихъ большей или меньшей важностью.

Первая и самая обширная наука, въ области которой мы встрѣчаемъ парадоксы безконечнаго, это, какъ намъ показали уже нѣкоторые примѣры, есть общее ученіе о величинахъ, гдѣ нѣтъ недостатка въ парадоксахъ даже въ ученіи о числахъ. Съ нихъ мы и начнемъ.

Уже само понятіе исчисленія безконечности, я признаю это, кажется заключающимъ въ себѣ противорѣчіе. Дѣйствительно, исчислить—значитъ попытаться опредѣлить съ помощью чиселъ. Но какъ-же возможно пытаться опредѣлить съ помощью чиселъ безконечное, тó безконечное, которое, по нашему собственному опредѣленію, должно представлять изъ себя нѣчто, состоящее изъ безконечно многихъ частей, т. е. такое многообразіе, которое больше всякаго числа, и которое, поэтому, не можетъ быть опредѣлено никакимъ числомъ? Это сомнѣніе исчезнетъ однако, какъ только мы сообразимъ, что правильное исчисленіе безконечнаго имѣетъ цѣлью не вычисленіе того, что въ безконечности неопредѣлимо никакимъ числомъ (а именно, не вычисленіе безконечнаго множества самого въ себѣ): цѣлью этого исчисленія является опредѣленіе отношенія между однимъ безконечнымъ и другимъ, что выполнимо въ извѣстныхъ случаяхъ, какъ мы это покажемъ на многихъ примѣрахъ.

§ 29.

Кто признаетъ существованіе безконечныхъ множествъ, а слѣдовательно, и безконечныхъ величинъ вообще, тотъ не станетъ оспаривать существованія безконечныхъ величинъ, очень различныхъ по размѣрамъ. Если мы изобразимъ, напримѣръ, рядъ натуральныхъ чиселъ такимъ образомъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots n,\ n+1, \ldots \text{ in inf.},$$

то изображеніе

$$1+2+3+4+\ldots\ldots+n+(n+1)+\ldots\ldots \text{ in fnf.},$$

будетъ представлять сумму этихъ натуральныхъ чиселъ; слѣдующее же изображеніе

$$1^0+2^0+3^0+4^0+\ldots n^0+(n+1)^0+\ldots \text{ in inf.}$$

въ которомъ отдѣльныя слагаемыя 1^0, 2^0, 3^0 ... суть простыя единицы, представляетъ просто количество или число всѣхъ натуральныхъ чиселъ. Если мы обозначимъ его черезъ $\overset{o}{N}$, составивъ такимъ образомъ чисто символическое равенство

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots\ldots + n^0 + (n+1)^0 + \ldots \text{ in inf.} = \overset{o}{N} \ldots (1),$$

и обозначимъ подобнымъ-же образомъ количество натуральныхъ чиселъ отъ $(n+1)$ чрезъ $\overset{n}{N}$, составивъ такимъ образомъ равенство

$$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + \ldots \text{ in inf.} = \overset{n}{N} \ldots . (2),$$

то мы получимъ, при посредствѣ отниманія, совершенно безупречное равенство

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n = \overset{o}{N} - \overset{n}{N} \ldots . (3),$$

изъ котораго мы видимъ, какъ иногда двѣ безконечныя величины $\overset{o}{N}$ и $\overset{n}{N}$ имѣютъ совершенно опредѣленную конечную разность.

Если-же мы обозначимъ величину, которая представляетъ с у м м у всѣхъ натуральныхъ чиселъ, черезъ $\overset{o}{S}$ или составимъ просто символическое равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n + (n+1) + \ldots \text{ in inf.} = \overset{o}{S} \ldots\ldots (4),$$

то мы тотчасъ-же поймемъ, что $\overset{o}{S}$ должно быть много больше, чѣмъ $\overset{o}{N}$; но не такъ легко удается точно опредѣлить разность между этими двумя безконечными величинами или ихъ (геометрическое) о т н о ш е н і е другъ другу. Дѣйствительно, если мы составимъ, какъ это дѣлали нѣкоторые, равенство.

$$\overset{o}{S} = \frac{\overset{o}{N}.\ (\overset{o}{N} + 1)}{2}$$

то для оправданія его врядъ-ли нашлось-бы у насъ другое основаніе, кромѣ того, что при каждомъ конечномъ числѣ членовъ справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,.\,(n+1)}{2}$$

откуда, повидимому, слѣдуетъ, что, въ случаѣ безконечнаго количества чиселъ, *n* переходитъ только въ $\overset{o}{N}$. Однако, на самомъ дѣлѣ, это не такъ, потому что было-бы безсмысленно, въ случаѣ безконечнаго ряда, говорить о его послѣднемъ членѣ, имѣющемъ значеніе $\overset{o}{N}$.

Положивъ-же въ основаніе символическое равенство (4), послѣдовательнымъ умноженіемъ обѣихъ его частей на $\overset{o}{N}$, можно конечно вывести слѣдующія равенства:

$$1^0.\,\overset{o}{N} + 2^0.\,\overset{o}{N} + 3^0\,\overset{o}{N} + \ldots \text{ in inf.} = (\overset{o}{N})^2,$$

$$1^0.\,(\overset{o}{N})^2 + 2^0.\,(\overset{o}{N})^2 + 3^0.\,(\overset{o}{N})^2 + \ldots \text{in inf.} = (\overset{o}{N})^3 \text{ и т. д.}$$

Изъ этого мы видимъ, что существуютъ безконечныя величины такъ называемыхъ высшихъ порядковъ, изъ которыхъ одна превосходитъ другую въ безконечное число разъ. Существованіе безконечныхъ величинъ, имѣющихъ раціональное, также какъ и ирраціональное отношеніе $\alpha:\beta$, вытекаетъ уже изъ того, что, поскольку $\overset{o}{N}$ означаетъ неизмѣнную безконечную величину, постольку $\alpha.\overset{o}{N}$ и $\beta.\overset{o}{N}$ представляютъ пару безконечныхъ величинъ, находящихся въ отношеніи $\alpha:\beta$.

Не менѣе яснымъ окажется и то, что все многообразіе (множество) величинъ, находящихся между двумя данными величинами, напримѣръ, между 7 и 8, хотя оно и безконечно и не можетъ быть вслѣдствіе этого опредѣлено никакимъ числомъ, какъбы велико послѣднее ни было, зависитъ однако единственно отъ величины разстоянія этихъ двухъ крайнихъ величинъ, т. е. зависитъ отъ величины 8—7 и должно быть вслѣдствіе этого одинаковымъ, какъ только это разстояніе одинаково. Въ этомъ предположеніи, если обозначить количество всѣхъ величинъ, лежащихъ между a и b черезъ

$$\text{Mult. } (b - a),$$

то получатся безчисленныя равенства слѣдующаго вида:

$$\text{Mult. } (8 - 7) = \text{Mult. } (13 - 12),$$

а также и слѣдующаго:

$$\text{Mult. } (a - b) : \text{Mult. } (d - c) = b - a : d - c,$$

противъ правильности которыхъ нельзя возразить ничего основательнаго.

§ 30.

Эти немногіе примѣры показали уже въ достаточной степени, что существуетъ исчисленіе безконечно большого; точно также существуетъ и исчисленіе безконечно малаго. Въ самомъ дѣлѣ, если $\overset{\circ}{N}$ представляетъ величину безконечно большую, то

$$\frac{1}{\overset{\circ}{N}}$$

будетъ, безспорно, представлять величину безконечно малую, и не будетъ никакого основанія къ тому, чтобы считать подобное представленіе безпредметнымъ, по крайней мѣрѣ въ общемъ ученіи о величинахъ. Возьмемъ одинъ только примѣръ. Пусть будетъ поставленъ слѣдующій вопросъ: если кто-нибудь стрѣляетъ на удачу, то какова вѣроятность, чтобы центръ пули на пути своемъ прошелъ точно черезъ центръ того яблока, которое виситъ на этомъ деревѣ. Каждый долженъ признать, что многообразіе всѣхъ возможныхъ здѣсь случаевъ, отвѣчающихъ подобной или еще меньшей вѣроятности, будетъ безконечно, откуда слѣдуетъ, что степень этой вѣроятности имѣетъ величину, которая $=$ или $< \frac{1}{\infty}$. Этимъ уже доказано существованіе безконечнаго количества безконечно малыхъ величинъ, взаимныя отношенія которыхъ могутъ быть какія угодно, а именно: одна безконечно малая величина можетъ быть больше другой безконечно малой величины въ безконечно большое число разъ. Поэтому, какъ между безконечно большими, такъ и между безконечно малыми величинами, существуетъ безконечно много порядковъ, и, при соблюденіи извѣстныхъ правилъ, будетъ, конечно, возможно найти нѣкоторыя правильныя равенства между величинами этого рода.

Пусть будетъ, напримѣръ, установлено, что значеніе перемѣнной величины y зависитъ отъ другой величины x такимъ образомъ, что между ними всегда имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Если природѣ того особеннаго рода величинъ, которыя обозначены здѣсь черезъ x и y не противорѣчитъ то обстоятельство, что онѣ могутъ сдѣлаться безконечно малыми и получать, слѣдовательно, безконечно малыя приращенія, то увеличивъ x на безконечно малую часть, которую мы обозначимъ черезъ dx, и обозначивъ черезъ dy измѣненіе, которое получаетъ вслѣдствіе этого y, мы поймемъ, что въ такомъ случаѣ необходимо будетъ имѣть мѣсто слѣдующее равенство:

$$y + dy = (x + dx)^4 + a\,(x + dx)^3 + b\,(x + dx)^2 + c\,(x + dx) + d,$$

изъ котораго безспорно вытекаетъ равенство:

$$\frac{dy}{dx} = (4\,x^3 + 3\,ax^2 + 2\,bx + c) + (6\,x^2 + 3\,ax + b)\,dx + \\ + (4\,x + a)\,dx^2 + dx^3,$$

которое представляетъ отношеніе обѣихъ безконечно малыхъ величинъ въ зависимости не только отъ a, b, c и x, но также отъ значенія перемѣнной dx.

§ 31.

Большинство математиковъ, которые рѣшились заниматься исчисленіемъ безконечнаго, пошло, однако, гораздо дальше, чѣмъ это возможно на основаніи установленныхъ здѣсь основныхъ положеній. Они не только позволяли себѣ предполагать, безъ дальнѣйшихъ размышленій, безконечно большое или безконечно малое въ величинахъ, съ природой которыхъ это предположеніе несогласно (примѣры чего мы приведемъ лишь впослѣдствіи), но даже величины, получаемыя отъ суммованія безконечнаго ряда, они позволяли себѣ—то считать равными, то считать одну большей, чѣмъ другую; и это только потому, что въ обѣихъ величинахъ можно указать попарно члены, находящіеся въ этомъ отношеніи равенства или неравенства, хотя ихъ многообразія были очевидно неравны. Они имѣли смѣлость утверждать, что нетолько исчезаетъ каждая безконечно малая величина въ сложеніи съ величиной конечной или каждая величина высшаго порядка при величинѣ низшаго порядка, но даже каждая безконечно большая величина низшаго порядка въ сложеніи наряду съ величиной высшаго порядка исчезаетъ подобно простому нулю. Чтобы оправдать, хотя-бы до нѣкоторой степени, свой методъ исчисленія, основанный на этомъ предложеніи, они стали утверждать, что можно принимать и нуль за дѣлителя, и что частное

$$\frac{1}{0}$$

означаетъ, въ сущности, не что иное, какъ безконечно большую величину, а частное $\frac{0}{0}$ величину совершенно неопредѣленную. Мы должны показать, насколько эти понятія ложны и какъ они вводятъ въ заблужденіе, потому что они еще и теперь болѣе или менѣе въ ходу.

§ 32.

Еще въ 1830 году въ Gergonne Annales de mathématique (T. 20. № 12) нѣкто, подписавшійся буквами M. R. S., пробовалъ доказать, что извѣстный безконечный рядъ

$$a - a + a - a + a - a + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

имѣетъ значеніе $\frac{a}{2}$. Предположивъ, что это значеніе $= x$, онъ счелъ себя въ правѣ заключить, что

$$x = a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.} = a - (a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.}),$$

и что рядъ, заключенный въ скобкахъ, тождественъ съ рядомъ, подлежащимъ вычисленію, и потому можетъ быть положенъ равнымъ x, что даетъ

$$x = a - x$$

и, слѣдовательно,

$$x = \frac{a}{2}.$$

Не трудно найти ошибку въ этомъ заключеніи. Рядъ въ скобкахъ представляетъ, очевидно, не то самое многообразіе членовъ, какъ рядъ, который былъ положенъ раньше равнымъ x; въ немъ недостаетъ перваго a. Поэтому, въ случаѣ, если бы вообще возможно было найти значеніе ряда, заключеннаго въ скобки, то его слѣдовало бы обозначить черезъ $x - a$, а это даетъ тождественное равенство

$$x = a + x - a.$$

На это можно было-бы возразить слѣдующее: «Въ этомъ-то «именно и лежитъ нѣчто парадоксальное, а именно въ томъ, что «этотъ рядъ, который несомнѣнно не безконечно великъ, оказы-«вается неимѣющимъ измѣримаго, поддающагося точному опредѣле-«нію значенія, и притомъ еще онъ происходитъ отъ продолженнаго «въ безконечность дѣленія a на $2 = 1 + 1$, а это происхожденіе «говоритъ въ пользу предположенія, что его настоящее значеніе «именно $\frac{a}{2}$.»

Я напомню, что нѣтъ ничего непонятнаго въ томъ, что существуютъ выраженія величинъ, не обозначающія никакой дѣйствительной величины; такъ, мы всѣ считаемъ и должны считать нуль такимъ выраженіемъ.

Если мы въ частности опредѣлимъ рядъ, только какъ величину, а именно, какъ сумму его членовъ, то, въ силу понятія о суммѣ (которая принадлежитъ къ многообразіямъ, т. е. къ такимъ совокупностямъ, въ которыхъ не должно обращать вниманія на порядокъ частей), этотъ рядъ долженъ обладать такимъ свойствомъ, что, какъ ни измѣнять порядокъ его членовъ, значеніе его не измѣнится. Для величинъ должно быть

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

Этотъ признакъ даетъ намъ ясное доказательство того, что изображеніе, о которомъ здѣсь говорится,

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.}$$

не будетъ изображеніемъ дѣйствительной величины. Въ самомъ дѣлѣ, мы не измѣнили-бы навѣрное ничего въ представленной здѣсь величинѣ, если бы только это была величина, измѣняя это изображеніе слѣдующимъ образомъ:

$$(1) \qquad (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \text{ in inf.},$$

такъ какъ здѣсь не произошло ничего другого, кромѣ соединенія въ частныя суммы каждыхъ двухъ членовъ, слѣдующихъ непосредственно другъ за другомъ; это-же навѣрное возможно, такъ какъ данный рядъ дѣйствительно не долженъ имѣть послѣдняго члена. Но такимъ образомъ мы получаемъ

$$0 + 0 + 0 + \cdots \text{ in inf.},$$

что очевидно равно 0.

Точно также ничто не можетъ измѣниться въ величинѣ, представляемой этимъ выраженіемъ, въ случаѣ, когда оно выражаетъ дѣйствительно нѣкоторую величину, если мы его преобразуемъ либо къ виду

$$(2) \qquad a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \ldots \text{ in inf.},$$

при чемъ, пропуская первый членъ, мы соединяемъ каждые два слѣдующіе въ частную сумму, либо къ виду

4

(3) $- a + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots$ in inf.,

что мы получимъ изъ выраженія (1), переставляя члены въ каждой парѣ и производя въ полученномъ выраженіи тѣ же измѣненія, посредствомъ которыхъ получилось (2) изъ (1). Если бы данное выраженіе не было безпредметнымъ, то выраженія (1), (2) и (3) должны были-бы обозначать всѣ одну и ту же величину, такъ какъ очевидно, что представленіе суммы одного и того-же многообразія величинъ не можетъ представлять нѣсколькихъ отличныхъ другъ отъ друга величинъ, какъ это имѣетъ мѣсто для выраженій $\sqrt{+1}$, arc Sin. $= \frac{1}{2}$ и во многихъ другихъ случаяхъ. Разсматриваемое здѣсь выраженіе

$$a - a + a - a + a - a \ldots \text{ in inf.},$$

если оно не вполнѣ безпредметно, съ такимъ-же правомъ, съ какимъ-бы мы хотѣли положить его равнымъ нулю (который, въ несобственномъ значеніи этого слова, тоже обыкновенно называютъ величиной), должно-бы быть также положено равнымъ $+ a$, а также и $- a$. Но это совершенно безсмысленно и даетъ намъ право заключить, что мы имѣемъ здѣсь предъ собой совершенно безпредметное выраженіе.

Справедливо, что рядъ, о которомъ мы говорили, получается отъ продолженнаго до безконечности дѣленія на $2 = 1 + 1$, но, именно потому, что это дѣленіе даетъ всегда остатокъ (здѣсь, попеременно, то $- a$, то $+ a$), всѣ ряды, которые получаются такимъ образомъ, только тогда представляютъ истинное значеніе частнаго (здѣсь $\frac{a}{2}$), когда остатки, получаемые при дальнѣйшемъ дѣленіи, становятся меньше каждой, сколь угодно малой величины, какъ это имѣетъ мѣсто для разсмотрѣннаго въ § 18 ряда $a + ae + ae^2 + \ldots$ in inf., который получается отъ дѣленія a на $1 - e$, при $e < 1$. Если-же, какъ въ разсматриваемомъ случаѣ, $e = 1$ или даже $e > 1$, такъ что остатки возрастаютъ тѣмъ болѣе, чѣмъ дольше продолжается дѣленіе, то нѣтъ ничего понятнѣе, какъ то, что невозможно значеніе ряда положить равнымъ частному $\frac{a}{1-e}$. Ибо какимъ образомъ можно было-бы, напримѣръ, положить $\frac{1}{11}$ равной знакоперемѣнному ряду

$$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + \ldots \text{ in inf.},$$

получаемому продолженнымъ въ безконечность дѣленіемъ 1 на $1 + 10$? Кто-бы захотѣлъ считать рядъ

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots \text{ in inf.},$$

составленный изъ однихъ положительныхъ членовъ, равнымъ отрицательной величинѣ $-\frac{1}{9}$, только потому, что разложеніе $\frac{1}{1-10}$ ведетъ къ этому ряду? Тѣмъ не менѣе, упомянутый выше M. R. S. защищаетъ и такія суммованія и хочетъ доказать, напримѣръ, справедливость равенства

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{3}$$

только на томъ основаніи, что

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots \\ &= 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots) = 1 - 2x. \end{aligned}$$

При этомъ упущено опять изъ виду, что рядъ, содержащійся въ скобкахъ, вовсе не тождественъ съ первоначальнымъ, такъ какъ онъ уже не имѣетъ того-же количества членовъ. Что это выраженіе также безпредметно, обнаруживается подобно тому, какъ и въ раньше разсмотрѣнномъ случаѣ, потому что и это выраженіе ведетъ къ противорѣчію. Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны, должно было-бы быть:

$$\begin{aligned} & 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots \\ &= 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + \ldots \\ &= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \ldots \end{aligned}$$

Съ другой стороны, также вѣрно, что разсматриваемое выраженіе

$$\begin{aligned} &= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + (64 - 128) + \ldots \\ &= -1 - 4 - 16 - 64 - \ldots \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, двумя правильными способами получается сперва безконечно большое положительное значеніе, затѣмъ безконечно большое отрицательное значеніе одного и того-же выраженія.

§ 33.

Итакъ, если мы не желаемъ впадать въ заблужденія въ нашихъ вычисленіяхъ безконечнаго, то мы не должны никогда позволять себѣ считать, что двѣ безконечно большія величины, происшедшія отъ сложенія членовъ двухъ безконечныхъ рядовъ, равны или что одна больше или меньше другой на томъ только основаніи, что каждый членъ одного ряда соотвѣтственно равенъ, больше или меньше нѣкотораго члена другого ряда. Столь же мало мы имѣемъ право считать одну сумму бо́льшей только потому, что она заключаетъ всѣ члены другой суммы и, кромѣ того, еще много, даже безконечно много, другихъ (положительныхъ) членовъ, которыхъ нѣтъ въ другой суммѣ. Несмотря на все это, первая сумма можетъ быть меньше, даже въ безконечное число разъ меньше, чѣмъ вторая. Примѣръ этого представитъ намъ очень извѣстная сумма квадратовъ всѣхъ натуральныхъ чиселъ, если мы сравнимъ ее съ суммой первыхъ степеней этихъ чиселъ. Конечно, никто не станетъ оспаривать, что каждый членъ ряда всѣхъ квадратовъ

$$\left.\begin{array}{r} 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 \\ +\dots \text{ in inf.} = \\ 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100 \\ +\dots \text{ in inf.} = \end{array}\right\}\overset{2}{S}$$

будучи также натуральнымъ числомъ, встрѣчается и въ ряду всѣхъ первыхъ степеней натуральныхъ чиселъ

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+ \\ +13+14+15+16\dots \text{ in inf.} = \overset{1}{S}; \end{array}$$

точно также никто не станетъ оспаривать, что въ послѣднемъ ряду $\overset{1}{S}$, кромѣ всѣхъ членовъ ряда $\overset{2}{S}$, содержится еще много, даже безконечно много членовъ, отсутствующихъ въ ряду $\overset{2}{S}$, такъ какъ они не квадратныя числа. Тѣмъ не менѣе, $\overset{2}{S}$, сумма всѣхъ квадратовъ, вовсе не меньше, а, напротивъ того, безспорно, больше $\overset{1}{S}$, суммы первыхъ степеней всѣхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, количество членовъ въ обоихъ рядахъ (если они еще не разсматриваются, какъ суммы и потому не разлагаемы на произвольное количество частей) навѣрное одно и то же, несмотря на всю кажущуюся вѣрность противоположнаго. Возвышая въ квадратъ каждый отдѣльный членъ ряда $\overset{1}{S}$ при образованіи ряда $\overset{2}{S}$, мы измѣняемъ только свойство (величину) этихъ членовъ, а не ихъ количество. Если-же множество членовъ $\overset{1}{S}$ и $\overset{2}{S}$ одно и то же, то очевидно, что

$\overset{2}{S}$ должно быть много больше, чѣмъ $\overset{1}{S}$, такъ какъ, за исключеніемъ перваго члена, каждый изъ остальныхъ членовъ $\overset{2}{S}$ рѣшительно больше соотвѣтствующаго члена $\overset{1}{S}$. Такимъ образомъ, разсматривая $\overset{2}{S}$, какъ величину, мы видимъ, что $\overset{2}{S}$ заключаетъ въ себѣ $\overset{1}{S}$, какъ часть, и содержитъ въ себѣ еще другую часть, которая представляетъ опять безконечный рядъ съ такимъ-же числомъ членовъ, какъ и $\overset{1}{S}$, а именно:

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 \ldots n\,(n - 1) \ldots \text{ in inf.};$$

Въ этомъ ряду, если исключить два первыхъ члена, всѣ слѣдующіе члены больше соотвѣтственныхъ членовъ въ $\overset{1}{S}$, такъ что сумма цѣлаго ряда опять безспорно больше, чѣмъ $\overset{1}{S}$. Если мы отнимемъ отъ этого остатка снова рядъ $\overset{1}{S}$, то мы получимъ въ качествѣ второго остатка рядъ съ тѣмъ-же самымъ количествомъ членовъ

$$-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48 \ldots n\,(n - 2) \ldots \text{ in inf.};$$

за исключеніемъ трехъ первыхъ членовъ всѣ слѣдующіе снова будутъ больше тѣхъ-же по порядку членовъ въ $\overset{1}{S}$, такъ что и этотъ третій остатокъ слѣдуетъ считать безспорно бóльшимъ, чѣмъ $\overset{1}{S}$. А такъ какъ эти заключенія могутъ быть продолжены до безконечности, то ясно, что сумма $\overset{2}{S}$ въ безконечное число разъ больше суммы $\overset{1}{S}$, такъ какъ вообще имѣемъ

$$\overset{2}{S} - m\overset{1}{S} = (1 - m) + (2^2 - 2\,m) + (3^2 - 3\,m) + (4^2 - 4\,m) + \\ + \ldots (m^2 - m^2) + \ldots + n\,(n - m) + \ldots \text{ in inf.};$$

и въ этомъ ряду только конечное число отрицательныхъ членовъ, а именно, только $m - 1$ первыхъ членовъ, m-тый членъ $= 0$, всѣ-же остальные имѣютъ положительныя значенія и возрастаютъ до безконечности.

§ 34.

Прежде, чѣмъ разъяснить надлежащимъ образомъ неправильность утвержденій, упомянутыхъ уже въ § 31-омъ, мы должны опредѣлить понятіе о нулѣ точнѣе, чѣмъ это дѣлается обыкновенно *).

Безспорно, всѣ математики связываютъ со знакомъ 0 лишь такое понятіе, которое позволяетъ всегда написать оба слѣдующихъ равенства:

$$\text{I.}\quad A - A = 0, \qquad \text{II.}\quad A \pm 0 = A,$$

независимо отъ того, какое выраженіе представляетъ A: соотвѣтствуетъ-ли оно дѣйствительной величинѣ, или совершенно безпредметно. Каждый согласится, что это возможно только при условіи, что мы разсматриваемъ знакъ 0 не какъ представленіе дѣйствительной величины, но просто, какъ отсутствіе величины, а изображеніе $A \pm 0$ мы разсматриваемъ, какъ требованіе, состоящее въ томъ, чтобы къ величинѣ, которую мы обозначимъ черезъ A, не было ничего прибавлено и чтобы ничего отъ нея не было отнято. Ошибочно было-бы думать, что для полнаго опредѣленія понятія которое математики связываютъ съ этимъ знакомъ, достаточно простого опредѣленія, состоящаго въ томъ, что нуль есть безпредметное представленіе величины. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что существуютъ и другія употребительныя въ математикѣ обозначенія величинъ, которыя также безпредметны, но которыхъ мы не можемъ считать равными нулю, какъ напримѣръ, знакъ, получившій такую важность въ анализѣ, $\sqrt{-1}$. Если-же мы опредѣлимъ точнѣе значеніе знака 0, говоря, что его слѣдуетъ такъ понимать, чтобы оба уравненія I и II всегда имѣли мѣсто, то мы установимъ понятіе, которое, съ одной стороны, настолько широко, насколько этого требуетъ обычное употребленіе и интересы науки, съ другой-же стороны, достаточно узко для того, чтобы не допустить неправильнаго употребленія его.

Требованіе, чтобы равенства I и II всегда выполнялись, не только опредѣляетъ особымъ образомъ понятіе о нулѣ, но, если присмотрѣться ближе, то окажется, что и понятія о сложеніи и вычитаніи, которыя здѣсь являются выраженными при помощи знаковъ + и —, благодаря установленію этихъ равенствъ, полу-

*) Очень охотно уступаю Г. M. Ohm'у заслугу, заключающуюся въ томъ, что онъ первый обратилъ вниманіе математиковъ (въ своемъ очень цѣнномъ «опытѣ вполнѣ послѣдовательной системы математики»— «Versuch eines vollkommen consequenten System der Mathematik») на трудности понятія о нулѣ.

чаютъ нѣкоторое своеобразное расширеніе, которое очень полезно для науки.

Польза науки требуетъ еще, чтобы понятіе объ умноженіи было такъ расширено, чтобы возможно было при всякомъ А (будетъ-ли оно величиной конечной, безконечно большой или безконечно малой, или просто безпредметнымъ представленіемъ величины, какъ напримѣръ, $\sqrt{-1}$ или 0) написать равенство

$$\text{III.} \quad 0 \times A = A \times 0 = 0.$$

Наконецъ, въ интересахъ науки слѣдуетъ обобщить насколько возможно и понятіе дѣленія такъ, чтобы не оказаться въ противорѣчіи съ тремя установленными уже уравненіями; нужно, слѣдовательно, также въ равенствѣ

$$\text{IV.} \quad B \times \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{B}\right) \times B = A$$

дать знаку В настолько широкое значеніе, насколько это позволяютъ сдѣлать первыя три равенства при уже установленной общности ихъ. Эти три равенства допускаютъ, чтобы В означало любую величину, конечную, также какъ и безконечно большую или безконечно малую, также и мнимую $\sqrt{-1}$, но не допускаютъ никоимъ образомъ, чтобы считать $B = 0$, т. е. не допускаютъ, чтобы былъ принятъ когда-либо дѣлителемъ 0 или какое-либо выраженіе, равносильное нулю. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ по равенству III $0 \times A$ должно быть равно 0 при всякомъ А, то, положивъ $B = 0$ въ равенствѣ IV, мы найдемъ, что $B \times \left(\frac{A}{B}\right)$ должно быть также $= 0$; это согласуется съ требованіемъ равенства (IV), а именно съ тѣмъ, что $B \times \left(\frac{A}{B}\right) = A$, только въ одномъ случаѣ, когда $A = 0$. Чтобы не впасть въ противорѣчіе, мы должны, слѣдовательно, установить правило, что нуль или равносильное нулю выраженіе не можетъ быть употребляемо, какъ дѣлитель, въ равенствѣ, которое должно быть чѣмъ-нибудь отличнымъ отъ простого тождества, какъ напримѣръ:

$$\frac{A}{0} = \frac{A}{0}.$$

Необходимость соблюденія этого правила, кромѣ только что сказаннаго, доказывается еще многими, крайне нелѣпыми слѣдствіями, которыя получаются изъ совершенно правильныхъ посылокъ, какъ только мы допустимъ дѣленіе на нуль.

Пусть a будетъ какой-либо вещественной величиной; тогда, если-бы было возможно дѣленіе на выраженіе, равнозначное нулю, какъ напримѣръ, на $1 - 1$, то по извѣстному, конечно, совершенно правильному методу дѣленія получилось-бы слѣдующее равенство:

$$\frac{a}{1-1} = a + a + \ldots\ldots + a + \frac{a}{1-1}$$

въ которомъ можетъ быть любое количество слагаемыхъ вида a. Если-же мы отнимемъ отъ обѣихъ частей одно и тоже выраженіе $\frac{a}{1-1}$, то получится въ высшей степени нелѣпое равенство

$$a + a + a + \ldots + a = 0.$$

Если a и b пара различныхъ величинъ, то будутъ имѣть мѣсто слѣдующія два тождества:

$$a - b = a - b$$

$$\underline{b - a = b - a;}\ \text{поэтому сложеніе даетъ}$$

$$a - a = b - b\ \text{или}$$

$$a\ (1 - 1) = b\ (1 - 1).$$

Если-же можно дѣлить обѣ части равенства на множителя, равнаго нулю, то мы получимъ нелѣпый результатъ $a = b$ при всякихъ a и b. Впрочемъ, всѣмъ извѣстно, что при болѣе длинныхъ вычисленіяхъ слишкомъ легко натолкнуться на неправильный результатъ, отбрасывая множителя общаго обѣимъ частямъ уравненія, не убѣдившись предварительно, что онъ не равенъ нулю.

§ 35.

Теперь легко будетъ показать, какъ неправильно обычное утвержденіе, что не только безконечно малая величина высшаго порядка въ соединеніи помощью сложенія или вычитанія съ конечной величиной, но также каждая конечная, даже безконечно большая величина всякаго, сколь угодно высокаго порядка, въ соединеніи помощью сложенія или вычитанія съ другой безконечно большой высшаго порядка исчезаетъ, подобно простому нулю. Если сказанное слѣдуетъ понимать такимъ образомъ (а въ обыкновенномъ изложеніи, которое еще болѣе неосмотрительно, чѣмъ употребленныя нами выраженія, не предупреждаютъ противъ такого ложнаго толкованія), — если это, говорю я, слѣдуетъ понимать такъ, что въ комплексѣ двухъ величинъ $M \pm m$, изъ которыхъ первая въ безконечное число разъ больше второй, можно вторую выбросить, даже и въ томъ случаѣ, когда въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ величина M сама исчезнетъ (напримѣръ, вслѣдствіе вычитанія равной ей величины), то мнѣ незачѣмъ и доказывать ошибочность этого правила.

Мнѣ скажутъ, однако, что это слѣдуетъ понимать иначе. Считая величины M и $M \pm m$ равными, этимъ не хотятъ еще выразить, что онѣ даютъ одинъ и тотъ-же результатъ, когда въ продолженіе вычисленій онѣ войдутъ въ новыя соединенія помощью сложенія или вычитанія; равенство-же ихъ состоитъ только въ томъ, что онѣ дадутъ одинаковые результаты при процессѣ и з м ѣ р е н і я именно величиною N, которая, будучи одного съ ними порядка, находится къ одной изъ нихъ въ конечномъ (слѣдовательно, вполнѣ опредѣлимомъ) отношеніи. Для утвержденія, что величины равны между собою, невозможно, правда, требовать меньше. Но удовлетворяютъ-ли, по крайней мѣрѣ, этому требованія M и $M \pm m$? Если одна изъ нихъ, напримѣръ, M, находится въ ирраціональномъ отношеніи къ мѣрѣ N, то при самомъ обыкновенномъ способѣ измѣренія, при которомъ къ любому числу q, какъ-бы ни было оно велико, ищутъ другое число p такого свойства, что

$$\frac{M}{N} > \frac{p}{q} < \frac{p+1}{p};$$

можетъ случиться, что также и $\frac{M \pm m}{N}$ заключается постоянно въ тѣхъ-же границахъ, т. е. что

$$\frac{M \pm m}{N} > \frac{p}{q} < \frac{p+1}{q}.$$

Но если отношеніе $\frac{M}{N}$ будетъ раціональнымъ, то существуетъ число q, для котораго

$$\frac{M}{N} = \frac{p}{q},$$

а $\frac{M \pm m}{N}$, напротивъ того, или $>$ или $< \frac{p}{q}$, и здѣсь, очевидно, обнаруживается разница между этими величинами даже по сравненіи съ обыкновенными (конечными) числами. Какимъ-же образомъ можемъ мы ихъ назвать равными?

§ 36.

Чтобы избѣжать подобныхъ противорѣчій, многіе математики прибѣгали, по примѣру Эйлера, къ опредѣленію, состоящему въ томъ, что безконечно малыя величины, на самомъ дѣлѣ,—простые нули, безконечно большія—частныя, которыя произошли отъ дѣленія конечнаго числа на простой нуль. Это опредѣленіе оправдывало съ избыткомъ исчезновеніе или отбрасываніе безконечно малой величины въ соединеніи ея посредствомъ сложенія съ конечной, но зато тѣмъ труднѣе оказалось сдѣлать понятнымъ существованіе безконечно большихъ величинъ и возможность полученія конечной величины отъ дѣленія двухъ безконечно малыхъ или безконечно большихъ величинъ, а также существованіе безконечно малыхъ и безконечно большихъ величинъ высшихъ порядковъ. Въ самомъ дѣлѣ, безконечно большая величина являлась такимъ образомъ, какъ результатъ дѣленія на нуль или на выраженіе, равнозначное нулю (т. е., собственно, безпредметное представленіе); она получалась, слѣдовательно, способомъ, запрещеннымъ законами вычисленій; на всѣхъ же конечныхъ или безконечныхъ величинахъ, которыя получались отъ дѣленія безконечнаго числа на безконечное, лежало многократное пятно незаконнаго происхожденія.

Что, повидимому, больше всего говоритъ въ пользу правильности этого вычисленія съ нулями, это способъ, которымъ вычисляется значеніе величины y, зависящей отъ перемѣнной x, значеніе, опредѣляемое уравненіемъ

$$y = \frac{Fx}{\Phi x}$$

въ томъ частномъ случаѣ, когда извѣстное значеніе $x = a$ обращаетъ въ нуль или одного знаменателя этой дроби, или вмѣстѣ числителя и знаменателя. Въ первомъ случаѣ, когда $\Phi a = 0$, а Fa остается величиной конечной, приходятъ къ заключенію, что y сдѣлался безконечно большимъ. Во второмъ-же случаѣ, когда Φa, также какъ и Fa, равно нулю, приходятъ къ заключенію, что оба выраженія Φx и Fx содержатъ по одному или по нѣскольку разъ сомножителя формы $(x - a)$ и поэтому должны быть слѣдующаго вида:

$$\Phi x = (x - a)^m \cdot \varphi x; \quad F x = (x - a)^n \cdot f x,$$

при чемъ φx или fx могутъ представлять постоянныя величины. Если теперь $m > n$, то приходятъ къ заключенію, что послѣ сокращенія дроби $\frac{Fx}{\Phi x}$, неизмѣняющаго ея значенія, знаменатель для $x = a$ все еще дѣлается нулемъ; поэтому утверждаютъ, что значеніе $x = a$ даетъ безконечно большое значеніе для y. Если-же $m = n$, то конечная величина, которая выражается дробью $\frac{fa}{\varphi a}$, будетъ истиннымъ значеніемъ y, такъ какъ должно быть $\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{fx}{\varphi x}$. Если наконецъ $m < n$, то, въ виду того, что

$$\frac{Fx}{\Phi x} = \frac{(x - a)^{n-m} \cdot fx}{\varphi x},$$

при $x = a$, обращается въ нуль, приходятъ къ заключенію, что значеніе $x = a$ обращаетъ въ нуль величину y.

Я думаю объ этомъ способѣ слѣдующее: если значеніе y, отвѣчающее $x = a$, въ приведенныхъ случаяхъ считается безконечно большимъ, то это, очевидно, можетъ быть случайно правильнымъ только тогда, когда величина y принадлежитъ къ роду тѣхъ, которыя могутъ дѣлаться также и безконечно большими. Этотъ результатъ не вытекаетъ, однако, изъ даннаго выраженія, которое требуетъ дѣленія на нуль. Изъ того только обстоятельства, что сказано, что значеніе y всегда одно и то же, а именно то, которое опредѣляется даннымъ выраженіемъ $\frac{Fx}{\Phi x}$, можно сдѣлать заключеніе о свойствѣ величины y для всѣхъ тѣхъ значеній x, которыя даютъ дѣйствительную величину, но не для тѣхъ значеній x, при которыхъ это выраженіе становится безпредметнымъ, какъ это бываетъ въ случаѣ, когда его знаменатель или его числитель, или оба дѣлаются нулями. Конечно, можно сказать, что величина y въ первомъ только случаѣ, когда $\Phi x = 0$, больше всякой данной величины; во второмъ-же случаѣ, гдѣ $Fx = 0$, меньше всякой данной величины; въ третьемъ случаѣ, наконецъ, когда $\frac{Fx}{\Phi x}$ заключаетъ одинаковое число сомножителей вида $(x - a)$ въ числителѣ и знаменателѣ, приближается къ значенію $\frac{fa}{\varphi a}$ такъ близко, какъ только угодно, если значеніе x будетъ сколь угодно приближено къ a. Однако, изъ всего этого не слѣдуетъ ничего относительно свойствъ этого значенія тамъ, гдѣ выраженіе $\frac{Fx}{\Phi x}$ безпредметно, т. е. не имѣетъ никакого значенія, потому что принимаетъ форму 0 или $\frac{c}{0}$, или даже $\frac{0}{0}$. Въ самомъ дѣлѣ, предложеніе о равенствѣ двухъ дробей, изъ которыхъ одна отличается отъ другой только тѣмъ, что отброшенъ общій сомножитель въ числителѣ и знаменателѣ, справедливо, конечно, во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ одного, когда этотъ сомножитель нуль. Иначе, съ такимъ-же правомъ, съ какимъ мы пожелали-бы утверждать, что $\frac{2\,.\,0}{3\,.\,0} = \frac{2}{3}$, можно было-бы утверждать, что любая величина, напримѣръ, $1000 = \frac{2}{3}$. Въ самомъ дѣлѣ, точно также вѣрно то, что $3000\,.\,0 = 0$, какъ и то, что $2\,.\,0 = 0$. Поэтому, если можно положить $\frac{2\,.\,0}{3\,.\,0} = \frac{2}{3}$, то можно также положить

$$\frac{2 \times (3000\,.\,0)}{3 \times (2\,.\,0)} = \frac{(2\,.\,3000)\,.\,0}{(3\,.\,2)\,.\,0} = \frac{2\,.\,3000}{3\,.\,2} = 1000.$$

Ошибка въ заключеніи, которая бросается здѣсь въ глаза, только отъ того была менѣе замѣтна выше, что тамъ дѣленіе на множителя $x - a$, равнозначнаго нулю, производится въ такой формѣ, которая скрываетъ это нулевое значеніе. А такъ какъ отбрасываніе общаго сомножителя во всякомъ другомъ случаѣ позволительно, то съ тѣмъ большей увѣренностью позволяютъ себѣ поступать такъ и въ этомъ случаѣ, что значеніе y оказывается какъ разъ такимъ, какимъ его ожидаютъ,—а именно, когда оно конечное, то оно является такимъ, какимъ оно должно быть по закону непрерывности; оно оказывается равнымъ нулю, когда смежныя съ нимъ значенія стремятся къ нулю, — и безконечно большимъ, когда смежныя съ нимъ возрастаютъ до безконечности. Забываютъ при этомъ, однако, что закону непрерывности не подчиняются всѣ перемѣнныя величины, что величина, которая становится сколь угодно малою, вслѣдствіе того, что значеніе x дѣлаютъ сколь угодно близкимъ къ значенію a, еще не должна по этой причинѣ сдѣлаться равной нулю для $x = a$; и что, точно также возрастая до безконечности, съ приближеніемъ x къ a, она не должна сдѣлаться дѣйствительно безконечной для $x = a$. Въ геометріи именно имѣется безконечно много величинъ, не подчиняющихся закону непрерывности, напримѣръ, величины линій и угловъ, которыя служатъ для опредѣленія периферіи и поверхности многоугольниковъ и многогранниковъ, и многія другія.

§ 37.

Хотя въ принятомъ до настоящаго времени изложеніи ученія о безконечномъ можно указать,—и не безъ основанія, по моему мнѣнію,—много важныхъ недочетовъ, однако извѣстно, что результаты, по большей части, получаются совершенно вѣрные, если только слѣдовать съ надлежащей осмотрительностью правиламъ, общепринятымъ въ исчисленіи безконечнаго. Такіе результаты не могли-бы никогда получиться, если бы не существовалъ дѣйствительно безупречный способъ пониманія этого метода исчисленія и употребленія его. Я охотно допускаю, что только этотъ способъ и былъ тѣмъ, который неясно рисовался въ умѣ остроумныхъ изобрѣтателей этого метода, хотя они и не были еще въ состояніи изложить вполнѣ ясно свои мысли въ этомъ направленіи, что въ труднѣйшихъ случаяхъ удается обыкновенно только послѣ многократныхъ попытокъ.

Да будетъ мнѣ дозволено указать здѣсь въ немногихъ чертахъ, какъ, по моему мнѣнію, слѣдуетъ понимать этотъ методъ, чтобы считать его вполнѣ обоснованнымъ. Достаточно будетъ поговорить о пріемѣ, который слѣдуетъ соблюдать въ дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи, такъ какъ методъ исчисленія безконечно большихъ величинъ вытекаетъ уже отсюда по простой противоположности, особенно послѣ всего того, что сдѣлалъ Cauchy въ этомъ направленіи.

А именно, я не нуждаюсь вовсе въ томъ стѣснительномъ предположеніи (которое считалось необходимымъ), что разсматриваемыя въ вычисленіи величины могутъ становиться безконечно малыми,—ограниченіе, которое исключаетъ изъ области приложенія этого метода исчисленія всѣ ограниченныя величины времени и пространства, а также всѣ силы ограниченныхъ субстанцій, слѣдовательно, въ сущности, всѣ величины, опредѣленіе которыхъ для насъ наиболѣе важно. Я требую только, чтобы эти величины, въ случаѣ, если онѣ перемѣнныя, но не произвольныя перемѣнныя, а зависящія отъ одной или нѣсколькихъ другихъ величинъ, имѣли свои производныя (une fonction derivée, по опредѣленіе Lagrange'а), если не для всѣхъ значеній опредѣляющихъ величинъ, то, по крайней мѣрѣ, для тѣхъ значеній, къ которымъ исчисленіе должно быть приложено. Другими словами, если x одна изъ произвольно измѣняющихся величинъ, а $y = fx$, зависящая отъ нея величина, и если наше исчисленіе должно дать правильный результатъ для всѣхъ значеній, содержащихся между $x = a$ и $x = b$, то y должно зависѣть отъ x такимъ образомъ, чтобы для всѣхъ значеній x, содержащихся между a и b, частное

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + x)\Delta - fx}{\Delta x},$$

получаемое отъ дѣленія приращенія y на соотвѣтствующее ему приращеніе x, подходило бы къ постоянной или къ зависящей только отъ x величинѣ $f'x$ сколь угодно близко, если только Δx будетъ взято достаточно малымъ; затѣмъ оставалось бы столь близкимъ или приближалось бы еще больше, если Δx будетъ еще уменьшено *).

Если дано уравненіе между x и y, то очень легкимъ и извѣстнымъ дѣломъ является нахожденіе производной отъ y. Если, напримѣръ,

$$y^3 = ax^2 + a^3, \tag{1}$$

то для каждаго Δx, которое лишь неравно нулю, имѣемъ:

$$(y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3, \tag{2}$$

откуда, слѣдуя извѣстнымъ правиламъ, получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2} \tag{3}$$

$$= \frac{2ax}{3y^2} + \frac{3ay^2\Delta x - 6axy\Delta y - 2ax\Delta y^2}{9y^4 + 9y^3\Delta y + 3y^2\Delta y^2}$$

---

*) Можно доказать, что всѣ зависимыя перемѣнныя величины, если только онѣ вообще опредѣлимы, должны слѣдовать этому закону въ такой мѣрѣ, что исключенія могутъ встрѣчаться, если и въ безконечномъ множествѣ, всегда однако только для изолированныхъ значеній ихъ произвольныхъ перемѣнныхъ.

Искомая-же производная функція отъ функціи y или (по обозначенію Lagrange'а) y' будетъ

$$\frac{2\,ax}{3\,y^2},$$

т. е. функція, которая получается изъ выраженія

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если послѣ надлежащаго его преобразованія, состоящаго въ томъ, что мы въ числителѣ и знаменателѣ отдѣлимъ члены умножаемые на Δx или на Δy отъ остальныхъ членовъ, т. е. придадимъ ему видъ

$$\frac{2\,ax + a\,\Delta\,x}{3\,y^2 + 3\,y\,\Delta\,y + \Delta\,y^2},$$

положить Δx и $\Delta y = 0$.

Мнѣ незачѣмъ говорить о томъ, въ сколь многихъ отношеніяхъ полезно нахожденіе этихъ производныхъ; а также, какимъ образомъ вычисляется съ помощью этихъ производныхъ каждое конечное приращеніе y, соотвѣтствующее конечному приращенію x, и какимъ образомъ, если дана, наоборотъ, только производная $f'x$, можетъ быть опредѣлена первоначальная функція fx до постоянной.

Но такъ какъ мы получаемъ (что и было только что замѣчено) производную функцію зависимой величины y въ отношеніи къ ея перемѣнной x, полагая Δx и $\Delta y = 0$ въ выраженіи

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

послѣ того, какъ оно преобразовано такимъ образомъ, что ни Δx, ни Δy не являются нигдѣ дѣлителями, то можно съ удобствомъ представить производную съ помощью такого изображенія, какъ $\frac{dy}{dx}$, если мы при этомъ скажемъ, что, съ одной стороны, всѣ Δx, Δy, являющіеся въ преобразованномъ выраженіи $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, или написанные вмѣсто нихъ dx, dy, должны разсматриваться и быть употребляемы, какъ простые нули; и что, съ другой стороны, на $\frac{dy}{dx}$ слѣдуетъ смотрѣть не какъ на частное, а только какъ на символъ производной отъ y по x.

Ясно, что подобный пріемъ не заслуживаетъ ни въ какомъ случаѣ упрека въ томъ, что при употребленіи его разсматриваются отношенія между величинами, которыя вовсе не существуютъ (нуля къ нулю), такъ какъ подъ этимъ изображеніемъ ничего другого, кромѣ простого знака, не разумѣютъ.

Далѣе, также безупречнымъ будетъ и то, что мы обозначимъ черезъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ вторую производную функцію отъ y по x, т. е. ту зависящую только отъ x (или можетъ быть и постоянную) величину, къ которой частное

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

подходитъ сколь угодно близко, если только взять Δx произвольно малымъ, и будемъ понимать это такимъ образомъ, что величины Δx, $\Delta^2 y$, являющіяся въ разложеніи $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, мы будемъ разсматривать и употреблять, какъ простые нули; въ изображеніи же $\frac{d^2y}{dx^2}$ мы будемъ видѣть не дѣленіе нуля на нуль, но только символъ функціи, въ которую обращается разложеніе $\frac{\Delta^2y}{\Delta x^2}$ послѣ указаннаго измѣненія.

Предполагая, что символы $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ имѣютъ эти значенія, мы можемъ строго доказать, что для каждой перемѣнной

$$y = fx,$$

зависящей опредѣленнымъ образомъ отъ произвольной перемѣнной x, за исключеніемъ лишь извѣстныхъ изолированныхъ значеній x и Δx, имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$f(x + \Delta x) = fx + \Delta x. \frac{dfx}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3fx}{dx^3} + \cdots + \frac{\Delta x^n}{1.2 \ldots n} \cdot \frac{d^n f(x + \mu \Delta x)}{dx^n},$$

гдѣ $\mu < 1$ *).

*) Доказательство этого предложенія для всякаго рода зависимости перемѣнной y отъ x, будетъ-ли эта зависимость извѣстной и выражаемой при помощи извѣстныхъ до настоящаго времени знаковъ, или нѣтъ, —давно уже написано авторомъ и, быть можетъ, будетъ вскорѣ опубликовано. *Примѣч. издателя.*

Всѣмъ извѣстно, сколь много важныхъ истинъ общаго ученія о величинахъ (особенно такъ называемаго высшаго анализа) можетъ быть обосновано съ помощью этого одного равенства. Но и въ прикладномъ ученіи о величинахъ, въ ученіи о пространствѣ (геометріи), въ ученіи о силахъ (статикѣ, механикѣ и т. д.) это уравненіе открываетъ путь къ рѣшенію труднѣйшихъ задачъ, напримѣръ, къ спрямленію линій, къ вычисленію величины поверхностей, объемовъ тѣлъ, безъ предположенія о существованіи безконечно малыхъ, которое здѣсь составляло-бы противорѣчіе, и безъ помощи какой-либо такъ называемой аксіомы, какъ напримѣръ, извѣстной аксіомы Архимеда и многихъ другихъ.

Но если возможно установить уравненіе такого рода, какъ напримѣръ, формула для спрямленія кривыхъ въ прямоугольной системѣ координатъ

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$$

въ выше изложенномъ значеніи, то будетъ также возможно, безъ опасенія ошибки, написать уравненія, подобныя слѣдующимъ:

$$d\,(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) = bdx + 2\,cxdx + dx^2 dx + \ldots,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,;$$

или, если r означаетъ радіусъ круга кривизны для линіи одной кривизны:

$$r = -\frac{ds^3}{d^2y\,.\,dx}\,;$$

и много другихъ, въ которыхъ мы не разсматриваемъ знаки dx, dy, dz, ds, d^2y и т. д., какъ знаки дѣйствительныхъ величинъ, а считаемъ ихъ, напротивъ того, равнозначными нулю. При этомъ мы разсматриваемъ все уравненіе, только какъ такое соединеніе знаковъ, которое при производствѣ надъ нимъ преобразованій, установленныхъ правилами алгебры для символовъ дѣйствительныхъ величинъ (здѣсь, слѣдовательно, также дѣленіе на dx и т. п.), никогда не даетъ неправильнаго результата въ томъ случаѣ, когда окажется возможнымъ освободить обѣ части уравненія отъ dx, dy и т. д.

Легко понять, что это дѣйствительно справедливо и что иначе и быть не можетъ. Потому что, если уравненіе

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

правильно, то какъ-же могло-бы быть неправильнымъ уравненіе

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

изъ котораго, по только что упомянутому способу, можно сейчасъ-же вывести первое.

Легко, наконецъ, понять, что не будетъ ошибки, если мы въ какомъ-нибудь уравненіи, заключающемъ въ себѣ знаки dx, $dy \ldots$, съ самаго начала выбросимъ для сокращенія всѣ тѣ слагаемыя, о которыхъ мы напередъ точно знаемъ, что они исчезаютъ въ концѣ вычисленій, какъ равнозначныя нулю. Такъ, если, напримѣръ, мы получили послѣ нѣкоторыхъ вычисленій вытекающее изъ равенствъ 1 и 2 уравненіе

$$3\,y^2 . \Delta\, y + 3\, y\, \Delta\, y^2 + \Delta\, y^3 = 2\, ax\, \Delta\, x + a\, \Delta\, x^2,$$

которое, при переходѣ къ символамъ, равнозначнымъ нулю, принимаетъ видъ

$$3\,y^2 . dy + 3\,y . dy^2 + dy^3 = 2\,a\,x . dx + a . dx^2,$$

то мы можемъ тотчасъ-же замѣтить, что слагаемыя, которыя заключаютъ высшія степени dy^2, dy^3, dx^2, во всякомъ случаѣ исчезнутъ въ концѣ концовъ; поэтому можно сразу положить

$$3y^2\, dy = 2axdx,$$

откуда немедленно получается искомая производная отъ y по x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,ax}{3\,y^2}.$$

Въ заключеніе скажемъ кратко, что весь этотъ пріемъ основывается на положеніяхъ, совершенно подобныхъ тѣмъ, которыя служатъ основаніемъ исчисленія такъ называемыхъ мнимыхъ величинъ (которыя, также какъ наши dx, $dy \ldots$, суть только простые символы) или найденнаго въ послѣднее время сокращеннаго метода дѣленія и другихъ подобныхъ сокращенныхъ методовъ вычисленій. Здѣсь именно такъ же, какъ и тамъ, для оправданія употребляемаго пріема, достаточно придавать вводимымъ символамъ ($dx, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,$ $\sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^3, \frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}$ и т. п.) только такія значенія и производить надъ ними только такія преобразованія, чтобы каждый разъ, когда въ концѣ концовъ появятся, вмѣсто безпредметныхъ символовъ, символы, обозначающіе настоящія величины, обѣ части уравненія были дѣйствительно равны между собою.

§ 38.

Если мы обратимся къ прикладной части ученія о величинахъ, то мы встрѣтимъ первые парадоксы въ области ученія о времени въ самомъ понятіи о времени, особенно, поскольку оно должно быть непрерывнымъ протяженіемъ. Но столь извѣстные уже съ древнихъ временъ кажущіяся противорѣчія, которыя считались содержащимися въ понятіи о непрерывномъ протяженіи, континуумѣ, тяготѣютъ равнымъ образомъ на протяженіи времени, пространства и даже матеріи, поэтому мы и будемъ разсматривать ихъ одновременно.

Конечно, было замѣчено, что все протяженное, по самому своему понятію, должно состоять изъ частей; замѣтили далѣе, что невозможно объяснить безъ ложнаго круга существованіе протяженнаго составленіемъ его изъ частей, которыя сами имѣютъ протяженіе, но, тѣмъ не менѣе, усматривалось также противорѣчіе въ предположеніи, что протяженное происходитъ отъ соединенія частей, не имѣющихъ протяженія, безусловно простыхъ (точекъ во времени или въ пространствѣ, атомовъ, т. е. простыхъ субстанцій, во вселенной въ области дѣйствительности).

На вопросъ, что представляется въ этомъ послѣднемъ объясненіи страннымъ, отвѣчали одно изъ двухъ: или, что свойство, которое не принадлежитъ ни одной изъ частей, не можетъ принадлежать цѣлому, или-же, что между любыми двумя точками, какъ во времени, такъ и въ пространствѣ, и точно также между любыми двумя субстанціями, существуетъ всегда нѣкоторое разстояніе, такъ что онѣ не могутъ образовать континуума.

Но, чтобы замѣтить несообразность этихъ возраженій, дѣйствительно, нѣтъ надобности въ долгихъ размышленіяхъ. Если части не обладаютъ нѣкоторымъ свойствомъ, то должно-ли оно также отсутствовать въ цѣломъ? Наоборотъ, каждое цѣлое имѣетъ, и должно имѣть, много свойствъ, которыя не принадлежатъ частямъ. Автоматъ имѣетъ свойство подражать почти до неузнаваемости движеніямъ живого человѣка; отдѣльныя же его части, пружины, колеса и т. д. лишены этого свойства.—Что любыя двѣ точки времени отдѣлены одна отъ другой безконечнымъ множествомъ точекъ, лежащихъ между ними; что между любыми двумя точками пространства тоже лежитъ безконечное множество точекъ; что даже въ области дѣйствительности между любыми двумя субстанціями существуетъ еще безконечное множество другихъ субстанцій,—со всѣмъ этимъ, конечно, слѣдуетъ согласиться,—но вытекаетъ-ли отсюда слѣдствіе, заключающее въ себѣ противорѣчіе? Отсюда слѣдуетъ только то, что двѣ точки, три, четыре, любое конечное множество точекъ не образуетъ еще протяженія. Со всѣмъ этимъ согласны и мы; мы даже признаемъ, что и безконечнаго количества точекъ не всегда достаточно для того, чтобы образовать континуумъ, напримѣръ, самую короткую линію, если эти точки не имѣютъ надлежащаго распредѣленія. А именно, если мы попытаемся уяснить себѣ понятіе, которое мы называемъ непрерывнымъ протяженіемъ, или континуумомъ, то мы принуждены будемъ признать, что континуумъ существуетъ тамъ, и только тамъ, гдѣ имѣется совокупность простыхъ предметовъ (точекъ во времени или въ пространствѣ или субстанцій), расположенныхъ такимъ образомъ, что каждый изъ нихъ на каждомъ, сколь угодно маломъ, разстояніи, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ сосѣдній съ нимъ предметъ. Если это не имѣетъ мѣста, если, напримѣръ, въ данной совокупности точекъ въ пространствѣ найдется хотя-бы одна только точка, которая окружена сосѣдними точками не настолько плотно, чтобы на каждомъ досточно маломъ разстояніи находилась сосѣдняя точка, то мы скажемъ, что эта точка уединенная (изолирована), и что эта совокупность именно поэтому не представляетъ совершеннаго континуума. Если-же, напротивъ того, въ данной совокупности точекъ нѣтъ ни одной точки въ этомъ смыслѣ изолированной, слѣдовательно, если для каждой изъ нихъ на каждомъ сколь угодно маломъ разстояніи существуетъ, по крайней мѣрѣ, одна сосѣдняя точка, то нѣтъ никакихъ основаній не назвать этой совокупности континуумомъ. Иначе чего-же еще мы станемъ требовать?

«Должно требовать того», возражаютъ намъ, «чтобы каждая точка соприкасалась непосредственно съ другой». Но въ такомъ случаѣ ставится очевидно невозможное требованіе, заключающее въ себѣ явное противорѣчіе. Въ самомъ дѣлѣ, когда-же можно сказать, что двѣ точки соприкасаются? Быть можетъ тогда, когда граница одной точки (скажемъ, правая ея сторона) совпадаетъ съ границей другой (скажемъ, съ ея лѣвой стороной)? Но вѣдь точки—простыя части пространства; онѣ слѣдовательно, не имѣютъ никакихъ границъ, никакой правой и лѣвой стороны. Если бы одна точка имѣла только одну часть, общую съ другой, то она совпадала бы съ этой точкой; а если одна изъ нихъ имѣетъ нѣчто отличное отъ другой, то онѣ обѣ должны лежать совершенно отдѣльно и, слѣдовательно, между ними должно быть мѣсто еще для одной точки, даже для безконечнаго количества точекъ, такъ какъ для этой средней точки, при сравненіи ея съ другими точками, справедливо то же самое.

«Но это все», говорятъ, «недоступно пониманію!» Конечно, этого нельзя ни осязать, ни воспринять съ помощью зрѣнія, но это познается умомъ и познается какъ нѣчто, что должно быть именно такъ и не можетъ быть иначе, такъ что противорѣчіе можетъ появится только въ случаѣ, если представлять себѣ это иначе, т. е. неправильно.

Однако, на это скажутъ еще: «Слишкомъ трудно представить себѣ въ самой малой линіи скопленіе безконечно многихъ точекъ, даже безконечное множество этихъ скопленій, какъ это приходится дѣлать, слѣдуя обыкновенному ученію! Вѣдь мы должны быть въ состояніи разложить самую малую линію еще на безконечное множество другихъ линій, разлагая ее сперва на двѣ половины, потомъ эти половины опять пополамъ и такъ безъ конца!». Во всей этой совокупности мыслей я не нахожу ничего ни ошибочнаго, ни страннаго, за исключеніемъ одного только выраженія: самой малой линіи. Это выраженіе, встрѣчаемое у многихъ, можно объяснить только недостаткомъ вниманія, такъ какъ самая малая линія вовсе не существуетъ и не можетъ существовать, и именно о разсматриваемыхъ здѣсь линіяхъ было сказано, что онѣ могутъ быть разложены еще на меньшія. Каждое безконечное многообразіе, не только многообразіе точекъ, образующихъ линію, можетъ быть разложено на части, которыя сами заключаютъ безконечныя многообразія, даже на безконечное число такихъ частей. Дѣйствительно, если ∞ означаетъ безконечное многообразіе, то $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8} \cdots$ также будутъ безконечными многообразіями. Это заключается въ понятіи безконечнаго.

Удовлетворившись послѣ продолжительнаго обсужденія представленными объясненіями, намъ могутъ сказать наконецъ: «Какъже истолковать объясненія тѣхъ математиковъ, которые говорятъ, что протяженное не можетъ быть составлено никакимъ, даже самымъ большимъ, накопленіемъ точекъ и не можетъ быть разложено на простыя точки, какъ-бы ни было велико множество частей, на которыя мы его разлагаемъ». Строго говоря, съ одной стороны, слѣдовало бы, конечно, учить, что конечное множество точекъ не составитъ никогда протяженія, безконечное-же множество непремѣнно составитъ его, но только тогда, когда будеть выполнено уже многократно упомянутое условіе, а именно, чтобы для каждой точки существовали извѣстныя сосѣднія точки на каждомъ достаточно маломъ разстояніи. При этомъ, съ другой стороны, слѣдовало-бы признать, что не всякое разложеніе даннаго протяженія на части приводитъ къ простымъ частямъ, а именно, этого не достигаетъ никакое разложеніе на такія части, которыхъ многообразіе конечно; далѣе, этого достигаетъ даже не всякое такое разложеніе, которое простирается въ безконечность (напримѣръ, посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія пополамъ), какъ мы видѣли раньше. Тѣмъ не менѣе, слѣдуетъ настаивать на томъ, что каждый континуумъ не можетъ произойти въ концѣ концовъ ни изъ чего другого, кромѣ точекъ, и только точекъ. При правильномъ пониманіи одно согласуется съ другимъ вполнѣ хорошо.

§ 39.

Можно было напередъ предугадать, что несомнѣнныя трудности представятся при разсмотрѣніи свойствъ того особеннаго непрерывнаго протяженія, которымъ является время. Ученіе о времени должно было представлять благодарную почву особенно для тѣхъ философовъ, которые, подобно скептикамъ, прилагали старанія не къ тому, чтобы уяснить человѣческія понятія, а къ тому, чтобы ихъ запутывать, находя въ нихъ всюду кажущіяся противорѣчія. Здѣсь мы будемъ касаться только важнѣйшихъ пунктовъ этого вопроса, тѣмъ болѣе, что не все, относящееся сюда, касается понятія о безконечности.

Поставленъ былъ вопросъ, представляетъ-ли время нѣчто реальное и, если это такъ, то будетъ-ли оно субстанціей или атрибутомъ и, въ первомъ случаѣ, если оно представляетъ изъ себя субстанцію, то какою она будетъ, сотворенною-ли или несотворенной? Разсуждали такъ: «если время—субстанція, сотворенная, то оно «должно было имѣть начало, а также будетъ имѣть конецъ; слѣдо-«вательно, оно должно измѣняться, а потому должно нуждаться въ «другомъ времени, въ теченіе котораго оно бы измѣнялось. Еще не-«сообразнѣе считать время самимъ Богомъ или находящимся «въ немъ атрибутомъ. Противополагаютъ, конечно, время «вѣчности, но что-же такое вѣчность? Какимъ образомъ возмож-«но, чтобы безконечное многообразіе не только мгновеній, но и цѣ-«лыхъ промежутковъ времени заключалось въ одномъ «только, сколь угодно короткомъ, промежуткѣ, напримѣръ, въ одномъ «мгновеніи ока, каждая часть котораго также носитъ названіе «мгновенія? На самомъ дѣлѣ (говорятъ наконецъ) нѣтъ никакого «времени. Ибо, прошедшаго времени, очевидно, уже нѣтъ, именно «потому, что оно прошло; будущаго еще нѣтъ, такъ какъ оно еще «будетъ; что-же касается настоящаго, то это ничто иное, какъ «простое мгновеніе въ самомъ строгомъ значеніи этого сло-«ва, мгновеніе, не имѣющее продолжительности, которое, «слѣдовательно, не можетъ имѣть претензій на имя времени».

По моимъ понятіямъ, время, безъ сомнѣнія, не представляетъ ничего дѣйствительнаго въ собственномъ значеніи этого слова, при чемъ дѣйствительность приписывается только субстанціямъ и ихъ силамъ. Я не считаю поэтому времени ни Богомъ, ни созданной субстанціей, ни атрибутомъ Бога или какой-нибудь созданной субстанціи, или совокупности нѣсколькихъ субстанцій. Поэтому самому оно не есть нѣчто перемѣнное, оно, напротивъ того, есть то, въ чемъ происходятъ всѣ измѣненія. Если высказываютъ противоположное, какъ напримѣръ, въ поговоркѣ: «времена мѣняются», то, какъ мы уже ранѣе говорили, здѣсь подъ временемъ подразумѣваютъ лишь находящіяся въ немъ вещи и ихъ состоянія. Желая объяснить ближе, что такое время, мы должны сказать, что оно есть то «опредѣленіе», присущее всякой зависимой (или, что тоже самое, перемѣнной) субстанціи, представленіе, о которомъ мы должны присоединить къ представленію этой субстанціи для того, чтобы изъ двухъ противорѣчащихъ другъ другу свойствъ b и не b одно могло быть ей правильно приписано, а другое отвергнуто. Точнѣе говоря, упомянутое здѣсь «опредѣленіе» есть только одна простая часть времени, точка времени или мгновеніе, въ которомъ мы должны себѣ представить субстанцію x, которой мы желаемъ приписать съ достовѣрностью одно изъ противорѣчащихъ свойствъ b и не b, такъ что наше сужденіе должно быть, собственно, выражено слѣдующимъ образомъ: x въ точкѣ времени t имѣетъ или свойство b или не b. Если только читатель согласится со мною въ правильности этого опредѣленія понятія о мгновеніи, то я могу представить отчетливое объясненіе того, что такое само время, а именно: что такое все время или вѣчность, т. е. то цѣлое, для котораго всѣ мгновенія суть лишь части. Всякое конечное время, т. е. каждый заключенный между двумя данными мгновеніями промежутокъ времени или продолжительность времени, я опредѣляю, какъ совокупность всѣхъ мгновеній, заключенныхъ между этими двумя крайними мгновеніями. Согласно этимъ опредѣленіямъ, нѣтъ никакой разницы между временемъ и вѣчностью, если подразумѣвать подъ временемъ, какъ это часто бываетъ, не ограниченное, конечное время, а все время, безконечное въ обоихъ направленіяхъ. Но есть большая разница въ способѣ, какъ пребываетъ въ этомъ времени Богъ и перемѣнныя или созданныя существа. Созданныя существа пребываютъ во времени, измѣняясь въ немъ, Богъже во всѣ времена неизмѣнно тотъ-же. Это и подало поводъ называть его одного вѣчнымъ, прочія-же существа, его созданія — временными существами. — Представить себѣ въ чувственномъ образѣ, что каждое, даже самое короткое, мгновеніе, какъ напримѣръ, одинъ мигъ, заключаетъ уже безконечное множество цѣлыхъ промежутковъ времени, это — задача, конечно, трудная для нашего воображенія. Довольно и того, что мы понимаемъ это умомъ и признаемъ, что иначе оно и не можетъ быть. Изъ указаннаго здѣсь понятія о времени можно вывести и объективное его основаніе, но изложеніе этого здѣсь было бы слишкомъ пространнымъ. Несообразно было бы только утверждать, что въ короткомъ промежуткѣ времени заключается такое-же множество мгновеній, какъ и въ болѣе длинномъ, или что безчисленные промежутки времени, на которые можно разложить данный промежутокъ, имѣютъ ту же длину, какъ и въ какомъ-либо болѣе длинномъ промежуткѣ времени.

Наконецъ, то ошибочное заключенiе, съ помощью котораго предполагаютъ совершенно уничтожить реальность понятiя о времени, представляется столь простымъ, что едва-ли требуетъ опроверженiя. Мы вѣдь признаемъ, что времени вообще не существуетъ, и потому, конечно, нѣтъ ни прошедшаго, ни будущаго времени, такъ какъ нѣтъ даже настоящаго, но какимъ образомъ можетъ отсюда слѣдовать, чтобы время представляло собою ничто? Вѣдь предложенiя и истины сами по себѣ составляютъ нѣчто, хотя никому не прiйдетъ въ голову утверждать, что онѣ представляютъ нѣчто существующее, если не смѣшивать ихъ съ ихъ пониманiемъ въ сознанiи мыслящаго существа т. е. съ дѣйствительными мыслями и сужденiями?

§ 40.

Относительно парадоксовъ въ ученiи о пространствѣ извѣстно, что и для пространства также не найдено опредѣленiя. Часто принимали его за нѣчто существующее, то смѣшивая его съ субстанцiями, которыя въ немъ находятся, то считая его даже самимъ Богомъ или, по крайней мѣрѣ, атрибутомъ божества. Даже великому Ньютону пришла мысль опредѣлить пространство, какъ сензорiй божества. Другiе полагали, что движутся не только субстанцiи, находящiяся въ пространствѣ, но и само пространство, такъ что мѣняются мѣста мѣстъ. Далѣе, во времена Декарта, провозглашали, какъ новое открытiе, мысль, что въ пространствѣ находятся не всѣ, а только, такъ называемыя, чувственныя субстанцiи, пока наконецъ не пришла Канту неудачная мысль, которую многiе еще теперь за нимъ повторяютъ, не считать пространство ничѣмъ объективнымъ, а только (субъективною) формою нашего воззрѣнiя. Далѣе былъ поставленъ вопросъ, не имѣютъ-ли другiя существа иного пространства, напримѣръ, пространства о двухъ или о четырехъ измѣренiяхъ. Гербартъ, наконецъ, хотѣлъ одарить насъ двойнымъ неподвижнымъ и непрерывнымъ пространствомъ и точно также двойнымъ временемъ. Обо всемъ этомъ я уже высказывалъ свое мнѣнiе въ другихъ мѣстахъ.

Для меня пространство, подобно времени, не есть свойство субстанцiй, а только нѣкоторое къ нимъ относящееся опредѣленіе, а именно: тѣ опредѣленія въ созданныхъ субстанціяхъ, которыя даютъ основаніе того, что, владѣя своими свойствами, онѣ вызываютъ въ извѣстное время одна въ другой опредѣленныя измѣненія, я называю мѣстами, на которыхъ эти субстанціи находятся; совокупность-же всѣхъ мѣстъ я называю пространствомъ, цѣлымъ пространствомъ. Это опредѣленіе дало мнѣ возможность вывести объективно ученіе науки о пространствѣ изъ ученія о времени, напримѣръ, показать, что пространство имѣетъ три измѣренія, и почему это такъ и многое другое.

Парадоксы, которые были найдены уже въ самомъ понятіи о пространствѣ, въ той предметности, которая ему присуща, несмотря на то, что оно не представляетъ ничего дѣйствительнаго, въ безконечномъ множествѣ его частей и въ непрерывности цѣлаго, которое онѣ образуютъ, несмотря на то, что даже никакія двѣ изъ этихъ частей (точекъ) не соприкасаются непосредственно между собою,—эти кажущіяся противорѣчія я не считаю нужнымъ еще разсматривать и думаю, что вправѣ считать ихъ разъясненными.

Первое, что требуетъ еще болѣе близкаго освѣщенія, это, конечно, понятіе о величинѣ пространственнаго протяженія. Не подлежитъ сомнѣнію, что всякое протяженіе имѣетъ величину. Всѣ согласны также въ томъ, что величины, встрѣчающіяся какъ въ одномъ измѣреніи времени, такъ и въ трехъ измѣреніяхъ пространства, могутъ быть опредѣлены только съ помощью своего отношенія къ одной величинѣ, выбранной произвольно за единицу мѣры, и что это протяженіе, принятое за единицу, должно быть однородно съ тѣми протяженіями, которыя будутъ измѣряемы, т. е. должно быть для линій—линіей, для поверхностей—поверхностью, для тѣлъ— тѣломъ *).

*) При этомъ случаѣ нѣкоторые, быть можетъ, охотно прочтутъ опредѣленіе этихъ трехъ видовъ пространственнаго протяженія. Если признать правильнымъ опредѣленіе протяженія вообще, данное въ параграфѣ 38 (а это опредѣленіе имѣетъ то достоинство, что его можно легко распространить на тѣ изъ величинъ, разсматриваемыхъ въ общемъ ученіи о величинахъ, которыя называются непрерывно перемѣнными), то я говорю, что нѣчто пространственно протяженное будетъ просто протяженнымъ, или линіей, если каждая его точка на каждомъ достаточно маломъ разстояніи имѣетъ одну или больше сосѣднихъ точекъ, но никоимъ образомъ не такъ много, чтобы совокупность ихъ сама по себѣ составляла уже протяженіе; я

Если-же мы спросимъ теперь, въ чемъ собственно состоитъ то, что мы называемъ величиной пространственнаго протяженія, то, принимая во вниманіе, что такое протяженіе состоитъ только изъ точекъ, расположенныхъ по извѣстному правилу, и что при сужденіи о величинѣ принимается въ разсчетъ не порядокъ частей, а только ихъ множество, можно было-бы легко прійти къ заключенію, что подъ величиной каждаго протяженія мы подразумѣваемъ именно это самое множество точекъ, на что, повидимому, указываетъ и самое имя, когда мы называемъ величину поверхности или тѣла содержаніемъ этихъ протяженій. Но ближайшее разсмотрѣніе показываетъ, что это не такъ. Иначе какъ-же мы могли бы принять, (а мы это дѣлаемъ, однако, всегда и не задумываясь), что величина протяженія, напримѣръ, куба, нисколько не измѣнится, присчитаемъ-ли мы къ его содержанію и границу его, т. е. поверхность куба (которая и сама имѣетъ уже извѣстную величину) или нѣтъ? А такимъ образомъ мы поступаемъ безспорно, когда мы находимъ, напримѣръ, что величина куба, котораго ребро равно 2, въ восемь разъ больше, чѣмъ величина куба, ребро котораго = 1, несмотря на то, что первый кубъ имѣетъ на 12 квадратныхъ боковыхъ сторонъ величиной въ 1 меньше, чѣмъ восемь послѣднихъ, ибо, при соединеніи меньшихъ кубовъ въ одинъ бóльшій, изъ тѣхъ 24 квадратовъ, которые попадаютъ внутрь бóльшаго куба, половина отбрасывается *). Отсюда вытекаетъ, что подъ величиной пространственнаго протяженія, будетъ-ли это линія, плоскость или тѣло, мы подразумѣваемъ не что иное, какъ величину, которая выводится изъ протяженія, принятаго за единицу и однороднаго съ измѣряемымъ протяженіемъ, по закону, удовлетворяющему слѣдующему требованію: если мы нашли, слѣдуя этому закону, для куска M величину m и

говорю дальше, пространственное протяженіе будетъ протяженіемъ двухъ измѣреній или поверхностью, если каждая точка на каждомъ достаточно маломъ разстояніи имѣетъ цѣлую линію сосѣднихъ точекъ; я говорю наконецъ, что пространственное протяженіе будетъ протяженіемъ трехъ измѣреній, или тѣломъ, если каждая точка на каждомъ достаточно маломъ разстояніи имѣетъ цѣлую поверхность сосѣднихъ точекъ.

*) Кубъ, ребро котораго равно 2, разсѣкается 3-мя плоскостями, соотвѣтственно параллельными его гранямъ, на 8 кубовъ. Полная поверхность разсѣченнаго куба вмѣстѣ съ суммой площадей сѣченія равна 36. Сумма полныхъ поверхностей 8-ми составляюшихъ кубовъ = 48; 48 — 36 = 12.

Прим. ред.

для куска N величину n, то мы найдемъ по тому же закону для протяженія, происходящаго отъ соединенія кусковъ M и N, величину $m + n$, будемъ-ли при этомъ принимать въ разсчетъ границы, которыя имѣютъ куски M и N и составленное изъ нихъ цѣлое $M + N$, или нѣтъ. Изъ этого понятія могутъ быть выведены самыя общія формулы, которыя даетъ наука о пространствѣ для спрямленія, вычисленія поверхностей и объемовъ, при чемъ не приходится прибѣгать ни къ какому другому предположенію, въ томъ числѣ и къ предложеніямъ, ложно названнымъ основными предложеніями Архимеда. Справедливость этого утвержденія доказана въ работѣ, упомянутой въ параграфѣ 37 *).

§ 41.

Мы можемъ теперь, опираясь на данныя выше опредѣленія и не опасаясь обвиненія въ противорѣчіи, установить слѣдующія предложенія, какъ бы ни показались парадоксальными нѣкоторыя изъ нихъ для обычнаго способа представленія.

1. Совокупность всѣхъ точекъ, лежащихъ между двумя точками a и b, представляетъ протяженіе простого рода или линію, независимо отъ того, присчитаемъ-ли мы къ ней точки a и b (въ такомъ случаѣ, она будетъ прямой ограниченной), или не присчитаемъ одной или другой, или обѣихъ крайнихъ точекъ (въ такомъ случаѣ она будетъ неограниченной); во всякомъ случаѣ, она будетъ всегда той же длины, какъ и прежде. Каждая подобная неограниченная прямая съ той стороны, гдѣ недостаетъ крайней точки, именно поэтому не имѣетъ самой крайней (самой отдаленной) точки; за каждой ея точкой находится, напротивъ того, дальнѣйшая, хотя разстояніе остается всегда конечнымъ.

2. Периферія треугольника abc можетъ быть составлена: 1) изъ прямой ab, ограниченной съ обѣихъ сторонъ, 2) изъ прямой ac, ограниченной только съ одной стороны, при c, и 3) изъ неогра-

*) Въ параграфѣ 37 нѣтъ однако упоминанія о какой-либо работѣ. Авторъ, очевидно, имѣетъ въ виду появившуюся въ 1817 году работу: «Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich kleinen, ohne der Anname des Archimedes und ohne irgend einer nicht streng erweislichen Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfug vorgelegt. *Прим. ред.*

ниченной съ обѣихъ сторонъ прямой bc; длина периферіи, однако, равна суммѣ трехъ длинъ ab, bc, ca.

3. Если мы представимъ себѣ, что прямая az раздѣлена пополамъ въ точкѣ b, часть bz раздѣлена опять пополамъ въ точкѣ c, часть cz опять раздѣлена въ точкѣ d и что продолжаютъ поступать такимъ образомъ безъ конца; далѣе, если мы предположимъ, что эти безконечно многія точки дѣленія b, c, $d, \ldots$ и точка z мысленно удалены изъ совокупности точекъ, лежащихъ между a и z, то совокупность остальныхъ точекъ все-таки заслуживаетъ названія л и н і и, и величина ея будетъ та-же, что и прежде. Если же мы присчитаемъ z къ совокупности, то нельзя будетъ уже назвать цѣлое непрерывно-протяженнымъ; въ самомъ дѣлѣ, точка z является изолированной, ибо для нея нѣтъ такого, хотя-бы сколь угодно малаго разстоянія, о которомъ можно было бы сказать, что на этомъ разстояніи и на каждомъ меньшемъ точка z имѣетъ сосѣднюю точку въ этой совокупности точекъ. А именно, на всѣхъ разстояніяхъ, которыя имѣютъ форму $\frac{az}{2^n}$, не имѣется точекъ, сосѣднихъ съ z.

4. Если разстояніе точекъ a и b равно разстоянію точекъ α и β, то и множество точекъ между a и b должно считаться р а в н ы м ъ множеству точекъ между α и β.

5. Протяженія, которыя имѣютъ равное множество точекъ, имѣютъ также равную величину, но нельзя сказать наоборотъ, чтобы два протяженія равной величины имѣли одинаковое количество точекъ.

6. Въ двухъ протяженіяхъ совершенно подобныхъ между собою, множества ихъ точекъ должны находиться въ такомъ-же отношеніи, какъ ихъ величины.

7. Поэтому, если отношеніе величинъ двухъ совершенно подобныхъ протяженій ирраціонально, то и отношеніе множествъ ихъ точекъ будетъ тоже ирраціонально. Существуютъ, слѣдовательно, м н о ж е с т в а (именно только безконечныя), о т н о ш е н і я к о т о р ы х ъ п р е д с т а в л я ю т ъ в с я к а г о р о д а и р р а ц і о н а л ь н о с т и.

§ 42.

Изъ этихъ предложеній, число которыхъ (какъ видимъ) могло бы быть легко увеличено, насколько я знаю, было обращено вниманіе въ сочиненіяхъ математиковъ только на шестое, и то лишь такимъ образомъ, что въ противоположность ему было установлено предложеніе: «подобныя линіи, какъ бы ни были онѣ различны по величинѣ, должны имѣть одинаковое количество точекъ». Это утверждалъ Фишеръ*) въ отношеніи подобныхъ и концентрическихъ дугъ, приводя притомъ, какъ основаніе, то, что черезъ каждую точку одной дуги можно провести радіусъ, который встрѣчаетъ точку другой. Какъ извѣстно, уже Аристотель занимался этимъ парадоксомъ. Заключеніе Фишера обнаруживаетъ, очевидно, убѣжденіе, что два многообразія, если они даже безконечны, должны быть между собою равны, какъ только каждая часть одного можетъ быть соединена въ пару съ нѣкоторой частью другого. Послѣ того, какъ это заблужденіе раскрыто, нѣтъ никакой надобности въ дальнѣйшемъ опроверженіи этого ученія, въ которомъ сверхъ того вовсе нельзя понять, почему, въ случаѣ его правильности, нужно было бы ограничивать утвержденіе о равномъ множествѣ точекъ только случаемъ дугъ круга, и притомъ концентрическихъ и подобныхъ: вѣдь это самое основаніе могло-бы быть приведено также и для всѣхъ прямыхъ и для разнообразнѣйшихъ кривыхъ линій, вовсе не подобныхъ между собою.

§ 43.

Едва-ли существуетъ истина въ наукѣ о пространствѣ, противъ которой учители этой науки такъ часто грѣшили, какъ противъ той, что «каждое разстояніе между двумя точками, а слѣдовательно, и каждая ограниченная съ обѣихъ сторонъ прямая, представляется конечной, т. е. находится съ каждой другой въ отношеніи, которое можетъ быть точно опредѣлено съ помощью понятій. Въ самомъ дѣлѣ, врядъ-ли найдется геометръ, который-бы не говорилъ иногда о безконечно большихъ разстояніяхъ и не превращалъ-бы при извѣстныхъ обстоятельствахъ ограниченной прямой въ безконечно большую. Достаточно указать на извѣстную пару линій, которыя, въ геометрическомъ значеніи этого слова, называютъ тангенсомъ и секансомъ

*) Dr. I. K. Fischer. Grundriss der gesammten höheren Mathematik. Leipzig, 1809. Bd. II. § 51. Anm.).

угла или дуги. На основаніи совершенно яснаго опредѣленія, онѣ должны представлять пару прямыхъ линій, ограниченныхъ съ обѣихъ сторонъ; однако, какъ мало найдется людей, которые не рѣшались-бы учить, что тангенсъ и секансъ прямого угла безконечно велики. Это ложное ученіе немедленно влечетъ за собою наказаніе въ видѣ затрудненія, возникающаго, какъ только приходится рѣшать, слѣдуетъ-ли считать эти двѣ безконечно большія величины положительными или отрицательными? Дѣйствительно, основаніе, которое можно привести въ пользу одного предположенія, оказывается справедливымъ и для другого, такъ какъ извѣстно, что прямая, проведенная черезъ центръ круга, параллельно къ касательной его, имѣетъ совершенно одинаковое отношеніе къ обѣимъ сторонамъ этой касательной и, слѣдовательно, не встрѣчается съ ней ни съ одной, ни съ другой стороны. Въ выраженіи для этихъ линій $\frac{1}{0}$ нѣтъ также ни малѣйшаго основанія къ тому, чтобы считать эту предполагаемую безконечную величину положительной или отрицательной, такъ какъ 0 не является ни положительнымъ, ни отрицательнымъ. Поэтому не только парадоксально, но совершенно ложно предполагать существованіе безконечно большого тангенса прямого угла, а также всѣхъ угловъ вида:

$$\pm n\pi \mp \frac{\pi}{2}.$$

Напомнимъ при этомъ случаѣ, что, строго говоря, ни синусъ, ни тангенсъ не существуютъ также и для угла, равнаго нулю или для угла, равнаго $\pm n \cdot \pi$. Разница въ обоихъ допущеніяхъ только та, что въ послѣднемъ изъ нихъ не получается ложнаго результата, если, въ случаѣ, когда эти выраженія являются сомножителями, считаютъ произведенія несуществующими; въ тѣхъ-же случаяхъ, когда они являются дѣлителями, заключаютъ, что вычисленіе требуетъ чего-то незаконнаго.

§ 44.

Такимъ же незаконнымъ пріемомъ, который, къ счастью, нашелъ мало послѣдователей, является вычисленіе Іоганна Шульца (Ioh. Schulz) величины всего безконечнаго пространства. Основываясь на томъ обстоятельствѣ, что возможно провести прямыя линіи въ безконечность изъ каждой данной точки a во всѣ стороны, т. е. во всевозможныхъ направленіяхъ, а также и на томъ, что каждая мыслимая точка m мірового пространства должна лежать на одной, и только на одной, изъ этихъ линій, онъ счелъ себя вправѣ заключить, что можно считать безконечное пространство шаромъ, описаннымъ изъ любой точки a радіусомъ, равнымъ ∞; отсюда онъ тотчасъ-же получилъ, что все безконечное пространство имѣетъ величину $\frac{4}{3}\pi\infty^3$.

Если бы это предложеніе оказалось правильнымъ, то оно составило-бы, конечно, одно изъ важнѣйшихъ предложеній науки о пространствѣ. Едва-ли можно представить основательныя возраженія противъ обѣихъ посылокъ (которыя я излагаю, однако, не точно по Шульцу, такъ какъ предо мной нѣтъ его книги). Въ самомъ дѣлѣ, если бы кто-нибудь сказалъ, что вторая посылка ошибочна уже потому, что изъ нея слѣдуетъ очень неравномѣрное распредѣленіе точекъ вселеной, а именно болѣе плотное скопленіе ихъ вокругъ произвольно избраннаго центра a, то этимъ онъ показалъ-бы только, что не преодолѣлъ еще предубѣжденія, которое опровергнуто нами въ параграфѣ 21 и слѣд. Ошибка, и совершенно очевидная ошибка, Шульца состоитъ въ томъ, что прямыя, которыя должны быть проведены изъ точки a въ безпредѣльность по всѣмъ направленіямъ, для того, чтобы каждая точка пространства лежала на какой-нибудь изъ этихъ линій, онъ считаетъ однако же радіусами, т. е. линіями, ограниченными съ двухъ сторонъ. Вѣдь только изъ этого выводится шарообразность безконечнаго пространства и вычисленіе его величины $= \frac{4}{3}\pi\infty^3$. Изъ этой ошибки вытекаетъ также слѣдующая несообразность: такъ какъ для каждаго шара существуетъ объемлющій его цилиндръ или такой-же кубъ, и еще многія другія протяженія, напримѣръ, безконечное количество объемлющихъ его шаровъ одного и того-же діаметра, то пространство, которое предполагалось цѣлымъ пространствомъ, оказывается не цѣлымъ, а только частью, внѣ которой находится еще безконечно много другихъ пространствъ.

Чтобы обнаружить несостоятельность большей части парадоксовъ (mysteria infiniti), приведенныхъ Босковичемъ (Boscowich) въ Diss. de transformatione locorum geometricorum (прибавленіе къ его

Elem. univ. Matheseos T. III. Romae 1754), достаточно одного замѣчанія, а именно, что прямая, простирающаяся въ безконечность, хотя бы въ одну только сторону, по этому самому не можетъ быть линіей ограниченной съ этой стороны, и что поэтому говорить о ея конечной точкѣ точно также невозможно, какъ говорить объ остріѣ шара или о кривизнѣ прямой, или отдѣльной точки, или о точкѣ встрѣчи двухъ параллельныхъ.

§ 45.

Нѣсколько рѣже, чѣмъ безконечно большія, вводились также и безконечно малыя разстоянія и линіи въ пространствѣ, особенно, когда казалось нужнымъ разсматривать, какъ прямыя линіи или какъ плоскости, такія линіи и поверхности, которыхъ ни одна часть (имѣющая еще протяженіе) не является прямой или плоской, напримѣръ, для болѣе легкаго опредѣленія ихъ длины или величины ихъ кривизны, или извѣстныхъ замѣчательныхъ свойствъ, имѣющихъ значеніе въ механикѣ. Въ такихъ случаяхъ позволяли себѣ даже измышлять разстоянія, которыя должны быть измѣряемы безконечно малыми величинами второго, третьяго и другихъ высшихъ порядковъ.

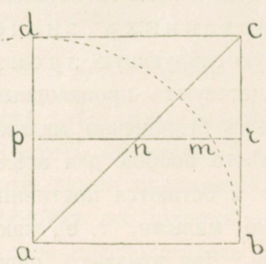
Тотъ фактъ, что употребленіе такихъ пріемовъ, особенно въ геометріи, рѣдко приводило къ ложнымъ результатамъ, произошелъ благодаря упомянутому въ § 37 обстоятельству, а именно благодаря тому, что перемѣнныя величины, относящіяся къ пространственнымъ протяженіямъ, поддающимся опредѣленію, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что, за исключеніемъ отдѣльныхъ изолированныхъ значеній, онѣ имѣютъ первую, вторую и каждую слѣдующую производную функцію. Въ самомъ дѣлѣ, гдѣ существуютъ производныя, тамъ то, что утверждаютъ о такъ называемыхъ безконечно малыхъ линіяхъ, поверхностяхъ и тѣлахъ, имѣетъ мѣсто вообще для всѣхъ линій, поверхностей и тѣлъ, которыя,—хотя и остаются постоянно конечными,—могутъ быть взяты сколь угодно малыми, т. е., какъ говорятъ, могутъ убывать до безконечности. Для этихъ-то перемѣнныхъ и было, собственно, справедливо то, что ложно высказывалось о безконечно малыхъ разстояніяхъ.

Само собой понятно, что, при подобномъ изложеніи предмета, должны были предлагать и какъ будто доказывать много парадоксальнаго и даже много совершенно ложнаго. Какимъ страннымъ, напримѣръ, представлялось утвержденіе, что каждая кривая линія и поверхность есть не что иное, какъ соединеніе безконечно многихъ прямыхъ линій и плоскостей, которыя нужно только предполагать безконечно малыми; особенно, если наряду съ этимъ признавалось опять существованіе безконечно малыхъ линій и поверхностей, которыя были однако кривыми. Какимъ страннымъ является утвержденіе, что линіи, которыя въ одной изъ своихъ точекъ не имѣютъ кривизны, какъ напримѣръ, въ точкѣ перегиба, что эти линіи имѣютъ въ этой точкѣ безконечно малую кривизну и безконечно большой радіусъ. Такимъ-же страннымъ являлось утвержденіе, что линіи, заканчивающіяся въ одной изъ своихъ точекъ, имѣютъ въ этой точкѣ безконечно большую кривизну и безконечно малый радіусъ кривизны, и тому подобное.

§ 46.

Въ качествѣ дѣйствительно поразительнаго и, вмѣстѣ съ тѣмъ, очень простого примѣра того, къ какимъ несообразностямъ приводитъ допущеніе такихъ безконечно малыхъ растояній, я позволю себѣ привести предложеніе, которое, по свидѣтельству Кестнера (Anfangsgründe der höh. Analysis, Bd. II, Vorr.), даетъ уже Галилей въ своихъ «Discorsi e dimostrazioni matematiche etc.», конечно, только съ цѣлью вызвать размышленіе, а именно, что окружность круга такъ же велика, какъ его центръ.

Чтобы получить представленіе о томъ, какъ пытались это доказать, пусть читатель вообразитъ себѣ квадратъ *abcd*, въ немъ



квадрантъ *bd*, описанный изъ *a*, какъ центра, радіусомъ $ab = a$; далѣе, прямую *pr*, проведенную параллельно *ab* и пересѣкающую стороны квадрата *ad* и *bc* въ *p* и *r*, діагональ *ac* въ *n*, а квадрантъ въ *m*; словомъ,— извѣстную фигуру, которая употребляется для доказательства того, что кругъ радіуса *pn* равняется кольцу, которое остается послѣ вычитанія круга радіуса *pm* изъ круга радіуса *pr*, или, что

$$\pi \cdot pn^2 = \pi \cdot pr^2 - \pi \cdot pm^2\text{*)}.$$

---

*) $pn = ap$, $pr = am$,
$pr^2 = am^2 = ap^2 + pm^2 = pn^2 + pm^2$; $pn^2 = pr^2 - pm^2$. *Прим. ред.*

Если pr подходитъ все ближе къ ab, то очевидно, что кругъ радіуса pn будетъ дѣлаться все меньше и меньше, а кольцо между кругами радіусовъ pm и pr все уже и уже. Геометры, которые не встрѣчали никакого затрудненія въ томъ, чтобы допустить безконечно малыя разстоянія, распространили это отношеніе также и на тотъ случай, когда pr подходитъ безконечно близко къ ab, такъ что, напримѣръ, разстояніе ap дѣлается равнымъ dx, и получается уравненіе

$$\pi . dx^2 = \pi . a^2 - \pi (a^2 - dx^2),$$

которое въ дѣйствительности оказывается просто тождествомъ. Но въ этомъ случаѣ, согласно ихъ представленію, кругъ радіуса pn становится безконечно малымъ второго порядка; кольцо, которое остается послѣ вычитанія круга радіуса pm изъ круга радіуса pr, получитъ теперь ширину *)

$$mr = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx^2}{a} + \frac{1}{2 . 4} \cdot \frac{dx^4}{a^3} + \cdots\cdots,$$

которая сама представляетъ безконечно малую величину второго порядка. Если-же принять окончательно, что pr переходитъ въ ab, то безконечно малый кругъ стягивается въ одну точку a, а безконечно узкое кольцо ширины mr превращается въ окружность радіуса ab. Поэтому считали возможнымъ заключить, что простой центръ a любого круга радіуса ab имѣетъ одинаковую величину съ его окружностью.

Обманчивость этого заключенія произошла, главнымъ образомъ, вслѣдствіе введенія безконечно малыхъ. Оно же и приводитъ читателя къ ряду мыслей, которыя не даютъ ему замѣтить, какъ много несообразнаго содержится и въ утвержденіи, что отъ круга радіуса pn, когда вмѣсто точки p берется окончательно точка a, и когда радіусъ pn уже больше не существуетъ, остается еще, однако, центръ a, и въ утвержденіи, что кольцо, получаемое отъ вычитанія круга съ меньшимъ радіусомъ pm изъ круга съ бóльшимъ радіусомъ pr, когда оба радіуса, а слѣдовательно, и оба круга, сдѣлаются равными другъ другу, обращается въ окруж-

---

*) $mr = a - \sqrt{(a^2 - dx)^2} = a - a\left(1 - \left(\frac{dx}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Прим. ред.

ность того круга, который былъ раньше бо́льшимъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ безконечно малыхъ величинъ, конечно, привыкли считать тѣ-же самыя величины то равными между собою, то одну больше или меньше другой на безконечно малую величину высшаго порядка, то совершенно равными нулю. Если мы будемъ выводить правильныя заключенія, то изъ правильно составленнаго уравненія

$$\pi \,.\, pn^2 = \pi \,.\, pr^2 - \pi \,.\, pm^2,$$

въ которомъ сравниваются только величины (площадей) круговъ, о которыхъ идетъ рѣчь, мы можемъ заключить только, что въ случаѣ, когда pr и pm станутъ равными между собою, кругъ радіуса pn не будетъ имѣть никакой величины и потому не будетъ вовсе существовать.

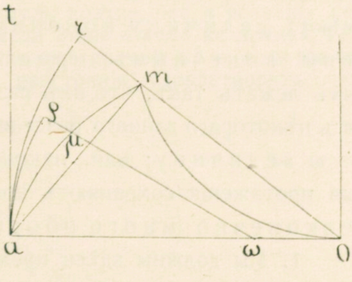
Конечно, справедливо (и я самъ установилъ посылки, ведущія къ этой истинѣ, въ § 41), что существуютъ круги съ периферіей и безъ нея, и что это не измѣняетъ ихъ величины, которая зависитъ только отъ величины ихъ радіуса. Кто-нибудь могъ-бы вывести отсюда еще новое мнимое доказательство предложенія Галилея, исходя изъ требованія, допустимаго во всякомъ случаѣ, чтобы воображать себѣ кругъ радіуса pm безъ периферіи, а кругъ радіуса pr съ периферіей. Тогда, послѣ отнятія круга радіуса pm отъ круга радіуса pr и перехода отъ pr къ ab, въ дѣйствительности останется только окружность круга радіуса ab. Однако, и теперь все-таки невозможно говорить о кругѣ около a, который стягивается въ одну точку, и еще менѣе будетъ возможно ссылаться на вышеприведенное уравненіе съ цѣлью вывести изъ него слѣдствіе, что точка a и извѣстная окружность будутъ равны между собою, такъ какъ сказанное уравненіе имѣетъ въ виду только величины трехъ круговъ, взятыхъ съ периферіями или безъ нихъ.

§ 47.

Самъ изобрѣтатель этого примѣра, какъ уже было упомянуто выше, предложилъ его не съ тою цѣлью, чтобы ему удивлялись, какъ научной истинѣ. Однако, какъ серьезную истину, излагаютъ слѣдующее предложеніе объ обыкновенной циклоидѣ. Циклоида имѣетъ безконечно большую кривизну въ точкѣ ея встрѣчи съ основаніемъ, или (что представляетъ то же самое) она въ этой точкѣ имѣетъ безконечно малый радіусъ кривизны и перпендикулярна въ ней къ основанію. Это утвержденіе совершенно справедливо, если понимать его такъ, что радіусъ кривизны безконечно уменьшается, когда дуга циклоиды безконечно приближается къ основанію; а также, что направленіе ея въ этой точкѣ перпендикулярно къ основанію. Но то, что говорится о радіусѣ кривизны безконечно маломъ или (выражаясь правильнѣе) обращающимся въ нуль, сводится лишь къ слѣдующему. Кривая, какъ извѣстно, простирается безконечно въ обѣ стороны надъ основаніемъ и, слѣдовательно, не имѣетъ концовъ; поэтому въ разсматриваемой точкѣ сходятся также двѣ дуги и притомъ такъ, что будучи перпендикулярны къ основанію, онѣ образуютъ здѣсь остріе, а именно такое остріе, въ которомъ обѣ имѣютъ одно и то же направленіе или (по менѣе правильному выраженію) направленія ихъ образуютъ уголъ, равный нулю.

Однако, можно убѣдиться съ помощью вычисленій, что все это такъ и есть на самомъ дѣлѣ, и все таки не понимать, какъ это происходитъ или даже, какъ это возможно. Чтобы сдѣлать и это очевиднымъ, а это необходимо для разрѣшенія парадокса, мы должны сперва понять, почему направленіе, въ которомъ поднимается обыкновенная циклоида надъ своимъ основаніемъ, является перпендикулярнымъ.

Изъ самаго способа построенія обыкновенной циклоиды (черезъ каждую точку O основанія проводятъ дугу круга, который, касаясь основанія, имѣетъ радіусъ, равный радіусу образующаго круга, и, отсѣкая отъ дуги часть Om, равную по длинѣ разстоянію точки O отъ начальной точки a, разсматриваютъ m, какъ точку циклоиды) обнаруживается тотчасъ-же, что уголъ maO тѣмъ ближе подходитъ къ прямому, чѣмъ ближе точка O подходитъ къ a, такъ какъ уголъ mOa, который измѣряется половиной дуги om, дѣлается все меньше и меньше, а отношеніе обѣихъ сторонъ Oa и Om въ треугольникѣ mOa все болѣе и болѣе приближается къ отношенію равенства; поэтому и углы при третьей сторонѣ am отличаются все меньше и меньше отъ прямого. Дѣйствительно, вычисленіе показываетъ это совершенно ясно. Отсюда сверхъ того слѣдуетъ, что дуга циклоиды am лежитъ всѣми своими точками по одну сторону хорды am, а именно между



нею и возставленнымъ въ точкѣ a перпендикуляромъ at и, слѣдовательно, этотъ перпендикуляръ опредѣляетъ направленіе кривой въ точкѣ a. Далѣе, если мы изъ точки O, какъ центра, опишемъ радіусомъ Oa дугу, выходящую изъ точки a, то она, очевидно, пересѣчетъ хорду Om только въ точкѣ ея продолженія r, такъ какъ должно быть $Or = Oa > Om$. Если μ есть какая-нибудь точка кривой, лежащая еще ближе къ a, то существуетъ для нея другая точка ω, лежащая на aO еще ближе къ a и имѣющая то свойство, что для хорды $\omega\mu$ будетъ справедливо то же самое, что только что было сказано объ Om, а именно, что дуга, описанная изъ a, какъ центра, радіусомъ ωa, встрѣчаетъ продолженіе $\omega\mu$ въ сторону точки μ въ нѣкоторой точкѣ ρ. Но, вслѣдствіе того, что $\omega a < Oa$, дуга $a\rho$ лежитъ внутри дуги окружности ar, т. е. между дугой циклоиды $a\mu$ и дугой окружности ar. Мы видимъ поэтому, что для каждой дуги окружности ar (какимъ-бы малымъ радіусомъ Oa она ни была описана), которая касается циклоиды am въ a, существуетъ другая дуга $a\rho$, которая въ этой области подходитъ къ циклоидѣ еще ближе. Другими словами, не существуетъ столь малаго круга, который можно было бы разсматривать, какъ мѣру кривизны въ a, если здѣсь кривизна существуетъ. Поэтому здѣсь въ дѣйствительности нѣтъ никакой кривизны, и кривая, которая не оканчивается въ этой точкѣ, имѣетъ здѣсь, какъ мы уже знаемъ, остріе.

§ 48.

Часто находили парадоксальнымъ также и то, что нѣкоторыя пространственныя протяженія, простираясь въ безконечномъ пространствѣ (т. е. имѣя точки, разстояніе которыхъ другъ отъ друга превосходитъ всякое данное разстояніе), тѣмъ не менѣе, имѣютъ величину конечную; другія-же, которыя ограничены конечнымъ пространствомъ (т. е. всѣ точки которыхъ лежатъ такъ, что ихъ разстоянія другъ отъ друга не превосходятъ нѣкотораго даннаго разстоянія), имѣютъ безконечно большую величину; или, наконецъ, что, нѣкоторыя пространственныя протяженія сохраняютъ конечную величину, хотя и дѣлаютъ безконечно много оборотовъ вокругъ одной точки.

1. Мы должны здѣсь прежде всего различать, слѣдуетъ-ли понимать подъ пространственнымъ протяженіемъ, о которомъ будетъ рѣчь, цѣлое, состоящее изъ нѣсколькихъ, отдѣленныхъ другъ

отъ друга, частей (напримѣръ, гипербола о четырехъ вѣтвяхъ), —или вполнѣ односвязное цѣлое, т. е. протяженіе, не имѣющее ни одной протяженной части, въ которой не было-бы, по крайней мѣрѣ. одной точки такого свойства, что, если ее присчитать къ остальнымъ частямъ, то она составитъ съ ними опять одно протяженіе.

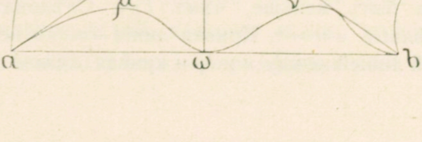
Что протяженіе, состоящее изъ отдѣленныхъ другъ отъ друга частей, можетъ простираться въ безконечное пространство, не дѣлаясь само вслѣдствіе этого безконечнымъ,—этого не найдетъ страннымъ никто, кто только подумаетъ, что и безконечный рядъ величинъ, убывающихъ въ геометрической прогрессіи, представляетъ только конечную сумму. Въ этомъ смыслѣ можетъ, конечно, и линія простираться въ безконечность, оставаясь при этомъ конечной, какъ напримѣръ, та, которая получится, если мы изъ данной точки a въ данномъ направленіи aR отложимъ ограниченную прямую ab, затѣмъ отложимъ въ нѣкоторомъ разстояніи, остающемся все время неизмѣннымъ, прямую cd, которая вдвое меньше предыдущей, и будемъ поступать по тому-же закону, продолжая этотъ процессъ безконечно.

Если-же мы говоримъ (что и будемъ дѣлать впредь постоянно) только о такихъ пространственныхъ протяженіяхъ, которыя представляютъ односвязное цѣлое, то ясно, конечно, что нельзя найти среди протяженій наинизшаго порядка, т. е. среди линій, ни одной, которая-бы простиралась въ безконечность и сама не имѣла бы безконечной величины (длины). Въ самомъ дѣлѣ, это представляетъ необходимое слѣдствіе извѣстной истины, что только прямая линія есть кратчайшая вполнѣ односвязная линія, соединяющая двѣ данныя точки *).

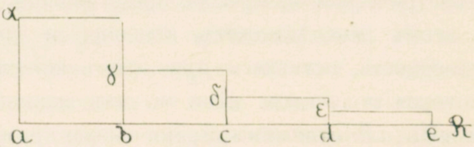
---

*) Доказательство этой истины столь кратко, что я позволю себѣ помѣстить его въ этомъ примѣчаніи. Если линія $amonb$ не прямая, то на ней должна находиться точка o, лежащая внѣ прямой ab и, если мы опустимъ перпендикуляръ $o\omega$ на ab, то разстоянія удовлетворятъ неравенствамъ

$$a\omega < ao, \quad b\omega < bo.$$



Иное мы видимъ въ случаѣ поверхностей, которыя, при той-же длинѣ, можно уменьшить сколь угодно, уменьшая ширину, а также и въ случаѣ тѣлъ, которыя, при той же длинѣ и ширинѣ, могутъ быть сколь угодно уменьшены путемъ уменьшенія ихъ высоты. Отсюда понятно, почему поверхности, при безконечной длинѣ, и тѣла, при безконечной длинѣ и ширинѣ, сохраняютъ иногда конечную величину. Мы представимъ примѣръ, понятный даже для самого несвѣдующаго. Представимъ себѣ, что на безконечно простирающейся прямой aR отложены равные отрѣзки $ab = 1 = bc = cd$ и т. д. до безконечности; далѣе, надъ первымъ отрѣзкомъ ab вообра-



зимъ квадратъ $b\alpha$, надъ вторымъ bc—прямоугольникъ $c\gamma$, который имѣетъ только половину высоты bc, и такъ надъ каждымъ слѣдующимъ отрѣзкомъ — прямоугольникъ, который вдвое ниже, чѣмъ предыдущій. Тогда легко убѣдиться, что связная площадь, представляющаяся здѣсь, простирается въ безконечность и, однако, будетъ не больше, чѣмъ 2. Не болѣе трудно будетъ представить себѣ кубъ, сторона котораго $= 1$, и приставить мысленно къ нему снизу второе тѣло, основаніе котораго представляетъ квадратъ со стороною 2, т. е. въ 4 раза большій, чѣмъ основаніе предыдущаго куба, высота-же составляетъ только $\frac{1}{8}$; къ этому приставить снизу третье тѣло, основаніе котораго вчетверо больше основанія предыдущаго, высота-же составляетъ только $\frac{1}{8}$ высоты предыдущаго; представимъ

Но такъ какъ всѣ системы двухъ точекъ подобны между собою, то между точками a и ω существуетъ линія $a\mu\omega$, подобная той части amo данной линіи $amonb$, которая лежитъ между точками a и o; между точками b и ω существуетъ другая линія $b\nu\omega$, подобная той части bno данной линіи $bnoma$, которая лежитъ между точками b и o. Но это подобіе, требуетъ, чтобы длина прямой $a\omega$ относилась къ длинѣ $a\mu\omega$ такъ, какъ длина прямой ao къ длинѣ части amo, и чтобы длина прямой $b\omega$ относилась къ длинѣ $b\nu\omega$ такъ, какъ длина прямой bo къ длинѣ части bno. А такъ какъ $a\omega < ao$, то $a\mu\omega < amo$, и такъ какъ $b\omega < bo$, то и длина $b\nu\omega$ должна быть меньше, чѣмъ bno. Слѣдовательно, и цѣлое $a\mu\omega\nu b$ меньше цѣлаго $amonb$. Кривая линія $amonb$ не будетъ, слѣдовательно, кратчайшей линіей между a и b, и кривая $a\mu\omega\nu b$ будетъ короче ея.

себѣ продолженіе этого процесса по тому же закону до безконечности. Тогда будетъ понятно, что длина и ширина подставляемыхъ здѣсь тѣлъ увеличивается до безконечности, хотя ихъ объемъ дѣлается все меньше и меньше, а именно, каждое послѣдующее тѣло составляетъ только половину предыдущаго, такъ что величина пирамидальнаго цѣлаго, которое получается такимъ образомъ, несмотря на безконечное основаніе, не превзойдетъ никогда объема, равнаго 2.

2. Вышеразсмотрѣнный случай, въ которомъ протяженіе, имѣющее въ себѣ нѣчто безконечное (безконечную длину или ширину), оказывается имѣющимъ, однако, величину конечную, можетъ встрѣтиться только въ двухъ высшихъ родахъ протяженія, въ поверхностяхъ и тѣлахъ, а не въ линіяхъ. Теперь-же мы будемъ говорить о случаѣ противоположномъ, когда протяженіе, кажущееся конечнымъ, потому что ограничено конечнымъ пространствомъ, на самомъ дѣлѣ имѣетъ, однако, величину безконечную. Этотъ случай можетъ имѣть мѣсто только въ двухъ низшихъ родахъ протяженія, въ линіяхъ и поверхностяхъ, но — никогда не въ тѣлахъ. Тѣло, не имѣющее такихъ точекъ, взаимныя разстоянія которыхъ превосходили бы любую данную величину, навѣрно не можетъ быть никогда безконечно большимъ. Это вытекаетъ непосредственно изъ извѣстной истины, что изъ всѣхъ тѣлъ, въ которыхъ взаимныя разстоянія точекъ не превышаютъ даннаго разстоянія ε, наибольшимъ будетъ шаръ діаметра ε. Въ самомъ дѣлѣ, шаръ, описанный изъ одной изъ этихъ точекъ радіусомъ ε, заключаетъ всѣ эти точки, а величина шара равна только $\frac{\pi}{6} \cdot \varepsilon^3$; поэтому каждое другое тѣло, не превосходящее этого пространства, будетъ необходимо меньше, чѣмъ $\frac{\pi}{6} \cdot \varepsilon^3$. Линій-же, которыя можно начертить на протяженіи хотя-бы самой малой поверхности, напримѣръ, квадратнаго фута, существуетъ безконечное множество, и возможно дать каждой изъ нихъ конечную величину, напримѣръ, длину квадратнаго фута, а прибавленіемъ одной или даже безконечно многихъ соединительныхъ линій можно образовать изъ нихъ всѣхъ одну связную линію, длина которой въ такомъ случаѣ будетъ несомнѣнно безконечной. Совершенно такъ же существуетъ безконечное количество поверхностей, которыя можно вписать въ пространство сколь угодно малаго тѣла, напримѣръ, кубическаго фута,

и каждой изъ нихъ мы можемъ дать величину, напримѣръ, квадратнаго фута; а прибавивъ одну или безконечное количество соединительныхъ поверхностей, мы можемъ соединить ихъ всѣ въ одну, величина которой, безспорно, будетъ безконечно большой. Все это не должно удивлять никого, кто только не забываетъ, что линіи, плоскости и тѣла измѣряются не одной и той-же единицей мѣры, и что, хотя множество точекъ въ каждой скєль угодно малой линіи безконечно, нужно, однако, допустить, что въ каждой сколь угодно малой, поверхности это множество, во всякомъ случаѣ, въ безконечное число разъ больше, чѣмъ въ линіи, и также, наконецъ, несомнѣнно, что въ тѣлѣ оно въ безконечное число разъ больше, чѣмъ въ поверхности.

3. Въ третьемъ парадоксѣ, о которомъ мы упомянули въ началѣ этого параграфа, говорится, что существуютъ протяженія, которыя дѣлаютъ безконечное число оборотовъ вокругъ одной точки и сохраняютъ все-таки при этомъ величину конечную. Если это протяженіе должно быть линейнымъ, то, какъ мы видѣли только что въ No. 1, это можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда вся линія находится въ конечномъ пространствѣ. При этомъ же условіи нѣтъ ничего непонятнаго въ томъ, что она сохраняетъ конечную длину, хотя и дѣлаетъ безконечно много оборотовъ вокругъ данной точки. Для этого должно быть только соблюдено еще дальнѣйшее условіе, что эти обороты, начиная съ нѣкоторой конечной величины, безконечно убываютъ надлежащимъ образомъ. Требованіе-же это можетъ быть выполнено, благодаря тому обстоятельству, что обороты будутъ происходить вокругъ одной только точки. Въ самомъ дѣлѣ, благодаря этому оказывается возможнымъ, чтобы разстояніе отдѣльныхъ точекъ одного оборота отъ центра, а слѣдовательно, также и ихъ разстоянія между собой, убывали безконечно, при чемъ, какъ это видно уже для окружности, и длина этого оборота можетъ быть безконечно уменьшена. Логариѳмическая спираль сама собой навѣрно представится нашему читателю, какъ примѣръ линіи, о которой мы здѣсь говорили; слѣдуетъ принять во вниманіе только ту ея часть, которая, начиная съ нѣкоторой данной точки, постоянно приближается къ центру, никогда однако его не достигая.

Если же пространственное протяженіе, дѣлающее безконечно много оборотовъ вокругъ одной данной точки, должно быть поверхностью или тѣломъ, то не представляется надобности даже и въ ограничительномъ условіи, чтобы ни одна изъ точекъ протяженія не удалялась отъ центра дальше опредѣленнаго разстоянія. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы возможно скорѣе понять мою мысль, пусть читатель представитъ себѣ упомянутую спираль, какъ нѣкоторый родъ линіи абсциссъ, изъ каждой точки которой проводятся ординаты перпендикулярно къ ней и ея плоскости. Совокупность всѣхъ этихъ ординатъ образуетъ тогда, очевидно, поверхность (изъ рода цилиндрическихъ), которая, съ одной стороны, приближается въ безконечномъ количествѣ оборотовъ къ центру, никогда не достигая его; съ другой-же стороны—удаляется въ безконечность. Величина этой поверхности будетъ зависѣть отъ закона, по которому мы будемъ увеличивать или уменьшать ординаты. Часть, приближающаяся къ центру, останется всегда конечной, если только ординаты этой стороны (т. е. только ординаты, отвѣчающія конечной вѣтви линіи абсциссъ) не будутъ увеличиваться до безконечности, потому что каждая поверхность, которой абсциссы и ординаты не возрастаютъ до безконечности, будетъ конечной. Но и та часть поверхности, которая находится надъ другой вѣтвью спирали, удаляющейся въ безконечность, останется конечной, если только ординаты убываютъ въ болѣе быстромъ отношеніи, чѣмъ возрастаютъ абсциссы (т. е. длины дугъ спирали). Поэтому, если мы примемъ за линію абсциссъ натуральную спираль, въ которой вѣтвь, приближающаяся къ центру (считая отъ точки, въ которой радіусъ $= 1$), имѣетъ длину $\sqrt{2}$, и если для ограниченія поверхности возьмемъ дугу гиперболы высшаго порядка, имѣющей уравненіе $yx^2 = a^3$, то та часть этой поверхности, которая отвѣчаетъ $x = a$ и всѣмъ бóльшимъ значеніямъ x, будетъ имѣть только величину a^2, между тѣмъ какъ другая, отвѣчающая всѣмъ меньшимъ значеніямъ x, будетъ увеличиваться до безконечности. Если-же мы возьмемъ $a > \sqrt{2}$ и переставимъ конечную точку абсциссы $x = a$ въ ту точку спирали, которая имѣетъ радіусомъ 1, то центръ совпадаетъ съ конечной точкой абсциссы $x = a - \sqrt{2}$, и потому будетъ имѣть конечную ординату *), а часть поверхности, отвѣчающая этой вѣтви спирали, будетъ не больше, чѣмъ

$$a^3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right) = a^2 - \frac{a^3}{a - \sqrt{2}} = -\left(\frac{a^3}{a - \sqrt{2}} - a^2\right);$$

*) Гипербола не перемѣщается. *Прим. ред.*

вся-же поверхность, покрывающая спираль по объ стороны (чтобы получить величину этой поверхности, мы должны сложить величины обѣихъ ея частей, беря ихъ положительныя значенія), будетъ поэтому $= a^2 + (\frac{a^3}{a-\sqrt{2}} - a^2) = \frac{a^3}{a-\sqrt{2}}$. Такимъ образомъ, напримѣръ, для $a = 2$ вся поверхность выражается только числомъ $4(2+\sqrt{2})$.

Подобныя обстоятельства имѣютъ мѣсто также для тѣлесныхъ протяженій. Слѣдуетъ только замѣтить, что здѣсь часть тѣла, стремящаяся къ центру, стала бы входить въ пространство своихъ собственныхъ оборотовъ, если-бы мы стали увеличивать ея протяженіе въ ширину и толщину. Если желательно избѣжать этого и имѣть тѣло, всѣ части котораго лежатъ каждая внѣ другой, то можно достигнуть этой цѣли, напримѣръ, такъ: возьмемъ поверхность такого рода, какъ разсмотрѣнная нами выше, которая, при приближеніи къ центру, все увеличивается въ ширину, и придадимъ ей еще третье измѣреніе,—толщину, которая, однако, при приближеніи къ центру, уменьшалась-бы въ такомъ отношеніи, чтобы составлять постоянно менѣе половины разстоянія между двумя ближайшими оборотами спирали.

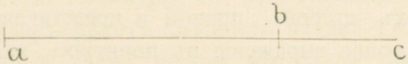
§ 49.

Пространственныя протяженія, имѣющія безконечную величину, находятся къ этой самой величинѣ въ столь разнообразныхъ и часто столь парадоксальныхъ отношеніяхъ, что мы должны разсмотрѣть въ отдѣльности, по крайней мѣрѣ, нѣкоторыя изъ этихъ отношеній.

Что протяженіе, заключающее въ себѣ безконечное множество точекъ, вслѣдствіе этого еще не должно быть непрерывнымъ протяженіемъ, и что въ непрерывномъ протяженіи величина его вовсе не опредѣляетъ множества его точекъ; что изъ двухъ протяженій, которыя мы считаемъ равновеликими, одно можетъ заключать на безконечное множество точекъ больше или меньше, чѣмъ другое; далѣе, что поверхность можетъ даже заключать въ себѣ въ безконечное число разъ больше или меньше линій, тѣло въ безконечное число разъ больше или меньше поверхностей, чѣмъ протяженіе того-же рода, которое мы считаемъ съ нимъ равновеликимъ—все это мы въ правѣ считать достаточно разъясненнымъ выше.

1. Первое, на что мы хотимъ обратить вниманіе читателя, это то, что множество точекъ, которое заключаетъ въ себѣ хотя-бы самая короткая прямая az, должно быть разсматриваемо, какъ множество, которое въ безконечно большое число разъ больше безконечнаго же множества, получаемаго изъ перваго слѣдующимъ образомъ: начиная съ одного изъ концовъ, съ точки a, беремъ въ надлежащемъ разстояніи вторую точку b, за нею, въ меньшемъ разстояніи, третью точку c, и такъ продолжаемъ безъ конца, уменьшая эти разстоянія по такому закону, чтобы безконечное ихъ множество въ суммѣ было равно или меньше разстоянія az. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ безконечно многія части ab, bc, cd... на которыя распадается az, всѣ суть линіи конечныя, то съ каждой изъ нихъ можно поступить точно такъ-же, какъ мы только что поступили съ az, т. е., въ каждой можно будетъ опять указать такое-же безконечное множество точекъ, какъ и въ az, и эти точки будутъ находиться также въ az. Слѣдовательно, въ цѣлой линіи bz такое безконечное множество точекъ должно заключаться безконечное число разъ.

2. Каждой прямой или даже вообще пространственному протяженію, которое (геометрически) равно другому (т. е. совпадаетъ съ нимъ во всѣхъ признакахъ, которые, помощью сравненія съ даннымъ разстояніемъ, можно выразить въ понятіяхъ), должно приписать одинаковое множество точекъ, если мы въ нихъ одинаково выберемъ границы, напримѣръ, въ линіяхъ, присчитаемъ концы или не присчитаемъ ихъ. Въ самомъ дѣлѣ, противное могло бы имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если бы существовали разстоянія, которыя, будучи равными, допускали-бы неодинаковое множество точекъ между тѣми точками, между которыми они служатъ разстояніями. Однако, это противорѣчитъ понятію, которое мы связываемъ со словомъ «геометрически равный», потому что мы называемъ разстояніе ac только тогда



неравнымъ разстоянію ab, а именно бóльшимъ, когда точки b и c лежатъ по одну сторону точки a, и точка b находится между a и c, такъ что всѣ точки, лежащія между a и b, будутъ лежать также между a и c, но не наоборотъ, т. е. не всѣ точки, лежащія между a и c, будутъ лежать также и между a и b.

3. Если мы обозначимъ множество точекъ, лежащихъ между a и b, вмѣстѣ съ a и b, черезъ E, и примемъ прямую ab за единицу всѣхъ длинъ, то множество точекъ прямой ac, которая имѣетъ длину n (подъ n мы разумѣемъ теперь только цѣлое число), если присчитать и ея крайнія точки a и c, будетъ равно $nE-(n-1)$.

4. Множество точекъ, содержащихся въ площади квадрата, сторона котораго равна 1 (въ обыкновенной мѣрѣ площадей), будетъ равно E^2, если мы присчитаемъ и периферію ея.

5. Множество точекъ въ каждомъ прямоугольникѣ, одна сторона котораго имѣетъ длину m, другая—длину n, будетъ равно $mnE^2-[n(m-1)+m(n-1)]E+(m-1)(n-1)$, если присчитать и периферію его.

6. Множество точекъ въ кубѣ, сторона котораго $=1$ (въ обыкновенной мѣрѣ тѣлъ), будетъ E^3, если мы присчитаемъ и точки его поверхности.

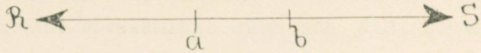
7. Множество точекъ въ параллелепипедѣ, стороны котораго имѣютъ длины m, n, r, съ присоединеніемъ поверхности, будетъ равно

$$mnr.E^3-[nr(m-1)+mr(n-1)+mn(r-1)]E^2 + [m(n-1)(r-1)+n(m-1)(r-1) + r(m-1)(n-1)]E-(m-1)(n-1)(r-1).$$

8. Прямой, простирающейся безконечно въ обѣ стороны, мы должны приписать безконечную длину и множество точекъ, которое будетъ въ безконечное число разъ больше, чѣмъ множество точекъ прямой, принятой за единицу и равной E. Мы должны признать также, что всѣ такія прямыя имѣютъ равную длину и равное множество точекъ, такъ какъ опредѣляющія ихъ части, съ помощью которыхъ могутъ быть опредѣлены для двухъ такихъ прямыхъ двѣ точки, черезъ которыя онѣ проходятъ (если мы возьмемъ одинаковое разстояніе между этими точками), будутъ не только подобны другъ другу, но и (геометрически) равны.

9. Положеніе любой точки на такой прямой совершенно одинаково съ обѣихъ сторонъ прямой и представляетъ лишь такіе признаки, допускающіе выраженіе въ понятіяхъ, какіе представляетъ положеніе каждой другой точки. Тѣмъ не менѣе, нельзя сказать, что такая точка раздѣляетъ линію на двѣ части одинаковой длины, потому что, если бы могли сказать это объ одной точкѣ a, то, на томъ же основаніи, мы бы должны были утверждать это о каждой другой точкѣ b, что однако заключаетъ въ себѣ противо-

рѣчіе, такъ какъ если бы длина aR была равна длинѣ aS, то не могло бы быть $bR\,(= ba + aR) = bS\,(= aS - ab)$.



Напротивъ того, мы должны утверждать, что прямая, простирающаяся неограниченно въ обѣ стороны, совсѣмъ не имѣетъ середины, т. е. не имѣетъ такой точки, которая могла бы быть опредѣлена только съ помощью выражаемаго въ понятіяхъ отношенія ея къ этой линіи.

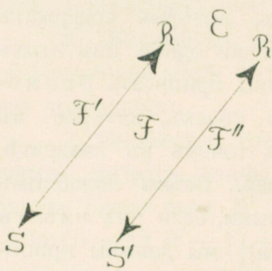
10. Плоской поверхности, которую заключаютъ между собою двѣ параллельныя прямыя, неограниченныя съ обѣихъ сторонъ (т. е. совокупности всѣхъ тѣхъ точекъ, которыя содержатъ перпендикуляры, опущенные изъ каждой точки одной изъ этихъ параллельныхъ прямыхъ на другую), мы должны приписать безконечно большую площадь и множество точекъ, которое въ безконечное число разъ больше множества точекъ въ квадратѣ, равномъ E^2 и принятомъ за единицу площадей. Всѣмъ подобнымъ полосамъ, ограниченнымъ параллельными прямыми, если онѣ имѣютъ одинаковую ширину (длина перпендикуляра), мы должны приписать равную величину и равное множество точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, ихъ также можно опредѣлить такимъ образомъ, что опредѣляющія части не только подобны, но и равны геометрически между собой, напримѣръ, если мы опредѣляемъ ихъ съ помощью равностороннихъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ равными сторонами, при чемъ будетъ установлено, что одна изъ параллельныхъ проходитъ черезъ основаніе, а другая черезъ вершину треугольника.

11. Положеніе любого перпендикуляра въ такой полосѣ, ограниченной параллельными прямыми, одинаково съ обѣихъ сторонъ плоскости и не представляетъ никакихъ другихъ, выражаемыхъ въ понятіяхъ, признаковъ, по сравненію съ положеніемъ каждаго другого перпендикуляра. Несмотря на это, невозможно сказать, что такой перпендикуляръ дѣлитъ плоскость на двѣ геометрически равныя другъ другу части, потому что такое предположеніе привело бы насъ, какъ въ № 9, къ противорѣчію, чѣмъ и доказывается его неправильность.

12. Если мы возьмемъ плоскость, простирающуюся во всѣхъ направленіяхъ въ безконечность, то мы должны приписать ей безконечно большую площадь и множество точекъ, которое въ безконечное число разъ больше множество точекъ, заключающихся въ по-

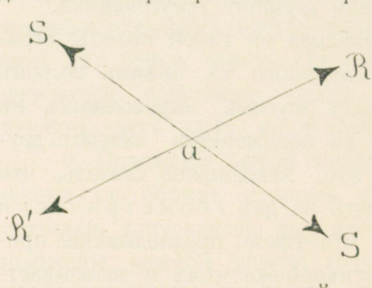
лосѣ, ограниченной параллельными прямыми. Совершенно такъ, какъ подобнымъ полосамъ одинаковой ширины, мы должны также приписать и безграничнымъ плоскостямъ равное безконечное множество точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, для нихъ оказывается также вѣрнымъ то, что онѣ могутъ быть опредѣлены не только при помощи подобія, но и (геометрическаго) равенства; напримѣръ, если мы будемъ опредѣлять каждую изъ нихъ съ помощью трехъ точекъ, лежащихъ на ней и образующихъ подобные и равные треугольники.

13. Положеніе неограниченной прямой, взятой произвольно на такой безграничной плоскости, совершенно одинаково на обѣихъ сторонахъ плоскости; оно представляетъ, кромѣ того, тѣ же самые,

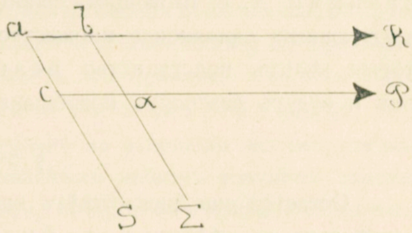


выражаемые въ понятіяхъ, признаки, какъ и положеніе всякой другой прямой этого рода. Однако, невозможно сказать, что такая прямая раздѣляетъ плоскость на двѣ геометрически равныя части, потому что, если бы стали утверждать это о прямой RS, то должны были бы допустить это и въ отношеніи всякой другой $R'S'$, что ведетъ, однако, къ явному противорѣчію, какъ только мы возьмемъ эти прямыя параллельными между собою.

14. Двѣ неограниченныя прямыя, которыя, находясь въ одной плоскости, не параллельны между собою и, слѣдовательно, гдѣ-нибудь пересѣкаются и образуютъ четыре угла (по-парно равныхъ), дѣлятъ все пространство неограниченной плоскости на четыре части,



изъ которыхъ каждыя двѣ, заключающіяся въ равныхъ (подобныхъ) углахъ $RaS = R'aS'$, $RaS' = R'aS$, подобны между собою. Каждое изъ этихъ четырехъ пространствъ, заключающихся въ углахъ, содержитъ въ себѣ безконечное множество, простирающихся съ одной стороны въ безконечность, полосъ любой ширины, ограниченныхъ параллельными прямыми и подобныхъ тѣмъ, о которыхъ мы говорили въ № 11. Если мы мысленно отбросимъ любое конечное множество полосъ, то останется еще угловое пространство, заключающееся въ углѣ, равномъ первоначальному. Но совершенно такъ же, какъ послѣ объясненій, изложенныхъ въ № 9 и № 11, мы не въ правѣ назвать равными стороны этихъ угловъ или полосы, которыя являются частями занимаемаго ими пространства, — точно такъ же, и на подобныхъ-же основаніяхъ, мы не въ правѣ назвать равными по величинѣ и эти безконечныя угловыя пространства, заключенныя хотя бы и въ равныхъ углахъ. Такъ, относительно двухъ частей плоскости, ограниченныхъ углами RaS и $P\alpha\Sigma$, мы видимъ ясно, что первая больше второй, хотя углы и равны другъ другу, если $b\Sigma \parallel aS$, $cP \parallel aR$.



15. Пространство, которое заключаютъ между собою двѣ параллельныя безграничныя плоскости (т. е. совокупность всѣхъ тѣхъ точекъ, которыя находятся на всѣхъ перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ каждой точки одной плоскости на другую), этотъ (если его такъ можно назвать) безграничный тѣлесный слой, мы должны считать, во всякомъ случаѣ, безконечно большимъ, какова бы ни была его ширина (т. е. длина такого перпендикуляра). При равной ширинѣ двухъ такихъ тѣлесныхъ слоевъ мы можемъ назвать равными эти величины, а также можемъ считать равными множество точекъ въ двухъ такихъ тѣлесныхъ слояхъ, основываясь на томъ же заключеніи, которымъ мы пользовались уже много разъ (№№ 8, 10, 12).

16. Положеніе, которое занимаетъ въ безграничномъ тѣлесномъ слоѣ произвольно взятая, перпендикулярная къ его плоскостямъ и ограниченная параллельными прямыми полоса, является совершенно сходнымъ съ обѣихъ сторонъ тѣлеснаго слоя, и положеніе всякой другой полосы этого рода въ отношеніи къ этому самому безграничному тѣлесному слою, или къ любому другому, является также подобнымъ. Однако, нельзя сказать, чтобы обѣ части тѣлеснаго слоя, отдѣленныя одна отъ другой полосою, должны были имѣть непремѣнно равныя величины.

17. Двѣ неограниченныя пересѣкающіяся плоскости раздѣляютъ все неограниченное пространство на четыре большія части,

изъ которыхъ каждыя двѣ противолежащія безспорно подобны одна другой, но не должны еще считаться вслѣдствіе этого равными.

18. Такъ-же мало слѣдуетъ считать равными по величинѣ два тѣлесныхъ пространства, которыя заключаются между продолженными въ безконечность гранями двухъ подобныхъ или (какъ говорятъ) равныхъ тѣлесныхъ угловъ.

19. Точно такъ-же не слѣдуетъ считать геометрически равными, т. е. имѣющими равную величину, а тѣмъ болѣе заключающими одинаковое множество точекъ, тѣ двѣ части, на которыя дѣлитъ пространство безконечная плоскость, хотя онѣ и будутъ безспорно подобными.

§ 50.

Остается еще разсмотрѣть кратко тѣ парадоксы, которые мы встрѣчаемъ въ области метафизики и физики.

Въ этихъ наукахъ я устанавливаю слѣдующія предложенія: «во вселенной нѣтъ двухъ совершенно равныхъ вещей, а, слѣдовательно, и двухъ совершенно равныхъ атомовъ или простыхъ субстанцій, но необходимо допустить существованіе подобныхъ простыхъ субстанцій, какъ скоро допускается существованіе сложныхъ тѣлъ въ мірѣ; наконецъ, необходимо также предположить, что всѣ эти субстанціи перемѣнны и постоянно измѣняются». Я утверждаю все это, потому что мнѣ кажется, что это все суть истины, которыя могутъ быть такъ-же строго и ясно доказаны, какъ любое предложеніе въ математикѣ. Несмотря на это, я долженъ опасаться, что бóльшая часть физиковъ отнесется неодобрительно къ этимъ предложеніямъ. Они вѣдь ставятъ себѣ въ заслугу установленіе только такихъ истинъ, которымъ ихъ учитъ опытъ, а опытъ не обнаруживаетъ никакой разницы между мельчайшими частицами тѣла, въ особенности одного рода, напримѣръ, между мельчайшими частицами золота, добытаго изъ того или другого рудника. Далѣе, говорятъ они, опытъ учитъ, конечно, что каждое тѣло сложно, но никто не видѣлъ атомовъ, такъ какъ они, будучи совершенно простыми, не имѣютъ никакого протяженія. Опытъ показываетъ, наконецъ, что различныя вещества, напримѣръ, кислородъ, водородъ и т. д. входятъ между собою то въ одни, то въ другія соединенія и оказываютъ то одно, то другое дѣйствіе, — но чтобы они сами претерпѣвали вслѣдствіе этого внутреннія измѣненія, чтобы, напримѣръ, кислородъ превратился постепенно въ другое вещество, — это, по ихъ мнѣнію, простая выдумка.

1. По моему мнѣнію, ошибочно утверждать, что опытъ учитъ насъ вышеприведеннымъ положеніямъ. Опытъ, простой, непосредственный опытъ или воспріятіе, не соединенное съ извѣстными истинами, касающимися чистыхъ понятій, учитъ насъ только тому, что мы вообще имѣемъ тѣ или другія воспріятія или представленія. Откуда являются эти представленія, вслѣдствіе-ли дѣйствія какого-либо отличнаго отъ насъ предмета, нуждаются-ли они вообще въ какой-нибудь причинѣ, и какія свойства имѣетъ эта причина, — въ этомъ отношеніи непосредственное воспріятіе не учитъ насъ ровно ничему; объ этомъ мы выводимъ заключенія только на основаніи истинъ, касающихся чистыхъ понятій и придумываемыхъ нашимъ разумомъ; заключаемъ мы, въ большинствѣ случаевъ, по простому правилу вѣроятности, о томъ, напримѣръ, что красный цвѣтъ, который мы теперь видимъ, вызванъ болѣзненнымъ состояніемъ нашихъ глазъ, а ощущеніе запаха вызвано близостью цвѣтка. Напротивъ, для того, чтобы замѣтить, что между любыми двумя вещами должно быть какое-нибудь различіе, нѣтъ надобности ни въ какомъ выведенномъ изъ опыта заключеніи простой вѣроятности. Напротивъ того, мы можемъ прійти къ этому съ полной достовѣрностью послѣ небольшаго размышленія. Если A и B — двѣ вещи, то именно вслѣдствіе этого должна имѣть мѣсто истина, что вещь A не есть вещь B, — истина, которая предполагаетъ существованіе двухъ представленій A и B, изъ которыхъ одно служитъ представленіемъ только вещи A, но не B; другое-же только вещи B, но не A. Въ этомъ уже обстоятельствѣ лежитъ, конечно, различіе (и притомъ внутреннее) между вещами A и B. Если мы видимъ такимъ образомъ, что между любыми двумя вещами необходимо есть извѣстныя различія, то какимъ образомъ можемъ мы себѣ позволить сомнѣваться въ такомъ различіи только потому, что мы его иногда не замѣчаемъ. Для того, чтобы его замѣтить, вѣдь нужна особая острота чувствъ и много другихъ обстоятельствъ.

2. Правильно то, что только опытъ учитъ насъ тому, что существуетъ много вещей, оказывающихъ на насъ свое дѣйствіе, и что именно тѣ, которыми обуславливаются наши воспріятія, сложны. Однако, опытъ учитъ насъ этому только въ предположеніи извѣстныхъ истинъ, касающихся чистыхъ понятій, какъ напримѣръ, той,

что различныя дѣйствія вызываются различными причинами, и т. д. Но не менѣе вѣрны и выражающіяся въ понятіяхъ истины, что каждая причина должна быть чѣмъ-то дѣйствительнымъ, что все дѣйствительное есть или субстанція, или совокупность многихъ субстанцій либо свойствъ одной либо многихъ субстанцій; равнымъ образомъ, что свойства, представляющія нѣчто дѣйствительное, не могутъ существовать безъ существованія субстанціи, въ которой они находятся, а совокупности субстанцій не могутъ существовать безъ субстанцій, которыя составляютъ части этихъ совокупностей. Однако, отсюда слѣдуетъ со строгой необходимостью существованіе простыхъ субстанцій, и было бы смѣшнымъ не признавать ихъ существованія только потому, что мы ихъ не видимъ; и это дѣлается еще болѣе несообразнымъ, когда дальнѣйшее размышленіе учитъ, что каждое тѣло, которое мы можемъ воспринимать съ помощью внѣшнихъ чувствъ, должно быть сложно, даже должно быть составлено изъ безконечнаго количества частей.

3. Подобное-же ошибочное заключеніе отъ невоспріятія къ несуществованію получается, при нежеланіи допустить то, что всѣ конечныя субстанціи подлежатъ никогда не прекращающемуся измѣненію. На своей собственной душѣ мы достаточно знаемъ измѣнчивость ея состояній, представленій, свойствъ и силъ; простая аналогія побуждаетъ насъ сдѣлать подобное заключеніе о душахъ животныхъ и о растеніяхъ. Но только основываясь на разумѣ мы въ правѣ принять, что въ дѣйствительности измѣняются всѣ субстанціи, даже и тѣ, которыя въ теченіе столѣтій не обнаруживаютъ никакихъ замѣтныхъ для насъ измѣненій. Кто хочетъ оспаривать это, кто высказывается противъ этого, по крайней мѣрѣ, въ отношеніи такъ называемой мертвой матеріи и ея простыхъ частей, или атомовъ, тотъ вынужденъ утверждать, что всѣ измѣненія, являющіяся намъ въ этой части творенія (если, напримѣръ. кусокъ льда, который былъ только что твердымъ, теперь растаялъ и въ теченіе ближайшаго часа улетучится въ формѣ пара) — что всѣ эти измѣненія (говорю я) суть перемѣны, касающіяся мѣстъ, занимаемыхъ меньшими или бóльшими частицами этихъ тѣлъ, при чемъ въ самихъ частицахъ не происходитъ никакихъ внутреннихъ перемѣнъ. Но какъ же можно не замѣтить противорѣчія въ которое впадаютъ при этомъ объясненіи? Въ самомъ

дѣлѣ, если бы не происходило никакого измѣненія въ простыхъ субстанціяхъ—внутри ихъ, то въ такомъ случаѣ, что могло бы быть причиной перемѣнъ въ отношеніи ихъ мѣстъ, и какія слѣдствія должны были-бы имѣть эти только внѣшнія измѣненія, каковы были-бы ихъ цѣли и по какимъ признакамъ они могли бы быть хотя бы только узнаны? На всѣ эти вопросы можно отвѣтить разумно только въ томъ случаѣ, если признать, что простыя субстанціи, именно тѣ, которыя не совершенны, т. е. могутъ вмѣстить бóльшее количество силъ, чѣмъ въ нихъ есть, по этому самому имѣютъ способность къ измѣненію при взаимодѣйствіи, и если разсматривать ихъ мѣста только какъ такія ихъ опредѣленія, которыя заключаютъ основаніе, почему именно, владѣя данной мѣрой силъ въ данномъ промежуткѣ времени, онѣ вызываютъ одна въ другой именно это, а не большее или меньшее измѣненіе. Только при этомъ предположеніи, столь ясномъ и очевидномъ даже для обыкновеннаго человѣческаго ума, и исчезаетъ всякое противорѣчіе въ ученіи о вселенной; нужно только подняться выше нѣкоторыхъ почти устарѣлыхъ школьныхъ мнѣній для признанія того, что все находится въ полномъ согласіи.

§ 51.

1. Первое изъ этихъ школьныхъ мнѣній, отъ которыхъ мы должны отказаться, есть придуманная прежними физиками мертвая или просто недѣятельная матерія, простыя части которой, если таковыя существуютъ, всѣ равны между собою, вѣчно неизмѣнны и не имѣютъ никакихъ собственныхъ силъ, кромѣ развѣ такъ называемой силы инерціи. Что всегда дѣйствительно, то должно и дѣйствовать, а слѣдовательно, имѣетъ силы для дѣйствія. Субстанція же ограниченная, и поэтому перемѣнная, не можетъ, конечно, имѣть никакой силы, которая по самой своей природѣ не допускала-бы измѣненія въ своемъ дѣйствіи и, слѣдовательно, въ особенности, не можетъ владѣть творческой силой и должна имѣть только силы измѣненія, которыя могутъ быть или имманентными, какъ сила ощущенія, или переходящими, какъ сила движенія.

Какъ-бы тамъ ни было, для того, чтобы научиться постепенно съ достаточной точностью судить о результатахъ, которыя произойдутъ отъ извѣстнаго соединенія многихъ тѣлъ, да будетъ намъ дозволено теперь и послѣ представлять себѣ разсматриваемый случай сначала значительно болѣе простымъ и предположить, вмѣсто безконечнаго множества силъ, которыя здѣсь дѣйствуютъ на самомъ дѣлѣ, присутствіе только нѣкоторыхъ, немногихъ силъ, и даже вообще разсматривать такія тѣла и ихъ свойства, которыя въ дѣйствительности вовсе не существуютъ, съ цѣлью опредѣлить, что́ онѣ могутъ произвести. Но, не обсудивъ надлежащимъ образомъ предмета, мы не въ правѣ предполагать, что результаты, получаемые въ этомъ воображаемомъ случаѣ, согласуются, до извѣстной степени, съ тѣми, которые получатся въ дѣйствительности. Невниманіе къ этой предосторожности, какъ мы впослѣдствіи увидимъ, было причиною различныхъ знаменитыхъ парадоксовъ.

§ 52.

2. Другой школьный предразсудокъ состоитъ въ томъ, что никакое предположеніе непосредственнаго дѣйствія одной субстанціи на другую недопустимо въ наукѣ. Вѣрно только то, что мы никогда не въ правѣ предполагать безъ предварительнаго доказательства, что извѣстное дѣйствіе совершается непосредственно. Вѣрно также, что прекратилась-бы всякая научная работа, если бы мы стали объяснять каждое наблюдаемое нами явленіе тѣмъ только, что говорили-бы, что оно возникаетъ непосредственно. Однако, очевидно, что мы заходимъ слишкомъ далеко и впадаемъ въ новую, также очень вредную ошибку, когда считаемъ каждое дѣйствіе одной субстанціи на другую не непосредственнымъ, даже не допуская нигдѣ непосредственнаго дѣйствія. Въ самомъ дѣлѣ, какимъ-же образомъ могло бы произойти посредственное дѣйствіе, если бы совсѣмъ не было бы непосредственнаго дѣйствія? Такъ какъ это достаточно ясно, то мы и не станемъ останавливаться на этомъ дальше. Мы ограничимся только тѣмъ, что выразимъ удивленіе, какъ могъ такой великій и осторожный мыслитель, какъ Лейбницъ, прійти къ неудачной гипотезѣ предустановленной гармоніи, которая испортила всю его прекрасную систему космологіи. И это только потому, что онъ не зналъ никакого средства, которое давало бы простымъ субстанціямъ возможность взаимодѣйствія.

§ 53.

3. Съ этимъ предразсудкомъ тѣснѣйшимъ образомъ связанъ, и этимъ самымъ уже опровергается, тотъ еще болѣе давній предразсудокъ, что невозможно никакое (именно никакое непосредственное) дѣйствіе одной субстанціи на другую, находящуюся отъ нея въ нѣкоторомъ разстояніи. Въ самомъ рѣзкомъ противорѣчіи съ этимъ представленіемъ, я утверждаю наоборотъ, что каждое дѣйствіе одной (находящейся въ пространствѣ, слѣдовательно, ограниченной) субстанціи на другую есть actio in distans уже по той очень простой причинѣ, что двѣ различныя субстанціи въ каждое мгновеніе занимаютъ также два различныхъ мѣста и, слѣдовательно, должны находиться на нѣкоторомъ разстояніи одна отъ другой. Я говорилъ уже выше о кажущемся противорѣчіи между этимъ утвержденіемъ и тѣмъ, что пространство наполнено непрерывно.

§ 54.

4. Это наше утвержденіе противорѣчитъ, конечно, и другому предразсудку школъ новѣйшаго времени, который усматриваетъ проникновеніе одной субстанціи въ другую именно въ каждомъ химическомъ соединеніи. Я безусловно отрицаю всякую возможность такого проникновенія, потому что, на сколько я вижу, уже въ самомъ понятіи простого мѣста (точки) заключается то, что оно есть мѣсто, гдѣ можетъ находиться только одна (простая) субстанція. Гдѣ находятся два атома, тамъ и два мѣста. Изъ многократно уже повтореннаго нашего опредѣленія пространства вытекаетъ также непосредственно, что только величина разстоянія двухъ дѣйствующихъ другъ на друга атомовъ опредѣляетъ величину измѣненія, которое они вызываютъ другъ въ другѣ въ теченіе нѣкотораго даннаго промежутка времени.

Если бы двѣ или больше субстанціи хотя-бы самое короткое время могли находиться въ одномъ и томъ-же мѣстѣ, то оказалось бы абсолютно невозможнымъ опредѣлить величину ихъ взаимодѣйствія въ это время; даже если бы это было только одно мгновеніе, невозможно было бы опредѣлить ихъ состояніе въ это мгновеніе.

§ 55.

5. Но со временъ Des Cartes'а возникъ еще новый предразсудокъ въ школахъ. Считая (съ очень похвальнымъ намѣреніи-

емъ), что невозможно оцѣнить достаточно высоко различіе между субстанціями мыслящими и немыслящими (духомъ и матеріей, какъ онъ ихъ назвалъ), онъ пришелъ къ поразительному для человѣческаго ума, даже немыслимому, утвержденію, что не только нельзя считать духовное существо протяженнымъ, т. е. состоящимъ изъ частей, но что даже невозможно разсматривать его, какъ какое бы то ни было существо, находящееся въ пространствѣ, т. е. заполняющее своимъ присутствіемъ хотя бы одну точку пространства. Такъ какъ позднѣе Кантъ зашелъ такъ далеко, что объявилъ пространство (такъ же, какъ и время) только парою формъ нашей чувственности, которымъ не соотвѣтствуетъ никакой предметъ самъ по себѣ; далѣе, такъ какъ онъ противоставляетъ другъ другу два міра, духовный и чувственный, то нельзя и удивляться, если предразсудокъ, что духовныя существа не занимаютъ мѣста въ пространствѣ, укоренился такъ глубоко, по крайней мѣрѣ, въ Германіи и если онъ держится въ нашихъ школахъ до сегодняшняго дня. Относительно основаній, при помощи которыхъ, какъ я думаю, я опровергъ этотъ предразсудокъ, я долженъ указать на другія мои сочиненія, а именно на Wissenschaftshlehre и на Athanasia. Каждый долженъ будетъ признать то, по крайней мѣрѣ, что установленный мною взглядъ, по которому всѣ созданныя субстанціи, на общемъ основаніи, должны находиться какъ во времени, такъ и въ пространствѣ, и все различіе въ ихъ силахъ составляетъ только различіе степени, имѣетъ уже преимущество простоты передъ всѣми другими, до сихъ поръ извѣстными взглядами.

§ 56.

6. Такой взглядъ устраняетъ также и большой парадоксъ, который до сихъ поръ всегда усматривали въ связи между духовными и матеріальными субстанціями. Какъ можетъ дѣйствовать матерія на духъ и — обратно — духъ на матерію, если они столь разнородны, — это считалось тайной, неподдающейся изслѣдованію для насъ, людей. Изъ вышеприведенныхъ взглядовъ, однако, слѣдуетъ, что это взаимодѣйствіе должно быть, по крайней мѣрѣ, отчасти непосредственнымъ, а слѣдовательно, не можетъ заключать въ себѣ ничего тайнаго и сокровеннаго для насъ; этимъ, однако, мы отнюдь не хотѣли сказать, чтобы не было очень многого

достойнаго познанія и изслѣдованія въ той части этихъ воздѣйствій, которыя вызываются при посредствѣ чего либо и особенно при посредствѣ организмовъ.

§ 57.

7. Если въ древности представляли себѣ субстанціи безъ силъ, то въ новѣйшее время, наоборотъ, стремились создать вселенную изъ однѣхъ силъ, безъ субстанцій. То обстоятельство, что каждая субстанція проявляетъ свое существованіе не иначе, какъ при помощи своихъ дѣйствій, слѣдовательно, при помощи силъ, вызвало, безъ сомнѣнія, ошибочное опредѣленіе понятія субстанціи, какъ совокупности однѣхъ силъ. Грубый чувственный образъ, на который указываетъ этимологія словъ: субстанція, субстратъ, субъектъ, носитель и т. п., казалось, давалъ ясное доказательство того, что господствующее вообще ученіе, по которому для существованія субстанціи нужно нѣчто особенное, чему эти силы принадлежатъ, какъ его свойства, представляетъ простой обманъ чувствъ, потому что здѣсь, конечно, нѣтъ никакой надобности въ носителѣ, въ основѣ, въ собственномъ значеніи этого слова. Но развѣ мы должны оставаться при этомъ чувственномъ истолкованіи? Любое нѣчто, даже простое понятіе о ничто, мы должны вѣдь разсматривать, какъ предметъ, который имѣетъ не одно только свойство, а цѣлую совокупность безконечно многихъ свойствъ. Мыслимъ-ли мы на этомъ основаніи любое нѣчто, какъ носителя въ собственномъ значеніи этого слова? Конечно, нѣтъ! Но если мы будемъ мыслить нѣчто, опредѣляя его какъ нѣчто дѣйствительное, не являющееся качествомъ другого дѣйствительнаго, то оно будетъ заключаться въ понятіи субстанціи, согласно съ правильнымъ опредѣленіемъ этого слова. Кромѣ одной несотворенной субстанціи, такихъ сотворенныхъ субстанцій существуетъ множество. Мы называемъ силами, въ общепринятомъ значеніи этого слова, всѣ тѣ свойства этихъ субстанцій, которыя мы должны считать ближайшей (т. е. непосредственной) причиной какого либо явленія внутри или внѣ производящей его субстанціи. Сила, которая не являлась-бы свойствомъ какой либо субстанціи, должна быть названа не просто силой, а самостоятельной субстанціей, такъ какъ она, въ качествѣ причины, была-бы чѣмъ-то дѣйствительнымъ и при томъ дѣйствительнымъ, не находящемся ни въ какомъ другомъ дѣйствительномъ.

§ 58.

Что ни одна ступень бытія не является ни наивысшей, ни наинизшей въ твореніи Бога; далѣе, что на каждой ступени, какъ-бы ни была она высока, во всякое, хотя-бы самое раннее время существовали творенія, которыя, благодаря своему быстрому развитію, достигли уже этой ступени; что на каждой, даже самой низшей ступени и во всякое, даже самое позднее время будутъ существовать творенія, которыя, несмотря на постоянное движеніе впередъ, только теперь достигаютъ этой ступени,—всѣ эти парадоксы не нуждаются ни въ какомъ дальнѣйшемъ объясненіи послѣ всего того, что мы говорили по поводу подобныхъ вопросовъ (§ 38 и слѣд.) относительно времени и пространства.

§ 59.

Однако, еще болѣе странно звучитъ слѣдующій парадоксъ: «Несмотря на то, что все безконечное пространство все«ленной вездѣ и во всѣ времена наполнено субстанціями такимъ «образомъ, что ни одна точка ни на одно мгновеніе не остается «безъ находящейся въ ней субстанціи, а также ни одна точка не «содержитъ двухъ или многихъ субстанцій,—несмотря на это, су«ществуетъ безконечное множество различныхъ степеней плот«ности, присущихъ субстанціямъ, наполняющимъ различныя части «пространства въ различныя времена,—такъ что одно и то же ко«личество субстанцій, наполняющее въ это мгновеніе, напримѣръ, «этотъ кубическій футъ, въ другое время можетъ занимать въ мил«ліоны разъ большее пространство, или быть сжатымъ въ простран«ство, въ тысячу разъ меньшее, и при томъ такъ, что при расши«реніи ни одна точка въ большемъ пространствѣ не останется пу«стой, а при сжатіи ни одна точка меньшаго пространства не бу«детъ заключать двухъ или больше атомовъ».

Я знаю очень хорошо, что это мое утвержденіе въ глазахъ большинства физиковъ представляетъ до сихъ поръ несообразность. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ они утверждаютъ невозможность согласованія факта неодинаковой плотности тѣлъ съ предположеніемъ непрерывно наполненнаго пространства, то они разсматриваютъ нѣкоторый родъ пористости, какъ общее свойство всѣхъ тѣлъ, даже и тѣхъ у которыхъ (какъ у газовъ и у эфира) на это не указываетъ никакое наблюденіе. Въ этихъ-то порахъ, изъ которыхъ бо́льшія считаются наполненными газами, значитъ, собственно, только въ никогда не видѣнныхъ порахъ жидкостей, физики предполагаютъ до сихъ поръ такъ называемое *vacuum dispertitum*, т. е. извѣстныя пустыя пространства въ такомъ множествѣ и такого протяженія, что едва ли билліонная часть пространства, наполненнаго только эфиромъ, заключаетъ въ себѣ настоящую матерію. Тѣмъ не менѣе я надѣюсь, что для всѣхъ, кто настоящимъ образомъ взвѣсилъ сказанное въ § 20 и слѣд., будетъ достаточно ясно, что нѣтъ ничего невозможнаго въ томъ, чтобы то же самое (безконечное) множество атомовъ занимало то большее, то меньшее, пространство безъ того, чтобы, въ первомъ случаѣ, хотя-бы одна точка осталась не занятой и чтобы, во второмъ, хотя-бы одна точка заключала въ себѣ два атома.

§ 60.

Послѣ этого врядъ-ли покажется страннымъ уже давно установленное въ древней метафизикѣ, въ ученіи *de nexu cosmico*, утвержденіе, что каждая субстанція въ мірѣ находится въ непрерывномъ общеніи съ каждой другой, при томъ такимъ образомъ, что измѣненіе, которое одна изъ нихъ вызываетъ въ другой, дѣлается тѣмъ меньше, чѣмъ больше разстояніе между ними, и что общій результатъ вліянія всѣхъ субстанцій на каждую въ отдѣльности представляетъ то измѣненіе, которое (если не принимать во вниманіе случай, когда происходитъ непосредственное воздѣйствіе Бога) происходитъ по извѣстному закону непрерывности, такъ какъ уклоненіе отъ этого послѣдняго требуетъ такой силы, которая должна быть безконечно большой по сравненіи съ непрерывной силой.

§ 61.

Несмотря на легкость, съ которой изъ простыхъ понятій выводится ученіе о господствующихъ субстанціяхъ, установленное уже въ первомъ изданіи Athanasia (1829), въ этомъ ученіи найдутся, однако, также парадоксы; поэтому является необходимымъ упомянуть здѣсь о нихъ въ нѣсколькихъ словахъ.

А именно: я исхожу (*l. c.*) изъ мысли, что, такъ какъ между двумя субстанціями во вселенной во всякое время, какъ извѣстно, должна существовать нѣкоторая разница конечной величины, то во всякое время существуютъ субстанціи, силы которыхъ возрасли уже настолько, что онѣ пріобрѣтаютъ нѣкоторое превосходство надъ всѣми, лежащими вокругъ нихъ субстанціями, хотя-бы въ сколь угодно малой окрестности.—Было бы ошибкой, и притомъ ошибкой набрасывающей на это предположеніе подозрѣніе во внутреннемъ противорѣчіи, вообразить, что такая господствующая субстанція должна обладать силами, безконечно превосходящими силы подчиненныхъ субстанцій. Но это ни въ какомъ случаѣ не вѣрно. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ что въ пространствѣ конечной величины, напримѣръ, въ шарѣ (положимъ, въ его центрѣ), находится субстанція, силы которой превосходятъ силы каждой изъ простыхъ субстанцій въ конечное число разъ; напримѣръ, пусть каждая изъ прочихъ субстанцій будетъ вдвое слабѣе ея. Конечно, невозможно сомнѣваться въ томъ, что совокупное дѣйствіе этихъ безконечно многихъ, болѣе слабыхъ субстанцій, въ случаѣ, когда онѣ объединяются въ своей дѣятельности (какъ это, напримѣръ, бываетъ при ихъ стремленіи приблизиться къ нѣкоторому центральному тѣлу,—о чемъ мы будемъ вскорѣ говорить), превзойдетъ въ безконечное число разъ дѣйствіе болѣе сильной субстанціи. Однако, могутъ и должны быть и другіе случаи, когда эти силы не направлены къ одной и той-же цѣли. А именно, если обратить теперь вниманіе только на то дѣйствіе, которое оказываетъ каждая изъ субстанцій, находящихся въ пространствѣ, на всякую другую, и на то, которое она взаимно испытываетъ,—то слѣдуетъ сказать, что обыкновенно это взаимодѣйствіе окажется болѣе сильнымъ у сильнѣйшей субстанціи именно въ отношеніи, соотвѣтствующемъ ея силѣ. Въ нашемъ примѣрѣ, слѣдовательно, та субстанція, которую мы предполагаемъ, по крайней мѣрѣ, вдвое болѣе сильной, чѣмъ каждую изъ сосѣднихъ, будетъ дѣйствовать на каждую изъ нихъ, по крайней мѣрѣ, вдвое сильнѣе, чѣмъ тѣ на нее. Это именно мы и имѣемъ въ виду, когда говоримъ что она господствуетъ надъ другими.

§ 62.

Намъ могутъ, однако, возразить, что если это вѣрно, то не только въ нѣкоторыхъ пространствахъ, а въ каждомъ, даже сколь угодно маломъ пространствѣ, даже въ любой совокупности атомовъ долженъ находиться господствующій атомъ, такъ какъ въ каждой совокупности многихъ атомовъ долженъ быть, какъ самый сильный, такъ и самый слабый. Я надѣюсь, однако, что никто изъ моихъ читателей не нуждается въ указанiи, что только для конечныхъ множествъ это должно быть всегда вѣрно; тамъ же, гдѣ имѣется безконечное множество, для каждаго члена можетъ существовать большiй (или меньшiй), несмотря на то, что ни одинъ изъ нихъ не превосходитъ (или не меньше) нѣкоторой конечной величины.

§ 63.

Эти господствующiя субстанцiи, уже по самому понятiю о нихъ, являются въ каждомъ конечномъ пространствѣ только въ конечномъ количествѣ, при чемъ каждая изъ нихъ окружена большей или меньшей оболочкой подчиненныхъ субстанцiй. Соединившись въ группы конечной величины, эти господствующiя субстанцiи и образуютъ то, что мы называемъ разнообразными, встрѣчающимися въ мiрѣ тѣлами (газообразными, капельножидкими, твердыми, органическими и т. д.). Въ противоположность имъ, я называю эфиромъ всю остальную мiровую матерiю, которая, не имѣя особенныхъ атомовъ, наполняетъ все остальное пространство и соединяетъ, слѣдовательно, всѣ тѣла вселенной. Здѣсь не мѣсто излагать, какъ нѣкоторыя явленiя, до сихъ поръ лишь несовершенно объясненныя или вовсе не нашедшiя себѣ объясненiя, объясняются съ величайшей легкостью на основанiи этого предположенiя (если угодно смотрѣть на него, только какъ на предположенiе). Сообразно съ цѣлью этой работы, я долженъ себѣ позволить лишь нѣсколько указанiй, которыя выясняютъ кажущiяся противорѣчiя.

Если всѣ созданныя субстанцiи различаются между собою только степенью своихъ силъ; если поэтому для каждой изъ нихъ нужно допустить нѣкоторую, хотя-бы самую малую степень чувствованiя и если всѣ онѣ влiяютъ одна на другую,—то нѣтъ ничего понятнѣе, чѣмъ то, что для каждыхъ двухъ какихъ-бы то ни было субстанцiй, а тѣмъ болѣе для двухъ особенныхъ субстанцiй, не всякое разстоянiе является одинаково прiятнымъ (одинаково полезнымъ для нихъ), такъ какъ отъ величины разстоянiй зависитъ и сила влiянiя, которое онѣ оказываютъ, а также и сила того влiянiя, которому онѣ подвержены. Если разстоянiе, въ которомъ онѣ находятся, больше, чѣмъ это является прiятнымъ для одной изъ субстанцiй, то въ ней проявится стремленiе сократить это разстоянiе, т. е. проявится такъ называемое притяженіе, въ противоположномъ-же случаѣ проявится отталкиваніе. Ни то, ни другое не должны мы представлять себѣ непремѣнно взаимнымъ; и еще менѣе должны мы думать, что дѣйствіе сопровождается всегда дѣйствительнымъ перемѣщеніемъ; но мы можемъ принять, какъ достовѣрное, то, что для каждыхъ двухъ субстанцій во вселенной существуетъ разстояніе, достаточно большое для того, чтобы для него и для всѣхъ бóльшихъ разстояній имѣло мѣсто взаимное притяженіе, и что точно также существуетъ разстояніе, достаточно малое для того, чтобы для него и для всѣхъ меньшихъ разстояній имѣло мѣсто взаимное отталкиваніе. Но какъ-бы сильно съ теченіемъ времени ни измѣнялась величина этихъ двухъ разстояній, которыя составляютъ границы притяженія и отталкиванія двухъ субстанцій, не только вслѣдствіе свойствъ этихъ субстанцій, но также и вслѣдствіе свойствъ смежныхъ съ ними субстанцій, лежащихъ въ ихъ окрестности,—остается безспорнымъ то, что вліяніе, которое оказываютъ двѣ субстанціи одна на другую, при условіи сходства прочихъ обстоятельствъ, должно уменьшаться съ увеличеніемъ разстоянія между ними, хотя бы уже по той причинѣ, что множество тѣхъ субстанцій, которыя могли-бы находиться въ равномъ разстояніи и претендовать на одинаковое дѣйствіе, увеличивается, какъ квадратъ разстоянія. Далѣе, такъ какъ перевѣсъ, который имѣетъ каждая особенная субстанція надъ каждой подчиненной, достигаетъ всегда только конечной величины, между тѣмъ какъ количество послѣднихъ субстанцій превосходитъ въ каждомъ пространствѣ количество первыхъ въ безконечное число разъ, то понятно, что сила притяженія, которую оказываютъ всѣ субстанціи, находящіяся въ данномъ пространствѣ, на одинъ атомъ, внѣ лежащій, когда его разстояніе достигло достаточной величины, будетъ приблизительно такая-же, какая проявлялась бы, когда пространство не заключало-бы никакихъ особенныхъ субстанцій, а только содержало-бы то же самое множество простыхъ атомовъ. Если связать это съ предыдущимъ, то получится важное заключеніе, что между всѣми тѣлами, разстоянія которыхъ другъ отъ друга имѣютъ достаточную величину, существуетъ сила притяженія, находящаяся въ прямомъ отношеніи къ суммѣ ихъ массъ (т. е. множеству ихъ атомовъ), и обратномъ къ квадрату ихъ разстоянія. Ни одинъ физикъ и ни одинъ астрономъ, не отрицаетъ въ наше время, что этотъ законъ наблюдается во всей вселенной, но, повидимому, до сихъ поръ рѣдко обращали вниманіе на то, какъ трудно онъ согласуется съ обыкновеннымъ взглядомъ на свойства элементарныхъ частей различныхъ тѣлъ. Если бы дѣло обстояло такъ, какъ его себѣ обыкновенно представляли, т. е. такъ, что тѣ 55 и болѣе простыхъ тѣлъ, съ которыми познакомились наши химики на землѣ, образуютъ массу всѣхъ встрѣчающихся здѣсь тѣлъ при чемъ каждое изъ нихъ представляетъ лишь совокупность атомовъ одного или другого, или нѣсколькихъ изъ этихъ простыхъ тѣлъ (такъ что, напримѣръ, золото—просто совокупность однихъ атомовъ золота, сѣра—совокупность однихъ атомовъ сѣры и т. д.),—если бы это было такъ, то пусть кто можетъ объяснитъ мнѣ, какимъ образомъ вещества столь различныя по своимъ силамъ, а именно по степени своего притяженія, несмотря на это, по вѣсу другъ другу вообще равны, т. е. что ихъ вѣса относятся, какъ ихъ массы. Справедливость же послѣдняго утвержденія доказывается непосредственно извѣстнымъ опытомъ, что шары изъ любого вещества, если только они будутъ равны по вѣсу, сталкиваясь другъ съ другомъ, обнаруживаютъ при ударѣ такія-же свойства, какъ тѣла одинаковой массы, такъ что, напримѣръ, при одинаковой скорости (насколько устранено дѣйствіе упругости или насколько оно принято въ разсчетъ) они приводятъ другъ друга въ состояніе покоя. Если-же мы предположимъ, что всѣ тѣла состоятъ собственно только изъ безконечнаго количества эфира, въ которомъ находится совершенно исчезающее въ сравненіи съ этимъ множествомъ число особенныхъ атомовъ, силы которыхъ превосходятъ только въ конечное число разъ силы атома эфира, то станетъ понятнымъ, что сила притяженія, которую испытываютъ эти тѣла отъ всего земнаго шара, не можетъ быть ни въ какомъ случаѣ замѣтно повышена малымъ числомъ особенныхъ атомовъ и что, слѣдовательно, вѣсъ ихъ долженъ быть пропорціоналенъ лишь всей ихъ массѣ. Однако, и теперь найдется не мало физиковъ, разсматривающихъ тепловую матерію (т. е. собственно, то самое вещество, которое я отождествляю съ эфиромъ), какъ жидкость, которая находится во всѣхъ тѣлахъ и никогда не можетъ быть вполнѣ удалена изъ нихъ. Слѣдовательно, если-бы они не составили себѣ, къ несчастью, представленія, что эта тепловая матерія невѣсома, и если-бы они возвысились до взгляда, что множество атомовъ, находящихся въ каждомъ отдѣльномъ тѣлѣ вмѣстѣ съ теплотой, въ сравненіи съ послѣдней, является количествомъ исчезающимъ (а какъ близки они были къ этой мысли, представляя себѣ иногда атомы отдѣленными другъ отъ друга разстояніями, безконечно большими по сравненію съ ихъ діаметрами), то имъ вскорѣ стало-бы совершенно ясно, что эта ихъ теплота и есть то, что опредѣляетъ вѣсъ всѣхъ тѣлъ.

§ 64.

Легко понять, что господство особенной субстанціи надъ ближайшею областью состоитъ, если не въ чемъ-либо другомъ, то, по крайней мѣрѣ, въ извѣстномъ болѣе сильномъ притяженіи сосѣднихъ атомовъ, вслѣдствіе чего эти послѣдніе сближаются другъ съ другомъ и съ этой субстанціей плотнѣе, чѣмъ это имѣло бы мѣсто безъ такого притяженія; по этой причинѣ они имѣютъ стремленіе при удобномъ случаѣ удалиться опять, какъ отъ этого центра притяженія, такъ и другъ отъ друга, т. е. стремленіе отталкиваться. На это указываютъ многіе опыты, для объясненія которыхъ, однако, совершенно напрасно предполагали существованіе первоначальной силы взаимнаго отталкиванія частицъ эфира.

§ 65.

Изъ этого обстоятельства вытекаетъ легкое доказательство того предложенія, которое я установилъ уже въ Athanasia, что ни одна особенная субстанція не испытываетъ въ своей оболочкѣ такого измѣненія, при которомъ она не удерживала-бы извѣстной, хотя бы самой малой части своей ближайшей окрестности. Конечно, никто не подумаетъ, что нѣкоторая особенная субстанція *a* лишится ближайшихъ къ ней эфирныхъ атомовъ, если ни одна изъ всѣхъ окружающихъ ее сосѣднихъ особенныхъ субстанцій *b*, *c*, *d*, *e*... не измѣняетъ своего разстоянія отъ *a*. Можно было бы ожидать этого лишь въ томъ случаѣ, если бы нѣкоторые изъ нихъ, или всѣ удалились. Однако, если даже это случится, то только часть частицъ эфира, окружающихъ *a*, послѣдуетъ за удаляющимися субстанціями *b*, *c*, *d*, *e*...; другая-же часть ихъ, а именно часть тѣхъ, которыя находятся ближе всего къ *a*, должна всегда оставаться, хотя мы не только признаемъ, но даже утверждаемъ, какъ необходимое, что эта часть займетъ большее пространство. Смотря по обстоятельствамъ, эфирныя частицы могутъ притекать даже изъ извѣстныхъ отдаленныхъ областей и проникать въ тѣ мѣста, которыя наполнены эфиромъ, сравнительно болѣе разрѣженнымъ, вслѣдствіе слишкомъ большихъ разстояній, на которыя раздвинулись субстанціи *a*, *b*, *c*, *d*, *e*... Но нѣтъ никакого основанія къ тому, чтобы этотъ эфиръ, притекающій издалека, сталъ отталкивать эфиръ, окружающій субстанцію *a*, и занимать его мѣсто. Притекающій эфиръ, вмѣсто того, чтобы вытѣснить эфиръ, окружающій субстанцію *a*, долженъ только препятствовать его дальнѣйшему расширенію и сжимать его до тѣхъ поръ, пока плотность его не уравновѣситъ притягательныхъ силъ всѣхъ окружающихъ атомовъ.

§ 66.

Вслѣдъ за этимъ могутъ быть разрѣшены нѣкоторые прежніе вопросы; отвѣты на нихъ могли-бы показаться парадоксальными, если-бы они не нашли себѣ объясненія въ предыдущемъ. Къ этому роду вопросовъ относится вопросъ о границахъ тѣла: гдѣ, собственно, кончается одно тѣло и начинается другое? Подъ границей тѣла я разумѣю совокупность тѣхъ самыхъ крайнихъ атомовъ эфира, которые еще принадлежатъ тѣлу, т. е. такихъ атомовъ, которые сильнѣе притягиваются особенными его атомами, чѣмъ другими, находящимися по близости, господствующими атомами, такъ что, при измѣненіи положенія тѣла относительно окружающей среды (напримѣръ, удаленіи отъ нея), внѣшнія частицы эфира, составляющія его границу, удалятся вмѣстѣ съ нимъ, если и не съ той-же скоростью, то все же такъ, что не наступитъ ни раздѣленія, ни вторженія постороннихъ атомовъ. Если мы примемъ это опредѣленіе понятія о границѣ, то окажется тотчасъ-же, что граница тѣла представляетъ нѣчто очень измѣнчивое. Она измѣняется даже почти постоянно, какъ только произойдетъ какое-нибудь измѣненіе въ самомъ тѣлѣ или въ сосѣднихъ тѣлахъ. Понятно, что всѣ подобныя измѣненія могутъ произвести много измѣненій, какъ въ силѣ, такъ и въ направленіи притяженія, которое испытываютъ не только подчиненные, но и господствующіе атомы. Такъ напримѣръ многія частицы этого пера, которыя еще незадолго передъ этимъ сильнѣе притягивались его массой, чѣмъ окружающимъ воздухомъ, и потому составляли его часть, теперь притягиваются сильнѣе моими пальцами, чѣмъ массой пера, и потому отрываются отъ него.—Болѣе точное разсужденіе показываетъ, что нѣкоторыя тѣла на извѣстныхъ мѣстахъ не имѣютъ вовсе атомовъ границы, т. е. такихъ атомовъ, которые были-бы самыми крайними среди атомовъ, еще принадлежащихъ къ тѣлу и слѣдующихъ за нимъ при измѣненіи его положенія. Въ самомъ дѣлѣ, всякій разъ, когда одно изъ двухъ сосѣднихъ тѣлъ имѣетъ въ опредѣленномъ мѣстѣ самый крайній вмѣстѣ съ нимъ перемѣщающійся атомъ, то другое тѣло, по этому самому, уже не будетъ имѣть подобнаго крайняго атома, такъ какъ всѣ атомы, находящіеся за этимъ крайнимъ, уже составляютъ принадлежность другого тѣла.

§ 67.

Такимъ-же образомъ получается отвѣтъ на вопросъ, находятся-ли тѣла въ непосредственномъ соприкосновеніи другъ съ другомъ или отдѣлены нѣкоторымъ промежуткомъ, и когда имѣетъ мѣсто то или другое. Если я позволю себѣ предложить опредѣленіе (которое мнѣ кажется самымъ цѣлесообразнымъ)—что два тѣла соприкасаются другъ съ другомъ, если самые крайніе атомы, которые принадлежатъ одному изъ нихъ, на основаніи объясненія въ предыдущемъ параграфѣ, составляютъ непрерывное протяженіе съ нѣкоторыми атомами другого, то, конечно, невозможно будетъ отрицать что существуетъ много тѣлъ, соприкасающихся между собою не только тогда, когда одно изъ нихъ или оба жидкія, но и тогда, когда они твердыя,—если только сначала сильнымъ сжатіемъ или другимъ какимъ-либо способомъ будетъ удаленъ воздухъ, прилегающій къ нимъ въ обыкновенномъ ихъ состояніи на землѣ. Если два тѣла не касаются другъ друга, то промежутокъ между ними долженъ быть наполненъ какимъ-нибудь другимъ тѣломъ или, по крайней мѣрѣ, эфиромъ, потому что совершенно пустого пространства не бываетъ. Поэтому можно утверждать, что каждое тѣло находится со всѣхъ сторонъ въ соприкосновеніи съ нѣкоторыми другими тѣлами или, въ случаѣ отсутствія тѣлъ, съ чистымъ эфиромъ.

§ 68.

Что касается различныхъ видовъ происходящихъ во вселенной движеній, то, въ виду того обстоятельства, что (по нашему воззрѣнію) никакая часть пространства не бываетъ пустой, можно было бы думать, что возможно только такое движеніе, при которомъ вся одновременно движущаяся масса образуетъ цѣльное замкнутое протяженіе, гдѣ каждая часть всей массы занимаетъ только тѣ мѣста, которыя непосредственно передъ тѣмъ занимала другая часть массы. Но кто помнитъ то, что было сказано въ § 59 о различныхъ степеняхъ плотности, присущихъ субстанціямъ, наполняющимъ пространство, тотъ пойметъ, что могутъ и должны существовать еще многія другія движенія. Особенно одно движеніе,— колебательное, должно встрѣчаться почти всегда не только у всѣхъ эфирныхъ атомовъ, но также почти у всѣхъ особенныхъ атомовъ по причинѣ, которая столь очевидна, что я и не стану приводить ея. Послѣ колебательнаго, наиболѣе часто встрѣчающимся и очень обыкновеннымъ должно быть вращательное движеніе, особенно у твердыхъ тѣлъ. Какъ слѣдуетъ представлять себѣ это движеніе и какъ при допущеніи матеріальной оси вращенія (что, по нашему мнѣнію, всегда должно быть) слѣдуетъ объяснять то обстоятельство, что тѣ-же самые атомы, которые теперь находятся по ту ея сторону, черезъ полъ оборота, не отдѣлившись, окажутся на противоположной ея сторонѣ,— все это можетъ ввести въ затрудненіе только того, кто забываетъ, что въ континуумѣ, также, какъ и внѣ его, каждый атомъ находится въ извѣстномъ разстояніи отъ другого и, слѣдовательно, можетъ обращаться около него, не отрываясь и не заставляя его поворачиваться; это послѣднее, т. е. вращеніе вокругъ самого себя для простаго протяженія представляло бы нѣчто, содержащее противорѣчіе.

§ 69.

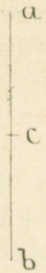
Не желая утверждать, чтобы хотя одинъ господствующій или подчиненный атомъ во вселенной въ какое-либо время описывалъ совершенную прямую линію или совершенную окружность круга (что представляетъ крайне малую, безконечно малую вѣроятность при безконечномъ множествѣ нарушеній, которыя испытываетъ каждый атомъ отъ дѣйствія всѣхъ остальныхъ атомовъ),—тѣмъ не менѣе, мы не имѣемъ права считать, что подобныя движенія невозможны сами по себѣ. Мы можемъ, однако, утверждать, что движеніе по ломаной линіи, напримѣръ, только тогда можетъ осуществиться, когда скорость атома къ концу части *ab* постепенно такъ уменьшится, что въ точкѣ b сдѣлается нулемъ. Если движенiе послѣ этого не должно быть прервано конечнымъ промежуткомъ покоя, то въ каждое мгновенiе, слѣдующее за прибытiемъ въ b, должна оказаться опять нѣкоторая (возрастающая отъ нуля) скорость.

Не такъ обстоитъ дѣло съ нѣкоторыми другими линiями, какъ, напримѣръ, съ логариѳмической спиралью. Независимо отъ всѣхъ внѣшнихъ нарушенiй, противорѣчивымъ представляется уже то, что атомъ описываетъ въ конечное время хотя-бы ту вѣтвь этой линiи, которая, начиная съ въ какой-нибудь ея точкѣ, направляется къ центру. Еще несообразнѣе требовать, чтобы атомъ, описывающiй эту вѣтвь, достигъ, наконецъ, центра спирали. Чтобы доказать это только для того случая, когда атомъ описываетъ свой путь равномѣрно, вообразимъ себѣ сначала, что онъ движется одинъ. Въ такомъ случаѣ, сейчасъ-же оказывается, что его движенiе по спирали можно разсматривать, какъ составленное изъ двухъ движенiй: одного равномѣрнаго по лучу въ направленiи къ центру, и другого углового вращенiя вокругъ этого центра; скорость этого вращенiя, возрастая равномѣрно, должна сдѣлаться больше всякой конечной величины, какъ скоро атомъ подойдетъ къ центру сколь угодно близко. Конечно, нѣтъ такой силы въ природѣ, которая могла-бы сообщить ему эту скорость; тѣмъ болѣе нѣтъ такой силы, которая бы могла сообщить цѣлой массѣ атомовъ, простирающихся въ пространствѣ трехъ измѣренiй, такую скорость, какая нужна для того, чтобы разсматриваемый атомъ могъ въ конечное время пробѣжать безконечное множество оборотовъ спирали до центра. Но если бы атомъ даже имѣлъ такую скорость, то возможно-ли было бы сказать о немъ, что онъ достигнетъ центра? Я, по крайней мѣрѣ, не думаю этого. Въ самомъ дѣлѣ, хотя можно сказать, что этотъ центръ составляютъ континуумъ съ точками спирали (которыя, безспорно, принадлежатъ ей), потому что среди нихъ найдется сосѣдняя съ центромъ на каждомъ, сколь угодно маломъ, разстоянiи,—тѣмъ не менѣе, этому линейному протяженiю недостаетъ еще второго свойства, необходимого для того, чтобы оно могло быть описано движенiемъ атома, а именно, чтобы оно имѣло одно или нѣсколько опредѣленныхъ направленiй въ каждой своей точкѣ. Этого, какъ извѣстно, нѣтъ въ центрѣ.

Сюда относится, наконецъ, еще одинъ любопытный вопросъ: возможно-ли при нашихъ воззрѣнiяхъ на безконечность вселенной движеніе цѣлой вселенной въ опредѣленномъ направленіи или вращательное движеніе ея вокругъ міровой оси или міроваго центра? Мы отвѣтимъ на это, что слѣдуетъ признать невозможнымъ какъ одно, такъ и другое движеніе не потому, что невозможно найти для каждаго атома мѣсто, которое онъ могъ бы занять, но нужно признать эти движенія невозможными потому, что не существуетъ причинъ (силъ), которыя могли-бы вызвать подобное движеніе. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя придумать причины, которая сдѣлала-бы возможнымъ этого рода движенія — ни физической причины, или распорядка, который являлся-бы просто необходимымъ (т. е. представлялъ-бы только слѣдствіе чисто теоретическихъ истинъ, касающихся понятій), ни нравственной причины, или распорядка, который являлся-бы только условно необходимымъ (т. е. такой распорядокъ, который мы встрѣчаемъ въ мірѣ только потому, что Богъ осуществляетъ всякое событіе, направленное ко благу его твореній).

§ 70.

Заключимъ эти разсужденія двумя парадоксами, которые сдѣлались особенно знаменитыми благодаря Эйлеру. Уже Босковичъ (Boscowich) обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что на одинъ и тотъ-же вопросъ, а именно, какъ движется атомъ a, если онъ притягивается силой, находящейся въ c въ обратномъ отношеніи къ квадрату разстоянія, получаются различные отвѣты. Различіе это зависитъ отъ того, разсматриваютъ-ли этотъ случай, какъ такой, въ который постепенно переходитъ эллиптическое движеніе, когда скорость верженія убываетъ до нуля, или же, когда, независимо отъ этой фикціи, разсматриваютъ вопросъ самъ по себѣ. Если-бы атомъ a, вслѣдствіе верженія или по другой какой-нибудь причинѣ, въ началѣ своего движенія получилъ боковую скорость, перпендикулярную къ ac, то (отвлекаясь отъ всякаго сопротивленія среды) онъ долженъ былъ-бы описать эллипсъ, фокусъ котораго находится въ c. Если эта боковая скорость уменьшается безконечно, то и меньшая ось этого эллипса тоже уменьшается безконечно. Отсюда Эйлеръ и вывелъ заключеніе, что въ случаѣ, когда атомъ не имѣетъ никакой скорости въ точкѣ a, должно наступить колебаніе его между точками a и c; при этомъ онъ полагаетъ, что только это движеніе и есть то, въ которое переходитъ эллиптическое движеніе безъ нарушенія закона непрерывности. Напротивъ того, другіе, особенно Буссе (Busse), находили несообразнымъ, чтобы атомъ, скорость котораго въ направленіи *ac* при приближеніи къ точкѣ *c* должна возрастать безконечно, останавливался здѣсь безъ всякой видимой причины (присутствіе, напримѣръ, постояннаго и непроницаемаго атома, которое-бы составляло препятствіе къ прохожденію черезъ это мѣсто, не предполагалось вовсе) и устремлялся бы въ противоположномъ направленіи. Они утверждали поэтому, что онъ долженъ, напротивъ того, продолжать свое движеніе въ направленіи *ac* за точку *c* но уже съ убывающей скоростью, пока не достигнетъ конца отрѣзка $cb=ca$, затѣмъ, подобнымъ же образомъ, онъ долженъ вернуться отъ *b* опять къ *a*, и такъ далѣе, безъ конца. По моему мнѣніе, ссылка Эйлера на за-



конъ непрерывности здѣсь еще ничего не разрѣшаетъ. Въ самомъ дѣлѣ, явленіе, о которомъ здѣсь спорятъ, будетъ-ли колебаніе атома происходить внутри границъ *a* и *b* или внутри *a* и *c*,—одинаково мало находится въ противорѣчіи съ тѣмъ родомъ непрерывности, который дѣйствительно, какъ это можно доказать, управляетъ измѣненіями вселенной (возрастаніемъ и убываніемъ силъ отдѣльныхъ субстанцій). Однако же, впадаютъ въ противорѣчіе съ этимъ закономъ самымъ непозволительнымъ образомъ уже вслѣдствіе того, что предполагаютъ здѣсь силу, а именно силу притяженія, возрастающую безконечно. Нельзя поэтому удивляться, если изъ противорѣчивыхъ посылокъ вытекаютъ противорѣчивыя заключенія. Отсюда, однако, видно, что не только Эйлеръ, но и Буссе неправильно отвѣчаютъ на вопросъ, такъ какъ они предполагаютъ нѣчто такое, что само по себѣ невозможно, а именно безконечно большую скорость въ точкѣ *c*. Если исправить эту ошибку, если предположить, слѣдовательно, что скорость, съ которой движется атомъ, измѣняется по такому закону, при которомъ она остается постоянно конечной; если принять, наконецъ, въ соображеніе, что невозможно говорить о движеніи отдѣльнаго атома, не предположивши среды, въ которой онъ движется, и большаго или меньшаго количества атомовъ, движущихся вмѣстѣ съ нимъ, то получится совершенно иной результатъ, подробнымъ описаніемъ котораго намъ нѣтъ надобности здѣсь заниматься.

Второй парадоксъ, который мы изложимъ здѣсь лишь въ немногихъ словахъ, касается движенія маятника и состоитъ въ томъ, что половина времени качанія простого маятника, длина котораго$=r$, на протяженіи безконечно малой дуги по вычисленію оказывается, какъ извѣстно, равной $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, между тѣмъ какъ время паденія по хордѣ этой дуги, которую по длинѣ считали обыкновенно равною дугѣ, оказывается равнымъ $\sqrt{2}.\sqrt{\frac{r}{g}}$. То обстоятельство, что Эйлеръ видѣлъ въ этомъ парадоксъ, основывается единственно на его неправильномъ представленіи о безконечно маломъ, которое онъ себѣ представлялъ равнозначнымъ нулю. На самомъ-же дѣлѣ не можетъ быть безконечно малыхъ дугъ, также какъ и хордъ; а то, что утверждаютъ математики о своихъ такъ называемыхъ безконечно малыхъ дугахъ и хордахъ, было ими доказано, собственно, только для дугъ и хордъ, которыя могутъ быть взяты сколько угодно малыми. Вышеприведенныя два равенства, если понять ихъ правильно, не могутъ имѣть никакого другого значенія, кромѣ слѣдующаго: половина времени качанія маятника подходитъ сколь угодно близко къ величинѣ $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, если взять дугу, по которой происходитъ качаніе, сколь угодно малой; время-же паденія по хордѣ этой дуги подходитъ сколь угодно близко, при тѣхъ-же обстоятельствахъ, къ величинѣ $\sqrt{2}.\sqrt{\frac{r}{g}}$. Что эти двѣ величины различны, что, слѣдовательно, дуга и ея хорда, какъ-бы онѣ ни были малы, различны въ отношеніи упомянутаго времени паденія,—въ этомъ столь-же мало страннаго, какъ и во многихъ другихъ различіяхъ между ними, исчезновенія которыхъ, пока дуга и ея хорда существуютъ, никто и не станетъ ожидать. Примѣромъ подобнаго различія можетъ служить то, что дуга сохраняетъ всегда кривизну, а именно такую, величину которой мы можемъ измѣрить посредствомъ $\frac{1}{r}$, между тѣмъ какъ хорда всегда остается прямой, т. е. не имѣетъ никакой кривизны.

MATHESIS

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ“.

Печатается и вскорѣ поступитъ въ продажу:

П. Аппель и С. Дотевилль

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

(около 48 печатныхъ листовъ, 222 чертежа).

Переводъ І. Л. ЛЕВИНТОВА

подъ редакціей и съ примѣчаніями приватъ-доцента

С. О. ШАТУНОВСКАГО

Книга по содержащемуся въ ней матеріалу соотвѣтствуетъ университетскому курсу теоретической механики и представляетъ собой сокращенную переработку обширнаго трехтомнаго трактата П. АППЕЛЯ по теоретической механикѣ.

I выпускъ (главы I—VIII) выйдетъ въ началѣ Іюня 1911 г.

СОДЕРЖАНІЕ:

БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ

Библіотека содержитъ только такія классическія творенія великихъ мыслителей въ области Математики и Естествознанія, которыя читаются безъ большого напряженія и не требуютъ особенной подготовки со стороны читателя. Редакторы снабжаютъ каждый переводъ примѣчаніями и разъясненіями тѣхъ мѣстъ, пониманіе которыхъ представляется сколько нибудь затруднительнымъ. Научная комиссія «Mathesis» въ своемъ выборѣ книгъ для библіотеки классиковъ стремится дать возможность молодому поколѣнію черпать доступныя для него знанія изъ первоисточниковъ.

Въ настоящее время вышли въ свѣтъ слѣдующіе выпуски:

I. **Р. ДЕДЕКИНДЪ. Непрерывность и ирраціональныя числа.** Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* 40 стр. 8°. Изд. 2-е. Ц. 40 к.

Идеи, развитыя въ этомъ замѣчательномъ трудѣ, составляютъ въ настоящее время основу всего Высшаго анализа. Къ книгѣ приложена статья переводчика: Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ (по Cantor'у).

II. **АРХИМЕДЪ. Посланіе къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ теоремахъ механики**. Пер. съ нѣм. подъ ред. «Вѣстника Оп. Физики и Элем. Математики». Съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Ц. 40 к. (См. каталогъ: I. Гейбергъ. Новое сочиненіе Архимеда).

Сочиненіе содержитъ въ себѣ общіе методы, какими пользовался Архимедъ при нахожденіи площадей, объемовъ и центровъ тяжести; эти методы свидѣтельствуютъ, что великій греческій геометръ былъ весьма близокъ къ идеямъ современнаго интегральнаго исчисленія.

III. **РУДІО Ф.**, профессоръ. Квадратура круга. Исторія квадратуры круга съ древнѣйшихъ временъ до нашихъ дней. Съ приложеніемъ четырехъ статей **Архимеда, Гюйгенса, Лагранжа** и **Ламберта** объ измѣреніи круга. Перев. подъ ред. прив.-доц. *С. Н. Бернштейна.* VIII+156 стр. 8°. Ц. 1 р. 20 к.

Послѣ того, какъ задача о квадратурѣ круга была совершенно исчерпана доказательствомъ трансцендтности числа π, профессоръ Рудіо счелъ нужнымъ обратить вниманіе на тѣ древнѣйшія работы, которымъ задача о квадратурѣ круга обязана своимъ развитіемъ.

IV. **Б. БОЛЬЦАНО. Парадоксы безконечнаго,** изданные по посмертной рукописи автора *др. Фр. Пржигонскимъ* Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.* VIII+119 стр. 8°. Ц. 80 к.

Въ этой работѣ Больцано устанавливаетъ основныя понятія, лежащія въ основѣ Анализа, каковы понятія о сходимости рядовъ, о верхней и нижней границахъ числовыхъ комплексовъ, объ однозначномъ соотвѣтствіи и т. д., являясь такимъ образомъ прямымъ предшественникомъ Коши, Вейерштрасса и Кантора въ постановкѣ и рѣшеніи основныхъ вопросовъ Анализа.

Печатаются и готовятся къ печати:

V. **I. ЛАГРАНЖЪ. Прибавленія къ «Элементамъ Алгебры» Эйлера. Неопредѣленный анализъ.** Переводъ съ французскаго подъ редакціей приватъ-доцента *С. О. Шатуновскаго.*

Въ этихъ прибавленіяхъ впервые дано полное рѣшеніе неопредѣленнаго квадратнаго уравненія съ двумя неизвѣстными въ самомъ общемъ видѣ. По изяществу и глубинѣ методовъ эта книга несомнѣнно представляетъ собой одинъ изъ перловъ среди твореній великаго геометра.

VI. **ЕВКЛИДЪ. Первыя шесть книгъ «Началъ».** Переводъ проф. *Д. М. Синцова* и пр.-доц. *С. Н. Бернштейна.*

школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лаборанта *Е. С. Ельчанинова.* IV+192 стран. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... учитъ серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ. *Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Litteratur.*

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская хрестоматія** *). Перев. съ нѣмецк. *Ю. А. Говсѣева* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+172 стр. 8° 1907. Ц. Р. 1. —

...Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики** *). Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура*: **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стран. 8°. Съ 5 портрет., 6 таблиц. и 33 рис. Ц. Р. 2. —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** *) (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3 итальянск. изданія. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. 1910. *Второе изданіе.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній** *). 46 стран. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛАКУРЪ, П. и АППЕЛЬ, Я. Историческая физика *). Перев. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физики и Элементарн. Матем."*. Въ 2-хъ томахъ большого формата, 892 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными цвѣтными таблицами. 1908. Ц. Р. 7. 50 к.

«Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ»... *Ж. М. Н. Пр.*

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Образованіе міровъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908. Ц. 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно *Русская Школа.*

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи** *). Вступительная лекція. Перев. съ итальянскаго подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физ. и Элем. Матем.“*. 28 стр. 8°. *2-е изданіе*. 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго проф. Болоньскаго унив. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

.....весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическій Сборникъ.*

ГЕЙБЕРГЪ, І. проф. **Новое сочиненіе Архимеда** *). Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники** *). IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. Р. 1.

«Mathesis» можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ** *). Перев. съ нѣмецк. подъ редакц. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ... *Русская Школа.*

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добываніе свѣта** *). Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт. Физ. и Элемент. Матем.“*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отдѣльными портретами. 1909. Ц. Р. 1. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.“*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы** *). Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 37 стр. 16°. 1909. Ц. 25 к.

БОЛЛЪ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. 1909. Ц. 75 к.

.....настоящее изданіе «Mathesis» слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

СЛАБИ, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16°. *2-е изданіе.* 1909. Ц. 15 к.

КУТЮРА, Л. **Алгебра логики.** Перев. съ французскаго съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8°. 1909. Ц. 90 к.

ВЕБЕРЪ Г. и ВЕЛЬШТЕЙНЪ І., проф. **Энциклопедія элементарной геометріи.** Томъ II, книга I. **Основанія геометріи.** Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XII+362 стр. 8°. Съ 144 черт. и 5 рис. 1909. Ц. Р. 3

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ физики** *). Перев. съ нѣмецк. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*
Т. I. VIII+348 стр. больш. 8°. Съ 236 рис. 1910. Ц. Р. 2. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. 1910. Ц. Р. 3. 75 к.
Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ В. А. Объ единствѣ вещества. 46 стр. 16°. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ прил. статьи *В. Ритца.* **„Линейные спектры и строеніе атомовъ"**. 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Теорія движенія луны.** (Исторія и современное состояніе этого вопроса) 26 стр. 16°. Ц 20 к.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Основы метеорологіи** *). XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4. —
Честь и слава «Mathesis» за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука! *Ж М Н. Пр.*

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ нѣкоторыми указаніями для препод.) *). Перев. съ англ. подъ ред и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.
Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ «Исторію элемент. мат.» Кэджори. *Вѣст. Воспит.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Перев съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

РОУ, С. **Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги.** Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Переводъ съ англійск. *І. Левинтова*, подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."* VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. Р. 1. 20 к.

ГРАФФЪ, К. **Комета Галлея** *). Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. 16°. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изданіе второе исправл. и дополненное 1910. Ц. 30 к.
Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагог. Сборникъ.*

НИМФЮРЪ, Р. **Воздухоплаваніе** *). Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр 8°. Съ 52 рис. 1910. Ц 90 к.

Галлеева Комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ - О кометѣ Галлея. 32 стр. 8°. Съ 12 иллюстраціями 1910. Ц. 12 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **Развитіе современной спектроскопіи** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 45 стр. 16°. 1910. Ц 25 к.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. Парадоксы природы *). Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8°. Съ 67 рис. Ц Р. 1.20 к

ВЕБЕРЪ и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ**, проф. **Энциклопедія элементарной математики** *). Т. II, кн. 2 и 3. Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія. Перев. съ нѣмец. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+321 стр. 8°. Съ 109 рис. 1910. Ц Р. 2 50 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Что такое алгебра?** *) 72 стр. 16°. Ц. 40 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и Методъ.** Пер. съ франц. И. Брусиловскаго подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16°. 1910. Ц. Р. 1. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Динамика живого вещества.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+352 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

АДЛЕРЪ, А. Теорія геометрическихъ построеній. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*, XXIV+325 стр. 8°. Съ 177 рис. 1910. Ц. Р. 2. 25 к.

СОДДИ Ф. проф. **Радій и его разгадка** *). Пер. съ англ. подъ ред. лаборанта Новорос. универс. *Д. Хмырова*. VII+190 стр. 8°. Съ 31 рис. 1910. Ц. Р. 1. 25 к.

СМИТЪ, А. проф. **Введеніе въ неорганическую химію.** Пер. англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова*. XVI+840 стр. 8°. Съ 107 рис. 1911. Ц. Р. 3. 50 к.

ВИНЕРЪ, О. проф. **О цвѣтной фотограф и и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. VI+69 стр. 8°. Съ 3 цвѣтн. табл. 1911. Ц 60 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. **Элементарная математика.** Ч. I. Ариѳметика и алгебра. Въ обработкѣ проф. *П. Штѣккеля*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* съ приложеніемъ его статьи «О реформѣ преподаваніи математики» LXIV+434 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 3.—

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго*. VIII+496 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 3 50 к.

МАРКОВЪ, А. акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ 2-хъ частяхъ. Изд. 2-ое. исправлен. и дополнен. VIII+274 стр. 8°. 1911. Ц. Р. 2. 25 к.

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. Два новыхъ міра. 1. Инфра-міръ. 2. Супра-міръ. Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8°. Съ 1 рис. и 1 табл. 1911. Ц 80 к.

БРАУНЪ. Ф. проф. **Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ.** Рѣчь, произнесенная по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступит. статьей переводчиковъ. XIV+92 стр. 16°. Съ 25 рис. и портретомъ автора 1911. Ц. 70 к.

ШУБЕРТЪ, Г. проф. **Математическія развлеченія и игры.** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова*, подъ ред., съ прим. и добавл. «В. Оп. Физ. и Эл. Мат.» XIV+358 стр. 16° Со многими таблицами. 1911. Ц. Р. 1 40 к.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. **Стереохимія.** Пер. съ нѣм. под. ред. проф. *П. Г. Меликова*. VIII+164 стр. 8°. Съ 58 фиг. 1911. Ц. Р. 1. 20 к.

Русская математическая библіографія Вып. I. Списокъ сочиненій по чистой прикладной математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи въ 1908 г. Подъ редакціей проф. *Д. М. Синцова*. 76 стр. 8°. 1911. Ц. 60 к.

ПЛАНКЪ, М. проф. **Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова*, подъ ред. «В. Оп. Ф. и Эл. Мат.». 42 стр. 16°. 1911. Ц. 25 к.

ШТОКЪ, А. проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ**, прив.-доц. **Практическое руководство по количественному анализу.** Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. *А. І. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликова*. Переводъ съ нѣм. VIII+172 стр. 8°. Съ 37 рис. 1911. Ц. Р. 1. 20 к.

БОЛЬЦАНО, Б. Парадоксы безконечнаго. *(Библіотека классиковъ).* Пер. съ нѣмецк. под. ред. проф. *И. В. Слешинскаго*. 120 стр. 8°. Съ 12 черт. 1911 г. Ц. 80 к.

РУДІО, Ф. проф. **Квадратура круга.** Исторія задачи о квадратурѣ круга съ древнѣйшихъ временъ до нашихъ дней съ приложеніемъ 4-хъ статей объ измѣреніи круга Архимеда, Гюйгенса, Лагранжа и Ламберта. *(Библіотека классиковъ).* Пер. съ нѣм. под. ред. прив.-доц. *С. Н. Бернштейна*. VIII+156 стр. 8°. Съ 21 рис. 1911. Ц. Р. 1. 20 к.

ЛОДЖЪ, ОЛИВЕРЪ, проф. **Міровой эфиръ.** Пер. съ англ. подъ ред. лабор. Нов. Унив. *Д. Д. Хмырова*. XVI+216 стр. 16°. Съ рис. 1911. Ц. 80 к.

Имѣются на складѣ:

МУЛЬТОНЪ Ф. проф. **Эволюція солнечной системы.** Перев. съ англійскаго IV+82 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.

Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.