162/2012

Raport Badawczy

Research Report

RB/37/2012

Synteza ocen ekspertów na podstawie macierzy marginesów przewag

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2012

SYNTEZA OCEN EKSPERTÓW NA PODSTAWIE MACIERZY MARGINESÓW PRZEWAG

Hanna Bury, Dariusz Wagner

Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

W zadaniach wyznaczania oceny grupowej niekiedy zdarza się, że informacja o opiniach ekspertów jest ograniczona. Zazwyczaj dana jest wówczas jedynie macierz rozkładu głosów ekspertów L lub macierz różnic rozkładu głosów ekspertów ΔL.

Debord (1987) zaproponował metodę odtwarzania ocen ekspertów na podstawie macierzy różnic rozkładu głosów ekspertów.

Jest to metoda bardzo prosta i skuteczna, generująca pewien zestaw ocen ekspertów zgodny z zadaną macierzą różnic rozkładu głosów ekspertów.

1. Wprowadzenie

Do wyznaczania oceny grupowej na podstawie indywidualnych opinii często stosowane są metody wykorzystujące porównania parami i wynikającą z nich macierz rozkładu głosów ekspertów (Nurmi, 1987). Dla każdej pary rozpatrywanych obiektów (O_i, O_j) , $i, j = 1, \ldots, n$ podawana jest liczba ekspertów l_{ij}, których zdaniem obiekt O_i jest lepszy w sensie przyjętego kryterium od obiektu O_j oraz liczba ekspertów l_{ji} mających opinię przeciwstawną. W przypadku ogólnym, gdy w opiniach ekspertów występują obiekty równoważne spełniona jest zależność

$$l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} = K, \qquad (1)$$

gdzie m_{ij} oznacza liczbę ekspertów, którzy uznali obiekty O_i i O_j za równoważne, zaś K oznacza liczbę ekspertów.

Jeżeli w ocenach ekspertów mogą występować obiekty równoważne zazwyczaj przyjmuje się – aby była spełniona równość (1) – że każdy z obiektów równoważnych otrzymuje ½ głosu eksperta. W macierzy rozkładu głosów ekspertów występują więc elementy l_{ij} oraz l_{ji} lub elementy $l_{ij} + ½\, m_{ij}$ oraz $l_{ji} + ½\, m_{ij}$.

Zatem w macierzy rozkładu głosów ekspertów zawarta jest pośrednio informacja o łącznej liczbie ekspertów.

Mogą zaistnieć sytuacje, kiedy nie dysponujemy macierzą rozkładu głosów ekspertów a jedynie macierzą różnic rozkładu głosów ekspertów $\Delta L = [\Delta l_{ij}]$, nazywaną dalej – dla uproszczenia zapisu – macierzą marginesów przewag (Lamboray, 2007). Warto podkreślić, że zarówno w przypadku występowania obiektów równoważnych w opiniach ekspertów bądź ich braku, różnica Δl_{ij} ma taką samą postać. A zatem znając tylko macierz ΔL nie jesteśmy w stanie jednoznacznie stwierdzić, czy w opiniach ekspertów występowały obiekty równoważne, czy też nie.

Trudności związane z ustaleniem rzeczywistych (w sensie macierzy rozkładu głosów ekspertów) opinii ekspertów i koniecznością posługiwania się jedynie macierzą marginesów przewag mogą pojawiać się w niektórych przypadkach zadań praktycznego wyznaczania oceny grupowej (nazywanych dalej w skrócie zadaniami ekspertyzy).

Przykładowo można odwołać się do następujących sytuacji.

- Jedna z metod przeprowadzenia ekspertyzy polega na wprowadzeniu dwuetapowości. W pierwszym etapie eksperci podają swoje oceny oraz informacje dodatkowe określające np. ich kompetencje w dziedzinie, której dotyczy ekspertyza lub podstawę argumentacji prowadzącej do oceny (np. analiza teoretyczna, własne doświadczenie, dogłębna znajomość wyników badań, intuicja). W drugim etapie na podstawie tych dodatkowych informacji osoba prowadząca ekspertyzę może podjąć decyzję o nieuwzględnieniu niektórych opinii lub prosić o dodatkowe wyjaśnienia. W takim przypadku podstawę dalszych prac będzie stanowiła jedynie macierz marginesów przewag.

- Podobna sytuacja ma również miejsce, gdy prowadzona jest ekspertyza z tak zwanym sprzężeniem zwrotnym, to znaczy, gdy ekspertyza jest realizowana w kilku turach a wyniki każdej z tur są dyskutowane przez ekspertów (w zakresie dopuszczalnym przez metodę). W rezultacie macierz rozkładu głosów ekspertów może ulegać zmianom. Zatem również w tym przypadku osoba prowadząca ekspertyzę może w dalszych pracach ograniczyć się jedynie do macierzy marginesów przewag.

- W przypadku skomplikowanych ekspertyz, szczególnie dotyczących dalszej przyszłości, eksperci – nawet dobrani z dużą starannością – mogą uznać, że nie są w stanie porównać niektórych obiektów ze sobą. Przy większej liczbie obiektów może również zdarzyć się, że opinie niektórych ekspertów nie będą przechodnie. Jeżeli zaistnieje taka sytuacja, prowadzący ekspertyzę powinien ten fakt uwzględnić. Jednym z rozwiązań może być ograniczenie się do macierzy marginesów przewag.

W niektórych metodach wyznaczania oceny grupowej z definicji wykorzystuje się tylko macierz marginesów przewag. Przykładem może być metoda Tidemana ranked pairs (Tideman, 1987) lub metoda Schulze'go (Schulze, 2011).

W opisanych sytuacjach ocena grupowa może być wyznaczana jedynie na podstawie macierzy marginesów przewag. Jeżeli – z jakichś względów – chcielibyśmy porównać tak wyznaczoną ocenę grupową z uzyskaną innymi metodami, wykorzystującymi macierze rozkładu głosów ekspertów (np. metodą Condorceta czy metodą Bordy), na przeszkodzie może stanąć nieznajomość macierzy rozkładu głosów ekspertów. Debord (1987) podał prosty sposób konstrukcji uporządkowań – a więc również macierzy rozkładu głosów ekspertów –

dla których macierz marginesów przewag jest zgodna z rozważaną macierzą marginesów przewag. Ocena grupowa będzie w obu rozpatrywanych przypadkach taka sama.

Ze względu na swą prostotę metoda ta może być łatwo stosowana. W pracy przedstawiono opis tej metody i przykłady jej zastosowań.

2. Definicje

Zakładamy, że dany jest zbiór n obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, \quad, O_n\}$ oraz zbiór K ekspertów, $\mathcal{K} = \{1, ..., K\}$ dokonujących oceny. Przyjmujemy, że opinie ekspertów są podawane w skali porządkowej. Ponadto zakładamy, że wszystkie obiekty są porównywane a w opiniach ekspertów mogą występować obiekty równoważne.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$O_i \succ^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiekt O_i jest lepszy w sensie przyjętego kryterium (zbioru kryteriów) od obiektu O_j,

$O_i \approx^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiekty O_i i O_j są równoważne w sensie przyjętego kryterium (zbioru kryteriów),

$O_i \prec^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiekt O_j jest lepszy w sensie przyjętego kryterium (zbioru kryteriów)od obiektu O_i.

Opinię k-tego eksperta można przedstawić w postaci tzw. macierzy porównań parami $A^k = [a_{ij}^k]$, gdzie

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } O_i \succ^k O_j, \\ 0 & \text{jeżeli } O_i \approx^k O_j, \\ -1 & \text{jeżeli } O_i \prec^k O_j. \end{cases} \tag{2}$$

Zakładamy, że wszystkie rozważane relacje między obiektami odnoszą się do przyjętego kryterium (zbioru kryteriów) ich porównywania. Dla uproszczenia zapisu w dalszych rozważaniach to założenie nie jest powtarzane.

W zadaniach wyznaczania oceny grupowej często przyjmuje się, że informacja o opiniach ekspertów jest przedstawiona jedynie w postaci macierzy rozkładu głosów ekspertów L.

$$L=\begin{array}{c|c|c|c|c} & O_1 & O_2 & \cdots & O_n \\ \hline O_1 & 0 & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ \hline O_2 & l_{21} & 0 & \cdots & l_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O_n & l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 0 \end{array}, \tag{3}$$

Macierz marginesów przewag

$$\Delta L = L - L^T. \tag{4}$$

Jeżeli w ocenach ekspertów nie występują obiekty równoważne, to (1)

$$\Delta l_{ij} = l_{ij} - l_{ji} = 2l_{ij} - K. \tag{5}$$

Warto zauważyć, że Δl_{ij} jest parzyste wtedy, gdy K jest parzyste (analogicznie nieparzyste).

W przypadku występowania obiektów równoważnych w ocenach ekspertów mamy

$$\tilde{l}_{ij} = l_{ij} + 0.5m_{ij}, \tag{6}$$

skąd

$$\Delta l_{ij} = \tilde{l}_{ij} - \tilde{l}_{ji} = 2l_{ij} + m_{ij} - K = 2\tilde{l}_{ij} - K. \tag{7}$$

Ponieważ $2\tilde{l}_{ij}$ może przybierać zarówno wartości parzyste, jak i nieparzyste, stąd Δl_{ij} może być parzyste lub nieparzyste.

Załóżmy, że eksperci podają swoje opinie w postaci uporządkowań P^t ($t = 1,...T$) zbioru n obiektów, gdzie T liczba wszystkich uporządkowań elementów tego zbioru.

Definicja (Debord, 1987).

Profilem uporządkowań zbioru n obiektów nazywamy wektor

$$p = (p_1, \ldots, p_t, \ldots, p_T) \tag{8}$$

gdzie p_t oznacza liczbę ekspertów, których opinia ma postać P^t, ($t = 1,\ldots T$).

Jeżeli liczba ekspertów, których opinie bierzemy pod uwagę jest równa K, wówczas

$$\sum_{t=1}^{T} p_t = K \tag{9}$$

Profil zawiera – przy przyjętych założeniach – pełny opis wyników ekspertyzy.

Jeżeli założymy, że w opiniach ekspertów nie występują obiekty równoważne, wówczas $T = n!$. W przeciwnym przypadku liczba wszystkich uporządkowań zbioru n obiektów może być wyznaczona za pomocą przybliżonej zależności $n!/2(\log 2)^{n+1}$ (Bury, Wagner, 2009).

3. Metoda Deborda

Rozważania ograniczymy do przypadku, gdy w opiniach ekspertów nie występują obiekty równoważne.

Oznaczmy przez $O\ldots ij$ dowolną permutację obiektów ze zbioru $\mathcal{O} \setminus \{O_i, O_j\}$ oraz przez $—O\ldots ij$ permutację odwrotną.

Dla każdej pary obiektów (O_i, O_j) rozważamy dwa uporządkowania

$$O\ldots ij,\ O_i,\ O_j \tag{10}$$

oraz

$$O_i,\ O_j,\ —O\ldots ij. \tag{11}$$

Debord zauważył, że dla takiej pary uporządkowań macierz rozkładu głosów ekspertów L^{ij} oraz macierz marginesów przewag ΔL^{ij} mają postać

$$L^{(ij)} = [l_{ij}^{(ij)}] = \begin{array}{c|ccccccc} & O_1 & \dots & O_i & \dots & O_j & \dots & O_n \\ \hline O_1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_i & 1 & \vdots & 0 & \dots & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ O_j & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ O_n & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \end{array} \tag{12}$$

oraz

$$\Delta L^{(ij)} = [\Delta l_{ij}^{(ij)}] = \begin{array}{c|ccccccc} & O_1 & \dots & O_i & \dots & O_j & \dots & O_n \\ \hline O_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_i & 0 & \vdots & 0 & \dots & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ O_j & 0 & \vdots & -2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ O_n & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{array}. \tag{13}$$

ΔL^{ij} jest macierzą o wyrazach zerowych, za wyjątkiem elementów (i, j) oraz (j, i), które są równe odpowiednio 2 oraz -2.

Metoda Deborda dotyczy wyznaczania profilu uporządkowań liniowych p_D tworzonego z par uporządkowań postaci (10) oraz (11), dla którego macierz marginesów przewag $\Delta L'$ jest zgodna z zadaną macierzą ΔL. (Przez uporządkowanie liniowe rozumiemy relację binarną spójną, antysymetryczną i przechodnią.)

Debord udowodnił następujący lemat.

Lemat (Debord, 1987, Lamboray, 2007).

Zakładamy, że dana jest macierz ΔL o wymiarach $n \times n$, której wyrazy Δl_{ij} są parzyste. Wówczas istnieje profil uporządkowań p_D dla n obiektów taki, że ΔL jest jego macierzą marginesów przewag.

Profil ten jest konstruowany następująco.

Dla każdego dodatniego Δl_{ij} tworzymy parę uporządkowań

$$O\ldots ij,\ O_i,\ O_j \tag{14}$$

oraz

$$O_i,\ O_j,\ \text{—}\ O\ldots ij, \tag{15}$$

która w konstruowanym profilu występuje $\Delta l_{ij}/2$ razy.

Elementy macierzy $\Delta L'$ tego profilu dane są zależnością

$$\Delta l'_{ij} = \Delta l_{ij}^{(ij)} \cdot \left.\frac{\Delta l_{ij}}{2}\right|_{\Delta l_{ij}>0} = 2 \cdot \frac{\Delta l_{ij}}{2} = \Delta l_{ij} \tag{16}$$

czyli $\Delta L' = \Delta L$.

Z uwagi na wymaganie, aby wyrazy macierzy marginesów przewag były parzyste, należy rozpatrzeć następujące przypadki.

a. liczba ekspertów K jest parzysta $\quad \Delta l_{ij} = 2l_{ij} - K$ jest parzyste.

b. liczba ekspertów K jest nieparzysta $\quad \Delta l_{ij} = 2l_{ij} - K$ jest nieparzyste, w tym przypadku współczynniki macierzy marginesów przewag należy pomnożyć przez 2

$$\overline{\Delta l}_{ij} = 2(2l_{ij} - K).$$

4. Analiza liczby uporządkowań wyznaczonych metodą Deborda

Wyznaczamy pary indeksów

$$(i,j) \text{ takie, że } \Delta l_{ij} > 0 \qquad I_1=\{(i,j,\ j>i) : \Delta l_{ij} > 0\}, \tag{17}$$

(j, i) takie, że $\Delta l_{ji} > 0$ $\qquad I_2=\{(i, j, j > i) : \Delta l_{ji} > 0\}$ (18)

oraz

(i, j) takie, że $\Delta l_{ij} = 0$ $\qquad I_3=\{(i, j, i \neq j) : \Delta l_{ij} = 0\}$. (19)

Zgodnie z przyjętą metodologią liczba uporządkowań K' otrzymanych w wyniku zastosowania metody Deborda wynosi

$$K' = \sum_{(i,j)\in I_1} \Delta l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} \Delta l_{ji} . \tag{20}$$

Mamy

$$K' = \sum_{(i,j)\in I_1} \Delta l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} \Delta l_{ji} = 2 \sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} - \sum_{(i,j)\in I_1} K + 2 \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} - \sum_{(i,j)\in I_2} K . \tag{21}$$

Jeżeli $I_3 = \Phi$, liczba rozpatrywanych par obiektów wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$. Stąd

$$\sum_{(i,j)\in I_1} \Delta l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} \Delta l_{ji} = 2\left(\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} \right) - \frac{n(n-1)}{2} K . \tag{22}$$

Warunek $\Delta l_{ij} > 0$ oznacza, że $l_{ij} > K/2$. Podobnie, warunek $\Delta l_{ji} > 0$ oznacza, że $l_{ji} > K/2$.

A zatem

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} > \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{K}{2} . \tag{23}$$

Można więc przyjąć, że

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = \left(\frac{n(n-1)}{2} + a \right) \cdot \frac{K}{2}, \text{ gdzie } a > 0. \tag{24}$$

Zatem ze wzorów (22) i (24) wynika, że

$$K' = \sum_{(i,j)\in I_1} \Delta l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} \Delta l_{ji} = aK . \tag{25}$$

Dla $\Delta l_{ij} = 2, \quad i, j \in I_1$ oraz $\Delta l_{ji} = 2, \quad i, j \in I_2$ mamy

$$K'_{min} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1) . \tag{26}$$

Podobnie

dla $\Delta l_{ij} = K, \quad (i,j) \in I_1$ oraz $\Delta l_{ji} = K, \quad (i,j) \in I_2$ mamy

$$K'_{max} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot K , \tag{27}$$

skąd

$$\frac{K'_{max}}{K'_{min}} = \frac{n(n-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{K}{2} = \frac{K}{2} . \tag{28}$$

Mamy także

$$K'_{max} - K'_{min} = n(n-1) \cdot \frac{K}{2} - n(n-1) = n(n-1)\left(\frac{K}{2} - 1\right) = n(n-1)\left(\frac{K-2}{2}\right) . \tag{29}$$

Ze wzoru (25) wynika, że

$$K' - K = K(a-1) , \tag{30}$$

skąd

$$l'_{ij} = l_{ij} + \frac{K'-K}{2} = l_{ij} + \frac{K(a-1)}{2} = l_{ij} + (a-1)\frac{K}{2} . \tag{31}$$

Jeżeli – w celu zapewnienia parzystości elementów – macierz ΔL została pomnożona przez 2, wówczas – stosując wzór (31) – należy elementy l_{ij} oraz K również pomnożyć przez 2.

Warto zauważyć, że

$$K'_{min} - K = \left[\frac{n(n-1)}{K} - 1\right] K \tag{32}$$

co oznacza, że przy

$$n(n-1) < K \qquad K'_{min} - K < 0 \quad \text{czyli} \quad l'_{ij} < l_{ij} \tag{33}$$

$$n(n-1) = K \qquad K'_{min} - K = 0 \quad \text{czyli} \quad l'_{ij} = l_{ij} \tag{34}$$

$$n(n-1) > K \qquad K'_{\min} - K > 0 \quad \text{czyli} \quad l'_{ij} > l_{ij}. \tag{35}$$

Mamy też

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$K'_{\min} = n(n-1)$	6	12	20	30	42	56	72	90
$K'_{\max} = K'_{\min} \cdot K/2$	$3K$	$6K$	$10K$	$15K$	$21K$	$28K$	$36K$	$45K$

Jeżeli $I_3 \neq \phi$, wówczas $K'_{\min} = n(n-1) - s/2$, gdzie s – liczność zbioru I_3.

Przykład 1.

Załóżmy, że dane są uporządkowania czterech obiektów podane przez pięciu ekspertów.

$$\begin{aligned} &P^1 : O_1, O_2, O_4, O_3 \\ &P^2 : O_4, O_1, O_3, O_2 \\ &P^3 : O_4, O_3, O_1, O_2\,. \\ &P^4 : O_1, O_2, O_3, O_4 \\ &P^5 : O_4, O_3, O_1, O_2 \end{aligned} \tag{36}$$

Macierze rozkładu głosów ekspertów L oraz marginesów przewag ΔL mają postać

$$L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ O_2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ O_3 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ O_4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{array} \qquad \Delta L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 5 & 1 & -1 \\ O_2 & -5 & 0 & -1 & -1 \\ O_3 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ O_4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}. \tag{37}$$

Aby zapewnić parzystość wyrazów macierzy marginesów przewag należy macierz ΔL pomnożyć przez 2

$$\overline{\Delta L} = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 10 & 2 & -2 \\ O_2 & -10 & 0 & -2 & -2 \\ O_3 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ O_4 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}. \tag{38}$$

Stąd w profilu p_D konstruowanym metodą Deborda, tzn. jedynie na podstawie macierzy marginesów przewag, należy uwzględnić następujące uporządkowania :

Tablica 1.

Liczba uporządkowań	Uporządkowania
5	$O_3, O_4, \mathbf{O_1}, \mathbf{O_2}$ $\mathbf{O_1}, \mathbf{O_2}, O_4, O_3$
1	$O_2, O_4, \mathbf{O_1}, \mathbf{O_3}$ $\mathbf{O_1}, \mathbf{O_3}, O_4, O_2$
1	$O_1, O_4, \mathbf{O_3}, \mathbf{O_2}$ $\mathbf{O_3}, \mathbf{O_2}, O_4, O_1$
1	$O_2, O_3, \mathbf{O_4}, \mathbf{O_1}$ $\mathbf{O_4}, \mathbf{O_1}, O_3, O_2$
1	$O_1, O_3, \mathbf{O_4}, \mathbf{O_2}$ $\mathbf{O_4}, \mathbf{O_2}, O_3, O_1$
3	$O_1, O_2, \mathbf{O_4}, \mathbf{O_3}$ $\mathbf{O_4}, \mathbf{O_3}, O_3, O_2$

Dla profilu p_D macierz rozkładu głosów ekspertów L' oraz macierz marginesów przewag $\Delta L'$ są, jak następuje:

$$L' = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 17 & 13 & 11 \\ O_2 & 7 & 0 & 11 & 11 \\ O_3 & 11 & 13 & 0 & 9 \\ O_4 & 13 & 13 & 15 & 0 \end{array} \qquad \Delta L' = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 10 & 2 & -2 \\ O_2 & -10 & 0 & -2 & -2 \\ O_3 & -2 & 2 & 0 & -6 \\ O_4 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}. \tag{39}$$

Jak widać, macierze $\overline{\Delta L}$ oraz $\Delta L'$ są zgodne.

Przykład 2.

Dana jest macierz rozkładu głosów ekspertów ($n = 4$, $K = 46$)

$$L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 27 & 20 & 20 \\ O_2 & 19 & 0 & 29 & 20 \\ O_3 & 26 & 17 & 0 & 27 \\ O_4 & 26 & 26 & 19 & 0 \end{array} \qquad \Delta L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 8 & -6 & -6 \\ O_2 & -8 & 0 & 12 & -6 \\ O_3 & 6 & -12 & 0 & 8 \\ O_4 & 6 & 6 & -8 & 0 \end{array} \tag{40}$$

$$I_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\} \tag{41}$$

$$I_2 = \{(3,1), (4,1), (4,2)\} \tag{42}$$

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} = 27 + 29 + 27 = 83, \qquad \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = 26 + 26 + 26 = 78. \tag{43}$$

Zatem

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = 161 = \left(\frac{4 \cdot 3}{2} + a\right)23, \qquad \text{stąd} \qquad a = 1. \tag{44}$$

Przykład 3.

Dana jest macierz rozkładu głosów ekspertów ($n = 4$, $K = 100$).

$$L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 51 & 48 & 58 \\ O_2 & 49 & 0 & 35 & 75 \\ O_3 & 52 & 65 & 0 & 40 \\ O_4 & 42 & 25 & 60 & 0 \end{array} \qquad \Delta L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 2 & -4 & 16 \\ O_2 & -2 & 0 & -30 & 50 \\ O_3 & 4 & 30 & 0 & -20 \\ O_4 & -16 & -50 & 20 & 0 \end{array} \tag{45}$$

$$I_1 = \{(1,2), (1,4), (2,4)\} \tag{46}$$

$$I_2 = \{(3,1), (3,2), (4,3)\} \tag{47}$$

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} = 184, \qquad \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = 177. \tag{48}$$

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = \left[\left(\frac{n(n-1)}{2} + a\right)\right]\frac{K}{2} = (6 + a)50 = 361 \qquad a = 1{,}22. \tag{49}$$

Przykład 4.

Dana jest macierz rozkładu głosów ekspertów ($n = 5$, $K = 10$)

$$L = \begin{array}{c|ccccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 \\ \hline O_1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ O_2 & 6 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ O_3 & 7 & 7 & 0 & 4 & 7 \\ O_4 & 6 & 6 & 6 & 0 & 4 \\ O_5 & 4 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{array} \qquad \Delta L = \begin{array}{c|ccccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 \\ \hline O_1 & 0 & -2 & -4 & -2 & 2 \\ O_2 & 2 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ O_3 & 4 & 4 & 0 & -2 & 4 \\ O_4 & 2 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ O_5 & -2 & 2 & -4 & 2 & 0 \end{array} \tag{50}$$

$$I_1 = \{(1,5), (3,5)\} \tag{51}$$

$$I_2 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,2), (5,4)\} \tag{52}$$

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} = 13, \qquad \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = 50. \tag{53}$$

$$\sum_{(i,j)\in I_1} l_{ij} + \sum_{(i,j)\in I_2} l_{ji} = \left[\left(\frac{n(n-1)}{2} + a\right)\right]\frac{K}{2} = (10+a)5 = 63 \rightarrow a = 2{,}6. \tag{54}$$

Przykład 5 (Lamboray, 2007).

W tabeli przedstawiono uporządkowania czterech obiektów podane przez 46 ekspertów.

Tablica 2.

Liczba uporządkowań	Uporządkowania
8	O_1, O_2, O_3, O_4
4	O_4, O_3, O_1, O_2
9	O_2, O_3, O_4, O_1
6	O_1, O_4, O_2, O_3
4	O_3, O_4, O_2, O_1
3	O_3, O_1, O_2, O_4
6	O_4, O_2, O_3, O_1
3	O_4, O_1, O_3, O_2
3	O_1, O_3, O_4, O_2

(55)

Macierze L oraz ΔL mają postać, jak w przykładzie 2

$$L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 27 & 20 & 20 \\ O & 19 & 0 & 29 & 20 \\ O_3 & 26 & 17 & 0 & 27 \\ O_4 & 26 & 26 & 19 & 0 \end{array} \qquad \Delta L = \begin{array}{c|cccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \hline O_1 & 0 & 8 & -6 & -6 \\ O_2 & -8 & 0 & 12 & -6 \\ O_3 & 6 & -12 & 0 & 8 \\ O_4 & 6 & 6 & -8 & 0 \end{array}. \tag{56}$$

Zgodnie z algorytmem Deborda tworzymy 6 par uporządkowań.

Mamy zatem

Tablica 3.

Liczba uporządkowań	Uporządkowania
4	$\boldsymbol{O_1}, \boldsymbol{O_2}, O_3, O_4$ $O_4, O_3, \boldsymbol{O_1}, \boldsymbol{O_2}$
6	$\boldsymbol{O_2}, \boldsymbol{O_3}, O_4, O_1$ $O_1, O_4, \boldsymbol{O_2}, \boldsymbol{O_3}$
3	$\boldsymbol{O_3}, \boldsymbol{O_1}, O_2, O_4$ $O_4, O_2, \boldsymbol{O_3}, \boldsymbol{O_1}$
4	$\boldsymbol{O_3}, \boldsymbol{O_4}, O_2, O_1$ $O_1, O_2, \boldsymbol{O_3}, \boldsymbol{O_4}$
3	$\boldsymbol{O_4}, \boldsymbol{O_1}, O_3, O_2$ $O_2, O_3, \boldsymbol{O_4}, \boldsymbol{O_1}$
3	$\boldsymbol{O_4}, \boldsymbol{O_2}, O_3, O_1$ $O_1, O_3, \boldsymbol{O_4}, \boldsymbol{O_2}$
$2 \cdot 23 = 46$	

Macierze rozkładu głosów ekspertów L' oraz marginesów przewag $\Delta L'$ są zgodne z (56).

Warto podkreślić, że jeżeli wszystkie l_{ij} lub l_{ji} są równe K, to $a = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Ze wzoru (32) wynika, że $a \geq \dfrac{n(n-1)}{K}$.

Zatem $\dfrac{n(n-1)}{2} \geq a \geq \dfrac{n(n-1)}{K}$.

Aby liczba uporządkowań uzyskana metodą Deborda na podstawie macierzy rozkładu ekspertów była wielokrotnością liczby K, a musi być liczbą naturalną. Przy $a = 1$ obie te liczby są takie same.

5. Podsumowanie

Opisana metoda umożliwia odtworzenie opinii ekspertów (w sensie macierzy rozkładu głosów ekspertów) oraz wyznaczenie oceny grupowej na podstawie informacji ograniczonej do macierzy marginesów przewag.

Sposób konstruowania uporządkowań jest prosty i skuteczny, nawet dla większej liczby obiektów i wymaga jedynie prostych działań arytmetycznych. Należy zauważyć, że rozwiązanie (profil p_D) jest niejednoznaczne z uwagi na dowolność wyboru permutacji $O\ldots ij$. Ponadto, liczba uporządkowań otrzymanych tą metodą zazwyczaj jest większa niż uporządkowań pierwotnych ($K' > K$).

Profil p_D uzyskany metodą Deborda zawiera co najwyżej $n(n-1)/2$ par składowych niezerowych, zaś liczba uporządkowań (przy założeniu, że w opiniach ekspertów nie występują obiekty równoważne) wynosi $K' = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |\Delta l_{ij}|$.

W sekcji 4. pokazano, jak liczba uporządkowań K' odtworzonych przy pomocy metody Deborda może zmieniać się w zależności od rzeczywistej liczby uporządkowań podanych przez K ekspertów oraz struktury macierzy marginesów przewag wpływającej na wartość współczynnika a. W sytuacjach, o których mowa we Wprowadzeniu nie dysponujemy znajomością liczby ekspertów K ani wartość współczynnika a nie jest znana. Ze wzoru (31) wynika jednak, że

$$l'_{ij} = l_{ij} + \frac{K' - K}{2},$$

co oznacza, że elementy odtworzonej macierzy rozkładu głosów ekspertów różnią się od elementów rzeczywistej (nieznanej) macierzy rozkładu głosów ekspertów o stały składnik. A zatem ocena grupowa wyznaczona przy użyciu metod, których podstawę stanowi wykorzystanie macierzy rozkładu głosów ekspertów, takich jak metoda Condorceta czy metoda Bordy – będzie w obu rozpatrywanych przypadkach taka sama.

W cytowanym artykule Debord (1987) uwzględnił również sytuację, gdy w opiniach ekspertów występują obiekty równoważne. W takim przypadku we wzorach (14) i (15) jedną parę obiektów O_i, O_j należy zastąpić parą obiektów równoważnych (O_i, O_j). Współczynnik Δl_{ij} macierzy ΔL dla takiej pary uporządkowań jest nieparzysty i wynosi 1. Jeżeli w macierzy ΔL występują elementy nieparzyste, wówczas uwzględnienie obiektów równoważnych w szukanym profilu – o ile jest możliwe z uwagi na charakter problemu – pozwala zmniejszyć liczbę odtwarzanych uporządkowań K'.

Należy podkreślić, że na podstawie macierzy marginesów przewag (jak również macierzy rozkładu głosów ekspertów) nie można jednoznacznie stwierdzić, czy w ocenach ekspertów występowały obiekty równoważne, czy też nie. Jeżeli zastosowana metoda wyznaczania oceny grupowej wykorzystuje informację o obecności obiektów równoważnych, wówczas przedstawiony wniosek o zgodności ocen może nie być słuszny.

Literatura

[1]Bury H., Wagner D. (2009), Group judgement with ties. A position-based approach, *Badania Operacyjne i Decyzje*, **4**, 7-26.

[2]Debord B. (1987), Caractérisation des matrices des préférences nettes et méthodes d'aggrégation associées, *Mathématiques et sciences humaines*, **97**, 5-17.

[3]Lamboray C. (2007), A comparison between the prudent order and the ranking obtained with Borda's, Copeland's, Slater's and Kemeny's rules, *Mathematical Social Sciences*, **54**, 1–16.

[4]Nurmi H. (1987), *Comparing voting systems*, Kluwer, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokio.

[5]Schulze M. (2011), A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and Condorcet-consistent single-winner election method, *Social Choice and Welfare*, **36**, 267–303.

[6]Tideman, T.N. (1987), Independence of clones as a criterion for voting rules, *Social Choice and Welfare*, **4**, 185-206.