# 930.

## SUR LA SURFACE DES ONDES.

[From the *Annali di Matematica,* Ser. II., t. XX. (1892), pp. 1—18.]

1. Il y a, dans les *Annali di Matematica,* tom. II. (1859), deux Notes très intéressantes sur cette surface: Combescure, "Sur les lignes de courbure de la surface des ondes," pp. 278—285, et Brioschi, "Osservazioni sulla medesima quistione," pp. 285—287. Je me propose de réproduire et développer cette théorie, en changeant les notations et l'arrangement des recherches de la manière qui me paraît convenable.

2. Je prends $a$, $b$, $c$ pour les carrés des semiaxes ($a > b > c$), et j'écris

$$A,\ B,\ C = a+b+c,\quad ab+ac+bc,\quad abc;$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma = b-c,\quad c-a,\quad a-b,$$

($\alpha+\beta+\gamma=0$, et ainsi, $\alpha=+$, $\gamma=+$ et $\beta$, $=-\alpha-\gamma$, $=-$, et en magnitude absolue plus grand que $\alpha$ ou $\gamma$):

$$\begin{aligned}\xi &= x^2 + y^2 + z^2,\\ \eta &= ax^2 + by^2 + cz^2,\\ \zeta &= a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2,\end{aligned}$$

et de là réciproquement

$$\begin{aligned}\beta\gamma x^2 &= \zeta - a\eta - bc\xi,\\ \gamma\alpha y^2 &= \zeta - b\eta - ca\xi,\\ \alpha\beta z^2 &= \zeta - c\eta - ab\xi.\end{aligned}$$

3. L'équation de la surface est

$$\xi\eta - \zeta + abc = 0,$$

et de là, en écrivant $\zeta = \xi\eta - abc$, on obtient pour un point de la surface

$$\begin{aligned}\beta\gamma x^2 &= (\xi - a)(\eta - bc),\\ \gamma\alpha y^2 &= (\xi - b)(\eta - ca),\\ \alpha\beta z^2 &= (\xi - c)(\eta - ab),\end{aligned}$$

équations qui donnent les valeurs des coordonnées $(x, y, z)$ du point en termes de deux paramètres $\xi$, $\eta$. Je remarque que ces équations donnent

$$\frac{x^2}{\xi - a} + \frac{y^2}{\xi - b} + \frac{z^2}{\xi - c} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\eta - bc} + \frac{y^2}{\eta - ca} + \frac{z^2}{\eta - ab} = 0;$$

la première équation, en y considérant $\xi$ comme dénotant $x^2 + y^2 + z^2$, et la seconde équation, en y considérant $\eta$ comme dénotant $ax^2 + by^2 + cz^2$, sont équivalentes l'une et l'autre à l'équation $\xi\eta - \zeta + abc = 0$ de la surface.

4. Je prends $\lambda$, $\mu$, $\nu$ pour les cosinus des inclinations de la normale (ou, ce qui est la même chose, de la perpendiculaire par le centre sur le plan tangent) aux trois axes, et $v$ pour le carré de la longueur de ce perpendiculaire, $v = (\lambda x + \mu y + \nu z)^2$; on a

$$\lambda = \frac{x}{D}\{a\xi + \eta - a(b + c)\},$$

$$\mu = \frac{y}{D}\{b\xi + \eta - b(c + a)\},$$

$$\nu = \frac{z}{D}\{c\xi + \eta - c(a + b)\},$$

et de là, par l'équation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, on a

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma D^2 = \;& \alpha(\xi - a)(\eta - bc)\{a\xi + \eta - a(b + c)\}^2 \\ &+ \beta(\xi - b)(\eta - ca)\{b\xi + \eta - b(c + a)\}^2 \\ &+ \gamma(\xi - c)(\eta - ab)\{c\xi + \eta - c(a + b)\}^2,\end{aligned}$$

équation laquelle (en réduisant à moyen des rélations $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, $a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = -\alpha\beta\gamma$, &c.) devient

$$\alpha\beta\gamma D^2 = \alpha\beta\gamma(\xi\eta - C)(\eta - \xi^2 + A\xi - B);$$

et l'on a ainsi

$$D = \sqrt{(\xi\eta - C)(\eta - \xi^2 + A\xi - B)}.$$

5. On trouve de même manière

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \frac{\xi\eta - C}{D},$$

$$a\lambda x + b\mu y + c\nu z = \frac{\eta}{D}(\eta - \xi^2 + A\xi - B),$$

$$bc\lambda x + ca\mu y + ab\nu z = \frac{1}{D}\{-(\xi\eta - C)(\eta - B) - C(\eta - \xi^2 + A\xi - B)\};$$

ou, en y substituant la valeur de $D$,

$$\lambda x + \mu y + \nu z, \quad = \sqrt{v}, \quad = \sqrt{\frac{\xi\eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B}}.$$

La première de ces équations donne

$$v = \frac{\xi\eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B},$$

et de là réciproquement

$$a\lambda x + \ b\mu y + \ c\nu z = \qquad \eta \sqrt{\frac{\eta - \xi^2 + A\xi - B}{\xi\eta - C}},$$

$$bc\lambda x + ca\mu y + ab\nu z = -(\eta - B)\sqrt{\frac{\xi\eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B}} - C\sqrt{\frac{\eta - \xi^2 + A\xi - B}{\xi\eta - C}};$$

$$\eta = \frac{b(\xi^2 - A\xi + B) - C}{v - \xi}, \quad = \xi^2 - A\xi + B + \frac{\xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi}.$$

On a ainsi les formules

$$\lambda x + \ \mu y + \ \nu z = \qquad \sqrt{v},$$

$$a\lambda x + \ b\mu y + \ c\nu z = \qquad \frac{\eta}{\sqrt{v}},$$

$$bc\lambda x + ca\mu y + ab\nu z = -\eta\sqrt{v} + B\sqrt{v} - \frac{C}{\sqrt{v}};$$

et de là aussi

$$a(b+c)\lambda x + b(c+a)\mu y + c(a+b)\nu z = \quad \eta\sqrt{v} + \frac{C}{\sqrt{v}}.$$

6. On peut introduire dans les formules $v$ au lieu de $\eta$; les deux paramètres seront ainsi: $\xi$, carré de la distance au centre; $v$, carré de la perpendiculaire sur le plan tangent.

On a d'abord

$$\eta - bc = \xi^2 - (a+b+c)\xi + a(b+c) + \frac{\xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi},$$

$$= (\xi - a)\left\{\xi - b - c + \frac{\xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi}\right\},$$

$$= \frac{\xi - a}{v - \xi}\{bc - (b+c)v + v\xi\};$$

et ainsi

$$\beta\gamma x^2 = \frac{(\xi - a)^2}{v - \xi}\{bc - (b+c)v + v\xi\},$$

et de même

$$\gamma\alpha y^2 = \frac{(\xi - b)^2}{v - \xi}\{ca - (c+a)v + v\xi\},$$

$$\alpha\beta z^2 = \frac{(\xi - c)^2}{v - \xi}\{ab - (a+b)v + v\xi\},$$

lesquelles sont les expressions des coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ en termes des paramètres $\xi$, $v$.

7. On a

$$vD^2 = (\xi\eta - C)^2,$$

$$\xi\eta - C = \xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c \,.\left\{1 + \frac{\xi}{v - \xi}\right\}, \quad = \frac{v \,.\, \xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi},$$

et de là

$$D^2 = v \left(\frac{\xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi}\right)^2.$$

On a aussi

$$a\xi + \eta - a(b + c) = \xi - b \,.\, \xi - c \,.\left(1 + \frac{\xi - a}{v - \xi}\right), \quad = \frac{v - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi},$$

et de là

$$\lambda = \frac{x}{D} \, \frac{v - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - \xi},$$

ce qui donne

$$\beta\gamma\lambda^2 = \frac{(v - a)^2}{v \,.\, v - \xi} \{bc - (b + c) v + v\xi\},$$

et de même

$$\gamma\alpha\mu^2 = \frac{(v - b)^2}{v \,.\, v - \xi} \{ca - (c + a) v + v\xi\},$$

$$\alpha\beta\nu^2 = \frac{(v - c)^2}{v \,.\, v - \xi} \{ab - (a + b) v + v\xi\},$$

lesquelles sont les expressions de $\lambda$, $\mu$, $\nu$ en termes des paramètres $\xi$, $v$.

8. On obtient

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma \left\{\frac{\lambda^2}{v - a} + \frac{\mu^2}{v - b} + \frac{\nu^2}{v - c}\right\} = \frac{1}{v \,.\, v - \xi} \,.\, &\alpha (v - a) \{bc - (b + c) v + v\xi\} \\ &+ \beta (v - b) \{ca - (c + a) v + v\xi\} \\ &+ \gamma (v - c) \{ab - (a + b) v + v\xi\},\end{aligned}$$

ou, en réduisant comme auparavant,

$$\frac{\lambda^2}{v - a} + \frac{\mu^2}{v - b} + \frac{\nu^2}{v - c} = 0.$$

9. Je rappelle que l'équation du plan tangent est

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \sqrt{v} = 0,$$

où $v$ est déterminé comme fonction de $\lambda$, $\mu$, $\nu$ par l'équation qui vient d'être donnée; et qu'en considérant $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $v$ comme des paramètres variables qui satisfont à cette équation et à l'équation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, l'on obtient la surface comme enveloppe de ce plan tangent.

10. On a ainsi $v$ comme l'une des racines de l'équation quadrique

$$\frac{\lambda^2}{\theta - a} + \frac{\mu^2}{\theta - b} + \frac{\nu^2}{\theta - c} = 0;$$

en dénotant par $u$ l'autre racine, on a donc

$$\theta^2 - \{(b + c) \lambda^2 + (c + a) \mu^2 + (a + b) \nu^2\} \theta + bc\lambda^2 + ca\mu^2 + ab\nu^2 = \theta - u \,.\, \theta - v,$$

et de là

$$u+v= \quad (b+c)\lambda^2+ \quad (c+a)\mu^2+ \quad (a+b)\nu^2,$$

$$uv \quad = \qquad bc\lambda^2+ \qquad ca\mu^2+ \qquad ab\nu^2.$$

La première de ces équations peut aussi s'écrire sous la forme

$$A-u-v= \qquad a\lambda^2+ \qquad b\mu^2+ \qquad c\nu^2,$$

et la seconde sous la forme

$$B-uv \quad = a(b+c)\lambda^2+b(c+a)\mu^2+c(a+b)\nu^2.$$

11. J'observe que $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont les cosinus des inclinations de la perpendiculaire par le centre sur le plan tangent au point $x$, $y$, $z$, la longueur de cette perpendiculaire étant $\sqrt{v}$; il y a un plan tangent parallèle qui corresponde aux mêmes valeurs de $\lambda$, $\mu$, $\nu$, et évidemment on a alors $\sqrt{u}$ pour la longueur de la perpendiculaire sur ce plan tangent parallèle; autrement dit, les équations de deux plans tangents sont

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z-\sqrt{v}=0,$$

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z-\sqrt{u}=0.$$

Il convient de remarquer qu'on a pris $(x, y, z)$ pour les coordonnées du point de la surface qui est le point de contact du premier de ces deux plans, et qu'ainsi les deux quantités $v$ et $u$ n'entrent pas symétriquement dans les formules.

12. En substituant dans l'expression de $u+v$ ou $uv$, ou ce qui est plus simple dans celle de $A-u-v$, les valeurs de $\lambda^2$, $\mu^2$, $\nu^2$ en termes de $v$, $\xi$, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma(A-u-v)=\frac{1}{v\,.\,v-\xi}\,.\,\alpha a(v-a)^2\{bc-(b+c)v+v\xi\}&\\ +\beta b(v-b)^2\{ca-(c+a)v+v\xi\}&\\ +\gamma c(v-c)^2\{ab-(a+b)v+v\xi\}&,\end{aligned}$$

équation laquelle (en réduisant comme auparavant) devient

$$A-u-v=A-2v+\frac{1}{v\,.\,v-\xi}\{v-a\,.\,v-b\,.\,v-c\},$$

c'est-à-dire

$$(v-\xi)(v-u)=\frac{v-a\,.\,v-b\,.\,v-c}{v},$$

équation qui donne dans des formes très simples, $\xi$ en termes de $v$, $u$, et aussi $u$ en termes de $v$, $\xi$.

13. On a comme auparavant

$$v=\frac{\xi\eta-C}{\eta-\xi^2+A\xi-B};$$

je cherche l'expression de $u$ en termes de $\xi$, $\eta$. En écrivant pour abréger

$$\eta-\xi^2+A\xi-B=M,$$

nous trouvons

$$v-a=\frac{1}{M}(\xi-a)\{a\xi+\eta-a(b+c)\},$$

$$v-b=\frac{1}{M}(\xi-b)\{b\xi+\eta-b(c+a)\},$$

$$v-c=\frac{1}{M}(\xi-c)\{c\xi+\eta-c(a+b)\},$$

$$v-\xi=\frac{1}{M}.\,\xi-a.\xi-b.\xi-c,$$

$$v\quad=\frac{1}{M}(\xi\eta-C);$$

et de là

$$v-u=\frac{v-a.v-b.v-c}{v.v-\xi}=\frac{\{a\xi+\eta-a(b+c)\}\{b\xi+\eta-b(c+a)\}\{c\xi+\eta-c(a+b)\}}{M(\xi\eta-C)},$$

ou enfin, et en restituant pour $M$ sa valeur,

$$u=\frac{(\xi\eta-C)^2-\{a\xi+\eta-a(b+c)\}\{b\xi+\eta-c(a+b)\}\{c\xi+\eta-a(b+c)\}}{(\xi\eta-C)\{\eta-\xi^2+A\xi-B\}}.$$

14. On peut introduire dans les formules $u$ au lieu de $\xi$, et ainsi exprimer les coordonnées, &c., en termes des deux paramètres $v$, $u$. On a pour cela

$$\xi=v-\frac{v-a.v-b.v-c}{v.v-u},$$

donc

$$\xi-a=(v-a)\left\{1+\frac{v-b.v-c}{v.v-u}\right\},\quad =-\frac{v-a}{v(v-u)}\{bc-(b+c)u+uv\}.$$

De plus

$$bc-(b+c)v+v\xi=(v-b)(v-c)-v(v-\xi)$$

$$=(v-b)(v-c)-(v-b)(v-c).\frac{v-a}{v-u}=v-b.v-c.\left(1-\frac{v-a}{v-u}\right)=-\frac{u-a.v-b.v-c}{v-u}.$$

Donc

$$\eta-bc=\frac{\xi-a}{v-\xi}\{bc-(b+c)v+v\xi\}=-\frac{\xi-a.u-a.v-b.v-c}{v-\xi.v-u}=-\frac{v.\xi-a.u-a}{v-a},$$

ou enfin, à moyen de la valeur de $\xi-a$,

$$\eta-bc=\frac{u-a}{v-u}\{bc-(b+c)u+uv\}.$$

Donc

$$-\beta\gamma x^2=\frac{u-a.v-a}{v(v-u)^2}\{bc-(b+c)u+uv\}^2,$$

et de même

$$-\gamma\alpha y^2=\frac{u-b.v-b}{v(v-u)^2}\{ca-(c+a)u+uv\}^2,$$

$$-\alpha\beta z^2=\frac{u-c.v-c}{v(v-u)^2}\{ab-(a+b)u+uv\}^2,$$

équations qui donnent les coordonnées $x$, $y$, $z$ en termes des deux paramètres $v$, $u$.

15. De la valeur ci-dessus donnée pour $\eta - bc$ on déduit celle de $\eta$; en effet, on trouve

$$\begin{aligned}\eta(v-u) &= bc(v-a) + (u-a)\{-(b+c)v + uv\}\\ &= v\{u^2 - (a+b+c)u + ab + ac + bc\} - abc,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\eta = \frac{v(u^2 - Au + B) - C}{v-u}, \quad = u^2 - Au + B + \frac{u-a\,.\,u-b\,.\,u-c}{v-u},$$

ainsi $\eta$ est la même fonction de $v$, $u$ et de $v$, $\xi$.

16. De plus

$$\beta\gamma\lambda^2 = \frac{(v-a)^2}{v\,.\,v-\xi}\{bc - (b+c)v + v\xi\}, \quad = -\frac{u-a\,.\,(v-a)^2\,.\,v-b\,.\,v-c}{v\,.\,v-\xi\,.\,v-u},$$

c'est-à-dire

$$-\beta\gamma\lambda^2 = u-a\,.\,v-a,$$

et de même

$$\begin{aligned}-\gamma\alpha\mu^2 &= u-b\,.\,v-b,\\ -\alpha\beta\nu^2 &= u-c\,.\,v-c,\end{aligned}$$

équations qui se déduisent plus simplement des équations

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1,\\ \frac{\lambda^2}{v-a} + \frac{\mu^2}{v-b} + \frac{\nu^2}{v-c} &= 1,\\ \frac{\lambda^2}{u-a} + \frac{\mu^2}{u-b} + \frac{\nu^2}{u-c} &= 0.\end{aligned}$$

Je rappelle les équations

$$\begin{aligned}\lambda x + \mu y + \nu z &= \sqrt{v},\\ a\lambda x + b\mu y + c\nu z &= \frac{\eta}{\sqrt{v}},\end{aligned}$$

$$a(b+c)\lambda x + b(c+a)\mu y + c(a+b)\nu z = \eta\sqrt{v} + \frac{C}{\sqrt{v}};$$

et j'ajoute aussi celles-ci

$$\frac{\lambda^2}{(v-a)^2} + \frac{\mu^2}{(v-b)^2} + \frac{\nu^2}{(v-c)^2} = \frac{-1}{v\,.\,v-\xi} = -\frac{v-u}{v-a\,.\,v-b\,.\,v-c},$$

et de même

$$\frac{\lambda^2}{(u-a)^2} + \frac{\mu^2}{(u-b)^2} + \frac{\nu^2}{(u-c)^2} = \frac{v-u}{u-a\,.\,u-b\,.\,u-c}.$$

17. Formules différentielles. Nous avons

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0, \quad x d\lambda + y d\mu + z d\nu = \tfrac{1}{2}\frac{dv}{\sqrt{v}};$$

$$\begin{aligned}2\alpha\beta\gamma(a\lambda dx + b\mu dy + c\nu dz) &= \frac{a\alpha}{D}\{a\xi + \eta - a(b+c)\}\,2\beta\gamma x dx + \&c.\\ &= \frac{a\alpha}{D}\{a\xi + \eta - a(b+c)\}\{(\eta - bc)d\xi + (\xi - a)d\eta\}\\ &\quad + \frac{b\beta}{D}\{b\xi + \eta - b(c+a)\}\{(\eta - ca)d\xi + (\xi - b)d\eta\}\\ &\quad + \frac{c\gamma}{D}\{c\xi + \eta - c(a+b)\}\{(\eta - ab)d\xi + (\xi - c)d\eta\},\end{aligned}$$

ou, en réduisant comme auparavant,

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{D}\{-(\xi\eta - C)\,d\xi + (\eta - \xi^2 + A\xi - B)\,d\eta\},$$

c'est-à-dire

$$2(a\lambda dx + b\mu dy + c\nu dz) = -\sqrt{\frac{\xi\eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B}}\,d\xi + \sqrt{\frac{\eta - \xi^2 + A\xi - B}{\xi\eta - C}}\,d\eta,$$

ou enfin

$$a\lambda dx + b\mu dy + c\nu dz = -\tfrac{1}{2}\sqrt{v}\,d\xi + \tfrac{1}{2}\frac{d\eta}{\sqrt{v}},$$

et de là en différentiant l'équation

$$a\lambda x + b\mu y + c\nu z = \frac{\eta}{\sqrt{v}},$$

on déduit

$$ax\,d\lambda + by\,d\mu + cz\,d\nu = \tfrac{1}{2}\sqrt{v}\,d\xi + \tfrac{1}{2}\frac{d\eta}{\sqrt{v}} - \tfrac{1}{2}\frac{\eta\,dv}{v\sqrt{v}}.$$

18. Nous avons de plus

$$2\beta\gamma x\,dx = (\eta - bc)\,d\xi + (\xi - a)\,d\eta,$$

donc

$$4\beta\gamma\,dx^2 = \frac{\{(\eta - bc)\,d\xi + (\xi - a)\,d\eta\}^2}{\xi - a\,.\,\eta - bc},$$

et de même

$$4\gamma\alpha\,dy^2 = \frac{\{(\eta - ca)\,d\xi + (\xi - b)\,d\eta\}^2}{\xi - b\,.\,\eta - ca},$$

$$4\alpha\beta\,dz^2 = \frac{\{(\eta - ab)\,d\xi + (\xi - c)\,d\eta\}^2}{\xi - c\,.\,\eta - ab};$$

et de là, après les réductions nécessaires,

$$4(\ dx^2 + \ dy^2 + \ dz^2) = \frac{\xi^2 - A\xi + B - \eta}{\xi - a\,.\,\xi - b\,.\,\xi - c}\,d\xi^2 + \frac{C - \xi\eta}{\eta - bc\,.\,\eta - ca\,.\,\eta - ab}\,d\eta^2,$$

$$4(a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2) = \frac{C - \xi\eta}{\xi - a\,.\,\xi - b\,.\,\xi - c}\,d\xi^2 + \frac{\eta^2 - B\eta + AC - C\xi}{\eta - bc\,.\,\eta - ca\,.\,\eta - ab}\,d\eta^2;$$

en écrivant la première de ces équations sous la forme

$$ds^2 = E\,d\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + G\,d\eta^2,$$

on a

$$E = \tfrac{1}{4}\frac{\xi^2 - A\xi + B - \eta}{\xi - a\,.\,\xi - b\,.\,\xi - c},\quad F = 0,\quad G = \tfrac{1}{4}\frac{C - \xi\eta}{\eta - bc\,.\,\eta - ca\,.\,\eta - ab}.$$

19. De plus, de l'équation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, et des valeurs de $u + v$ et $uv$, on déduit

$$\lambda d\lambda + \ \mu d\mu + \ \nu d\nu = 0,$$

$$a\lambda d\lambda + \ b\mu d\mu + \ c\nu d\nu = \tfrac{1}{2}(\ du + \ dv),$$

$$bc\lambda d\lambda + ca\mu d\mu + ab\nu d\nu = \tfrac{1}{2}(v\,du + u\,dv).$$

20. Équation différentielle des courbes de courbure de la surface. En partant de l'équation

$$\begin{vmatrix} d\lambda, & d\mu, & d\nu \\ dx, & dy, & dz \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

ou plus simplement des équations

$$d\lambda : d\mu : d\nu = dx : dy : dz,$$

équivalentes à cette première équation, on déduit

$$(xd\lambda + yd\mu + zd\nu)(a\lambda dx + b\mu dy + c\nu dz) - (xdx + ydy + zdz)(a\lambda d\lambda + b\mu d\mu + c\nu d\nu) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dv}{\sqrt{v}}\left(-\sqrt{v}\,d\xi + \frac{d\eta}{\sqrt{v}}\right) + d\xi\,(du + dv) = 0,$$

ou enfin

$$dv\,d\eta + v\,du\,d\xi = 0,$$

laquelle est la forme la plus simple de l'équation dont il s'agit.

21. On a ici

$$\eta = \frac{b(\xi^2 - A\xi + B) - C}{v - \xi}, \quad u = v - \frac{v - a \,.\, v - b \,.\, v - c}{v(v - \xi)},$$

et il s'agit de substituer ces valeurs dans l'équation différentielle. J'écris pour un moment

$$\eta = \frac{H}{v - \xi}, \quad u = \frac{U}{v - \xi},$$

où l'on a

$$H = v(\xi^2 - A\xi + B) - C,$$

$$U = -v\xi + Av - B + \frac{C}{v};$$

l'équation devient

$$-(v - \xi)\{dH dv + v d\xi dU\} + (dv - d\xi)(H dv + vu d\xi) = 0,$$

et l'on trouve

$$dH = (\xi^2 - A\xi + B)\,dv + (2\xi - A)\,v d\xi,$$

$$dU = \left(-\xi + A - \frac{C}{v^2}\right)dv - \qquad v d\xi,$$

et en substituant ces valeurs, on obtient

$$\{v^2(v - \xi) - vU\}\,d\xi^2 - \left\{(v - \xi)\left(\xi v - \frac{C}{v}\right) - vU + H\right\} dv d\xi + \{-(v - \xi)(\xi^2 - A\xi + B) + H\}\,dv^2 = 0.$$

Le coefficient de $d\xi^2$ est $v^3 - Av^2 + Bv - C$, c'est-à-dire $v - a \,.\, v - b \,.\, v - c$; de même, le coefficient de $dv^2$ est $\xi^3 - A\xi^2 + B\xi - C$, c'est-à-dire $\xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c$. Le coefficient de $-dvd\xi$ est

$$\left(\xi v^2 - C - \xi^2 v + \frac{C\xi}{v}\right) + (v^2\xi - Av^2 + Bv - C) + (v\xi^2 - Av\xi + Bv - C),$$

$$= \xi\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C\,;$$

l'équation différentielle est donc

$$(v^3 - Av^2 + Bv - C)\, d\xi^2 - \left\{\xi\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C\right\} dvd\xi$$
$$+ (\xi^3 - A\xi^2 + B\xi - C)\, dv^2 = 0.$$

22. Mais on a identiquement

$$\begin{aligned} &\xi - a \,.\, v - b \,.\, v - c \\ +\, &\xi - b \,.\, v - c \,.\, v - a \\ +\, &\xi - c \,.\, v - a \,.\, v - b \\ -\, &\xi \,.\, \frac{1}{v} \,.\, v - a \,.\, v - b \,.\, v - c = \xi\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C, \end{aligned}$$

donc en divisant par

$$v^3 - Av^2 + Bv - C, \quad = v - a \,.\, v - b \,.\, v - c,$$

l'équation devient

$$d\xi^2 - d\xi dv\left(\frac{\xi - a}{v - a} + \frac{\xi - b}{v - b} + \frac{\xi - c}{v - c} - \frac{\xi}{v}\right) + dv^2 \,.\, \frac{\xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - a \,.\, v - b \,.\, v - c} = 0.$$

23. De même, en substituant dans l'équation $dvd\eta + vdud\xi = 0$ les valeurs

$$\eta = \frac{v\,(u^2 - Au + B)}{v - u}, \quad \xi = v - \frac{v - a \,.\, v - b \,.\, v - c}{v - u},$$

on obtient

$$(v^3 - Av^2 + Bv - C)\, du^2 - \left\{u\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C\right\} dvdu$$
$$+ (u^3 - Au^2 + Bu - C)\, dv^2 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$du^2 - du\,dv\left(\frac{u - a}{v - a} + \frac{u - b}{v - b} + \frac{u - c}{v - c} - \frac{u}{v}\right) + dv^2 \,.\, \frac{u - a \,.\, u - b \,.\, u - c}{v - a \,.\, v - b \,.\, v - c} = 0\,;$$

les équations différentielles entre $\xi$, $v$ et entre $u$, $v$ respectivement sont ainsi precisément de la même forme: on peut vérifier sans beaucoup de peine qu'en introduisant dans la première équation $u$ au lieu de $\xi$ par la substitution

$$\xi = v - \frac{v - a \,.\, v - b \,.\, v - c}{v - u},$$

on obtient la seconde équation: c'est là un théorème d'analyse assez remarquable.

24. L'équation différentielle en $u$, $v$ est changée en entrechangeant ces deux variables: cela doit être ainsi, car autrement les deux courbes de courbure par le

point de contact du plan tangent $\lambda X + \mu Y + \nu Z - \sqrt{v} = 0$, et les deux courbes de courbure par le point de contact du plan tangent parallèle $\lambda X + \mu Y + \nu Z - \sqrt{u} = 0$ seraient parallèles les unes aux autres, ce qui n'est pas en général vrai. Pour que les deux équations soient identiques, on doit avoir

$$v - a \,.\, v - b \,.\, v - c \,.\left(\frac{u-a}{v-a} + \frac{u-b}{v-b} + \frac{u-c}{v-c} - \frac{u}{v}\right)$$

$$= u - a \,.\, u - b \,.\, u - c \,.\left(\frac{v-a}{u-a} + \frac{v-b}{u-b} + \frac{v-c}{u-c} - \frac{v}{u}\right),$$

c'est-à-dire

$$u\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C = v\left(2u^2 - Au + \frac{C}{u}\right) - Au^2 + 2Bu - 3C,$$

ou enfin

$$(u - v)\left\{2u^2v^2 - A\,(u + v)\,uv + 2Buv - C\,(u + v)\right\} = 0\,;$$

$u = v$ donne le plan à l'infinité, qui coupe la surface selon les deux coniques imaginaires $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ et $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, et aussi les plans tangents singuliers qui touchent la surface chacun selon un cercle réel ou imaginaire; je n'ai pas considéré la courbe sur la surface que l'on obtient en égalant à zéro l'autre facteur.

25. Rayons de courbure.

Les équations de la normale au point $(x, y, z)$ sont

$$X = x - R\lambda, \quad Y = y - R\mu, \quad Z = z - R\nu,$$

et, en supposant que les coordonnées $X$, $Y$, $Z$ se rapportent à un centre de courbure, on a

$$dx = Rd\lambda, \quad dy = Rd\mu, \quad dz = Rd\nu,$$

et de là

$$xdx + ydy + zdz = R\,(xd\lambda + yd\mu + zd\nu),$$

c'est-à-dire $d\xi = \dfrac{Rdv}{\sqrt{v}}$; donc $R = \sqrt{v}\,\dfrac{d\xi}{dv}$, $= \theta\sqrt{v}$, en posant $\theta = \dfrac{d\xi}{dv}$: $\theta$ est donc déterminé, en fonction de $\xi$, $v$, par l'équation

$$\theta^2 - \left(\frac{\xi-a}{v-a} + \frac{\xi-b}{v-b} + \frac{\xi-c}{v-c} - \frac{\xi}{v}\right)\theta + \frac{\xi - a \,.\, \xi - b \,.\, \xi - c}{v - a \,.\, v - b \,.\, v - c} = 0,$$

et les deux rayons de courbure sont alors donnés par la formule $R = \theta\sqrt{v}$.

26. Surface des centres de courbure. En écrivant pour $R$ sa valeur, $= \theta\sqrt{v}$, nous avons

$$X = x - \lambda\theta\sqrt{v}, \quad Y = y - \mu\theta\sqrt{v}, \quad Z = z - \nu\theta\sqrt{v},$$

où $X$, $Y$, $Z$ dénotent les coordonnées d'un point de la surface cherchée; et si nous formons les expressions $\Xi$, H, Z analogues à $\xi$, $\eta$, $\zeta$, savoir

$$\begin{aligned}
\Xi &= X^2 + Y^2 + Z^2,\\
\mathrm{H} &= aX^2 + bY^2 + cZ^2,\\
\mathrm{Z} &= a\,(b + c)\,X^2 + b\,(c + a)\,Y^2 + c\,(a + b)\,Z^2,
\end{aligned}$$

on obtient sans peine, à moyen des valeurs trouvées pour

$$\lambda x + \mu y + \nu z, \quad a\lambda x + b\mu y + c\nu z, \quad a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2, \text{ \&c.},$$

$$\begin{aligned} \Xi &= \quad \xi - 2\theta v \qquad + \theta^2 v, \\ \mathrm{H} &= \quad \eta - 2\theta\eta \qquad + \theta^2 v\,(A - u - v), \\ \mathrm{Z} &= \xi\eta + C - 2\theta\,(\eta v + C) + \theta^2 v\,(B - uv)\,; \end{aligned}$$

où comme auparavant

$$\theta^2 - \left(\frac{\xi - a}{v - a} + \frac{\xi - b}{v - b} + \frac{\xi - c}{v - c} - \frac{\xi}{v}\right)\theta + \frac{\xi - a\,.\,\xi - b\,.\,\xi - c}{v - a\,.\,v - b\,.\,v - c} = 0,$$

$$\eta = \frac{v\,(\xi^2 - A\xi + B) - C}{v - \xi},$$

$$(v - \xi)\,(v - u) = \frac{v - a\,.\,v - b\,.\,v - c}{v}\,;$$

en éliminant entre ces six équations les cinq quantités $\xi$, $\eta$, $\theta$, $v$, $u$, on obtient l'équation de la surface des centres en termes de $\Xi$, H, Z qui sont des fonctions données des coordonnées $X$, $Y$, $Z$ d'un point de la surface.

27. Je remarque que les sections principales de la surface des ondes sont des courbes de courbure de cette surface; en particulier, pour fixer les idées, la section par le plan $z = 0$, savoir le cercle $\xi - c = 0$ et l'ellipse $\eta - bc = 0$ sont des courbes de courbure. Pour l'une ou l'autre de ces courbes, il y a une suite des courbes de courbure de l'autre espèce qui coupent le cercle ou l'ellipse à angle droit, et qui sont symétriques aux deux côtés du plan $z = 0$. En considérant par exemple l'ellipse, les normales à la surface aux points successifs de cette courbe sont situées dans le plan de $xy$ et se coupent selon une courbe dans ce plan, la développée de l'ellipse, laquelle est une courbe sur la surface des centres; l'ordre de cette développée est $= 6$. Mais, de plus, chaque normale de la surface à un point $(x, y, 0)$ de l'ellipse est rencontrée par les normales de la surface aux points $(x, y, \pm\delta z)$ au-dessus et au-dessous du point de l'ellipse: les points d'intersection forment une courbe dans le plan de $xy$, laquelle est aussi une courbe sur la surface des centres, et de plus elle est une courbe cuspidale sur cette surface: nous allons voir que l'ordre de cette courbe est $= 6$. De même pour le cercle, la développée du cercle est le point $x = 0$, $y = 0$, lequel à ce que je crois doit être considéré comme cercle infiniment petit (ou deux droites imaginaires) $x^2 + y^2 = 0$; le cercle donne lieu aussi à une courbe qui est une courbe cuspidale sur la surface des centres, et nous allons voir que l'ordre de cette courbe est $= 4$. La section de la surface des centres par le plan $xy$ est donc composée comme suit:

| | | |
|---|---|---|
| développée de l'ellipse, | ordre | 6 |
| courbe cuspidale, ordre 6, trois fois, | „ | 18 |
| développée du cercle, | „ | 2 |
| courbe cuspidale, ordre 4, trois fois, | „ | 12 |
| | | 38, |

et il paraît ainsi que l'ordre de la surface des centres de la surface des ondes doit être $=38$.

28. Je m'arrête pour un moment pour considérer la même théorie par rapport à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$. La section par le plan $z=0$ est ici l'ellipse $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$; et pour la surface des centres on a dans le plan de $xy$, la développée d'ellipse, courbe d'ordre 6, et aussi une courbe cuspidale laquelle est une ellipse. En effet, pour trouver l'équation de cette courbe, on a pour les coordonnées $X$, $Y$ du point où la normale au point $(x, y, z)$ rencontre le plan $z=0$, les équations $x=X+\frac{\lambda}{\nu}z$, $y=Y+\frac{\mu}{\nu}z$; c'est-à-dire $X=x\left(1-\frac{c}{a}\right)$, $Y=y\left(1-\frac{c}{b}\right)$. Dans ces équations $x$, $y$ se rapportent à un point de l'ellipse $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$; en éliminant entre les trois équations $x$, $y$, on obtient $\frac{aX^2}{(a-c)^2}+\frac{bY^2}{(b-c)^2}=1$, ou ce qui est la même chose $\frac{aX^2}{\beta^2}+\frac{bY^2}{\alpha^2}=1$. La section principale de la surface des centres est donc composée de cette ellipse trois fois, et de la développée de l'ellipse $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$; l'ordre de la section, et ainsi l'ordre de la surface des centres, est donc $6+3.2, =12$, comme cela doit être.

29. De même pour la surface des ondes on a $x=X+\frac{\lambda}{\nu}z$, $y=Y+\frac{\mu}{\nu}z$, c'est-à-dire

$$X=x-\frac{x\{a\xi+\eta-a(b+c)\}}{c\xi+\eta-c(a+b)},$$

$$Y=y-\frac{y\{b\xi+\eta-b(c+a)\}}{c\xi+\eta-c(a+b)},$$

où pour $z=0$ on a $(\xi-c)(\eta-ab)=0$, équation qui donne: 1°, le cercle $\xi-c=0$; 2°, l'ellipse $\eta-ab=0$.

1°. Pour le cercle $\xi=c$, en écrivant $x^2=c\theta$, $y^2=c(1-\theta)$, nous avons

$$\eta=ac\theta+bc(1-\theta), =c(b+\gamma\theta)$$

et de là

$$a\xi+\eta-a(b+c)=b\beta+c\gamma\theta,$$

$$b\xi+\eta-b(c+a)=b\beta+c\gamma\theta,$$

$$c\xi+\eta-c(a+b)=c(\beta+\gamma\theta),$$

valeurs qui donnent

$$X=\sqrt{c}\sqrt{\theta}\left\{1-\frac{b\beta+c\gamma\theta}{c(\beta+\gamma\theta)}\right\}, =-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{c}}\frac{\sqrt{\theta}}{\beta+\gamma\theta},$$

$$Y=\sqrt{c}\sqrt{1-\theta}\left\{1-\frac{b\beta+c\gamma\theta}{c(\beta+\gamma\theta)}\right\}, =-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{c}}\frac{\sqrt{1-\theta}}{\beta+\gamma\theta};$$

donc

$$X^2+Y^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{c}\frac{1}{(\beta+\gamma\theta)^2},$$

$$\alpha X^2-\beta Y^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{c}\frac{\alpha\theta-\beta(1-\theta)}{(\beta+\gamma\theta)^2},\quad =-\frac{\alpha^2\beta^2}{c}\frac{1}{\beta+\gamma\theta},$$

et de là

$$(\alpha X^2-\beta Y^2)^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{c}(X^2+Y^2);$$

courbe de l'ordre 4, cuspidale sur la surface des centres.

2°. Pour l'ellipse $\eta=ab$, en écrivant $x^2=b\theta$, $y^2=a(1-\theta)$, et de là

$$\xi=b\theta+a(1-\theta),\ =a-\gamma\theta,$$

on obtient

$$\begin{aligned}a\xi+\eta-a(b+c)&=-a(\beta+\gamma\theta),\\ b\xi+\eta-b(c+a)&=-b(\beta+\gamma\theta),\\ c\xi+\eta-c(a+b)&=-b\beta-c\gamma\theta,\end{aligned}$$

valeurs qui donnent

$$X=\sqrt{b}\sqrt{\theta}\quad\left\{1-\frac{a(\beta+\gamma\theta)}{b\beta+c\gamma\theta}\right\}=-\sqrt{b}\beta\gamma\frac{\sqrt{\theta}(1-\theta)}{b\beta+c\gamma\theta},$$

$$Y=\sqrt{a}\sqrt{1-\theta}\left\{1-\frac{b(\beta+\gamma\theta)}{b\beta+c\gamma\theta}\right\}=-\sqrt{a}\alpha\gamma\frac{\theta\sqrt{1-\theta}}{b\beta+c\gamma\theta};$$

donc

$$\frac{X^2}{b\beta^2}+\frac{Y^2}{a\alpha^2}=\gamma^2\frac{\theta(1-\theta)}{(b\beta+c\gamma\theta)^2},$$

$$\frac{X^2}{\beta}-\frac{Y^2}{\alpha}=\gamma^2\theta(1-\theta)\frac{b\beta(1-\theta)-a\alpha\theta}{(b\beta+c\gamma\theta)^2},\quad =\gamma^2\frac{\theta(1-\theta)}{b\beta+c\gamma\theta};$$

$$\frac{X^2}{b\beta^2}\cdot\frac{Y^2}{a\alpha^2}=\gamma^4\frac{\theta^3(1-\theta)^3}{(b\beta+c\gamma\theta)^4},$$

et de là

$$\left(\frac{X^2}{b\beta^2}+\frac{Y^2}{a\alpha^2}\right)\left(\frac{X^2}{\beta}-\frac{Y^2}{\alpha}\right)^2=\gamma^2\cdot\frac{X^2}{b\beta^2}\cdot\frac{Y^2}{a\alpha^2},$$

courbe de l'ordre 6, cuspidale sur la surface des centres.

30. On aurait pu développer la théorie des courbes et rayons de courbure à moyen de la formule ci-dessus donnée, $ds^2=Ed\xi^2+2Fd\xi d\eta+Gd\eta^2$ $(F=0)$, mais pour cela il faudrait trouver plusieurs expressions qui ne sont pas encore calculées, savoir les coefficients des formules

$$\begin{aligned}d^2x&=\alpha\,d\xi^2+2\alpha' d\xi\,d\eta+\alpha'' d\eta^2,\\ d^2y&=\beta d\xi^2+2\beta' d\xi\,d\eta+\beta'' d\eta^2,\\ d^2z&=\gamma\,d\xi^2+2\gamma' d\xi\,d\eta+\gamma'' d\eta^2,\end{aligned}$$

et puis

$$E',\ F',\ G' = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma,\quad \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma',\quad \lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma''.$$

En prenant comme auparavant $R$ pour le rayon de courbure on aurait alors, (Salmon, *Geometry of three dimensions*, Ed. 4 (1882), p. 347),

$$\left\| \begin{matrix} R, & E\,d\xi, & G\,d\eta \\ EG, & E'd\xi + F'd\eta, & F'd\xi + G'd\eta \end{matrix} \right\| = 0,$$

et

$$\left\| \begin{matrix} d\eta, & RE' - E^2G, & RF' \\ -d\xi, & RF', & RG' - EG^2 \end{matrix} \right\| = 0,$$

formules pour les courbes et rayons de courbure: en particulier, l'équation différentielle des courbes de courbure peut s'écrire sous la forme

$$\left| \begin{matrix} d\eta^2, & -d\xi\,d\eta, & d\xi^2 \\ E, & 0, & G \\ E', & F', & G' \end{matrix} \right| = 0.$$

Au reste, cette équation en $d\xi$, $d\eta$ se déduirait plus simplement de l'équation $dv\,d\eta + v\,du\,d\xi = 0$, en y introduisant les expressions de $v$, $u$ en termes de $\xi$, $\eta$.

31. Courbes géodésiques sur la surface. L'équation différentielle du second ordre des courbes géodésiques dépend seulement des coefficients $E$, $F$, $G$, savoir en supposant $F = 0$, cette équation est

$$\begin{aligned} &E\,d\xi\,(-E_2 d\xi^2 + 2G_1 d\xi\,d\eta + G_2 d\eta^2) \\ &- G\,d\eta\,(\ E_1 d\xi^2 + 2E_2 d\xi\,d\eta - G_1 d\eta^2) \\ &+ 2EG\,(\ d\xi\,d^2\eta - d\eta\,d^2\xi\ ) = 0, \end{aligned}$$

ou ce qui est la même chose

$$(-EE_2,\ 2EG_1 - GE_1,\ EG_2 - 2GE_2,\ GG_1)(d\xi,\ d\eta)^3 + 2EG\,(d\xi\,d^2\eta - d\eta\,d^2\xi) = 0,$$

où

$$E_1,\ E_2,\ G_1,\ G_2 = \frac{dE}{d\xi},\ \frac{dE}{d\eta},\ \frac{dG}{d\xi},\ \frac{dG}{d\eta}$$

respectivement, voir Cayley, "On geodesic lines, in particular those of a Quadric Surface," *Proc. London Math. Soc.*, t. IV. (1872), p. 197, [508]. Nous avons vu que pour la surface des ondes dont il s'agit les expressions de $E$, $G$ sont

$$E = \tfrac{1}{4}\,\frac{\xi^2 - A\xi + B - \eta}{\xi - a\,.\,\xi - b\,.\,\xi - c},\quad G = \tfrac{1}{4}\,\frac{C - \xi\eta}{\eta - bc\,.\,\eta - ca\,.\,\eta - ab},$$

et l'on obtiendrait de là sans peine les expressions des coefficients de la fonction cubique $(-EE_2, \ldots)(d\xi,\ d\eta)^3$ qui entre dans l'équation différentielle.