210/2010

Raport Badawczy
Research Report

RB/25/2010

Metoda Slatera

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2010

METODA SLATERA

Założymy, że dany jest zbiór obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$ oraz zbiór ekspertów $\mathcal{K} = \{1, ..., K\}$. Przyjmujemy, że każdy z ekspertów podaje uporządkowanie obejmujące wszystkie obiekty. Dla uproszczenia przyjmujemy również, że w tych uporządkowaniach nie występują obiekty równoważne.

$$
\begin{aligned}
P^1 &= \left\{O_{i_1^1}, O_{i_2^1}, \ldots, O_{i_{n-1}^1}, O_{i_n^1}\right\} \\
&\vdots \\
P^K &= \left\{O_{i_1^K}, O_{i_2^K}, \ldots, O_{i_{n-1}^K}, O_{i_n^K}\right\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Niech l_{ij} – liczba ekspertów których zdaniem $O_i \succ O_j$

Wprowadzamy relację zwykłej większości:

$O_i \succ O_j$ jeżeli $l_{ij} > \frac{K}{2}$ lub $l_{ij} > \frac{K}{2} + 1$ przy parzystej liczbie obiektów.

Wykorzystując tę relację można podjąć próbę uporządkowania wszystkich obiektów O_i, $i = 1, \ldots, n$. Taka próba może udać się lub nie. W tym drugim przypadku dla części obiektów można ustalić takie uporządkowanie, dla pozostałych nie. Przykładem takiej sytuacji może być wystepowanie cyklu. Należy przy tym podkreślić, że cykl może obejmować albo wszystkie obiekty albo ich część. Przykład 15 obiektów, w którym występuje cykl podał Truchon [5], przywołując wyniki zawodów w łyżwiarstwie figurowym.

W pracy Saariego i Merlina [4] podany jest przykład ocen trzech obiektów, prowadzący do cyklu. Liczba ocen podanych przez ekspertów wynosi 19, czyli relacja większości ma miejsce przy liczbie ekspertów ≥ 10.

Przykład 1.

$$
\begin{aligned}
&P^1, \ldots, P^6 : O_1 \succ O_2 \succ O_3 \\
&P^7, \ldots, P^9 : O_2 \succ O_1 \succ O_3 \\
&P^{10}, \ldots, P^{14} : O_2 \succ O_3 \succ O_1 \\
&P^{15}, \ldots, P^{19} : O_3 \succ O_1 \succ O_2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Macierz rozkładu głosów ekspertów dla tych uporządkowań jest, jak następuje

	O_1	O_2	O_3
O_1	-	11	9
O_2	8	-	14
O_3	10	5	-

(3)

Mamy więc następujące zależności spełniające relację większości:

$O_1 \succ O_2,\ O_2 \succ O_3,\ O_3 \succ O_1$ (4)

to znaczy występuje cykl $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_1$.

A zatem relacja większości nie umożliwia wyznaczenia uporządkowania wszystkich obiektów. Takich właśnie sytuacji dotyczy reguła Slatera.

Stosując zasadę wiekszości [2,6] należy wyznaczyć uporządkowania wszystkich obiektów w taki sposób, aby została zminimalizowana liczba par obiektów ($O_i \succ O_j$), dla których wynikiem porównań parami jest $O_j \succ O_i$ a dla uporządkowania wszystkich obiektów wymagane jest $O_i \succ O_j$ w celu zapewnienia przechodniości relacji wiekszości w odniesieniu do wszystkich obiektów. Innymi słowy należy zmaksymalizować liczbę par obiektów, dla których relacja większości jest zgodna z wynikami porównań obiektów parami.

Aby sformalizować to podejście wprowadzimy definicję odległości w sensie Kemeny'ego (nazywaną dalej odległością Kemeny'ego).

Oznaczymy przez l_{ij} liczbę głosów ekspertów, zdaniem których $O_i \succ O_j$ oraz przez l_{ji} liczbę głosów ekspertów, zdaniem których $O_j \succ O_i$. Dla uproszczenia przyjmiemy, że w ocenach ekspertów nie występują obiekty równoważne a liczba ekspertów jest nieparzysta. Zasada większości oznacza więc, że

$O_i \succ O_j$ jeżeli $l_{ij} \succ l_{ji}$ lub $\Delta l_{ij} = l_{ij} - l_{ji} > 0$ (5)

Bezpośrednim rachunkiem można wykazać, że warunek ten oznacza, że $l_{ij} \geq K/2$.

W niektórych pracach [np. 2] przyjmuje się warunek

$l_{ij} \geq l_{ji}$ lub $\Delta l_{ij} \geq 0$. (6)

Definicja [4]

Niech będzie dane zbiór uporządkowań liniowych $P^{(k)} = \{P^1, \ldots, P^K\}$ oraz dane uporządkowanie liniowe P. Odległość miedzy tym uporządkowaniem a zbiorem uporządkowań $P^{(k)}$ definiujemy, jak następuje

$$d[P, P^{(k)}] = \sum_{k=1}^{K} \delta(P, P^k) \quad (7)$$

Definicja [4]

Dla danego zbioru uporządkowań $P^{(k)}$ uporządkowanie P jest medianą Kemeny'ego, oznaczaną przez KR, jeżeli odległość $d[P, P^{(k)}]$ jest minimalna ze względu na wszystkie możliwe uporządkowania liniowe.

Reguła Slatera

Przyjmiemy, że jest dany skończony zbiór obiektów $\mathscr{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$ oraz skończony zbiór ekspertów $\mathscr{K} = \{1, \ldots, K\}$.

Wprowadzimy oznaczenia [2]

$\mathscr{B}$ - zbiór wszystkich zupełnych relacji binarnych na zbiorze $\mathscr{O}$

$\mathscr{W}$ – zbiór wszystkich słabych porządków (zupełnych i przechodnich relacji binarnych) na zbiorze $\mathscr{O}$

$\mathscr{L} \subset \mathscr{W}$ – zbiór wszystkich porządków liniowych (zupełnych, przechodnich i antysymetrycznych relacji binarnych) na zbiorze $\mathscr{O}$

$u = \{L_{1u}, \ldots, L_{Ku}\} \in \mathscr{L}^K$, zbiór u jest nazywany profilem, gdzie $L_{ju} \in \mathscr{L}$ określa indywidualne preferencje j-tego eksperta na zbiorze $\mathscr{O}$ i profilu u.

Definicja [2]

Zwykłą większość stanowi funkcja $v : \mathscr{L}^K \to \mathscr{B}$ taka, że dla wszystkich $u \in \mathscr{L}^K$ i dla wszystkich $O_i, O_j \in \mathscr{O}$, relacja $O_i \succ O_j$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta l_{ij} > 0$ [1),2)].

Definicja [2]

Dla wszystkich profili $u \in \mathscr{L}^K$, $S \in \mathscr{W}$ stanowi ocenę w sensie Slatera wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $R \in \mathscr{W}$ zachodzi nierówność

$$\delta[v(u), S] \leq \delta[v(u), R] \tag{8}$$

[1)] W wielu pracach warunek ten ma postać $\Delta l_{ij} \geq 0$ [2].

[2)] Jeżeli w opiniach ekspertów obiekty równoważne są dopuszczalne, wówczas $l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} = K$, gdzie m_{ij} – liczba ekspertów, których zdaniem $O_i \approx O_j$, to znaczy, ze obiekty O_i oraz O_j są równoważne w sensie przyjętego kryterium (zbioru kryteriów). Stąd $\Delta l_{ij} = l_{ij} - l_{ji} = l_{ij} - (K - l_{ij} - m_{ij}) = 2l_{ij} - (K - m_{ij})$. Z warunku $\Delta l_{ij} > 0$ mamy $l_{ij} > \frac{K - m_{ij}}{2}$. Jeżeli $m_{ij} = 0$, otrzymujemy klasycznej warunek zwykłej większości.

Jak podkreślono wyżej, ocena $v(u)$ nie musi należeć do zbioru słabych porządków. Ocena w sensie Slatera należy do zbioru słabych porządków i jest w sensie odległości δ najbliższa $v(u)$.

Wprowadzimy do rozważań zbiór C_{Ru}

$$C_{Ru} = [\{O_i, O_j\} \subset \mathcal{O} : v(u) \mid \{O_i, O_j\} \neq R \mid \{O_i, O_j\}] \tag{9}$$

Z podanej definicji wynika, że zbiór ten zawiera wszystkie pary obiektów takie, że relacja między obiektami stanowiącymi daną parę jest inna dla $v(u)$ i R. Należy podkreslić, że uwzględniamy wszystkie pary obiektów a nie tylko obiekty sąsiednie.

Wprowadzimy do rozważań funkcję $g^u(R)$

$$g: \mathcal{W}^* \to \mathrm{R}, \qquad g^u(R) = \sum_{\{O_i, O_j\} \in C_{Ru}} \left|\Delta l_{ij}\right| \tag{10}$$

Lemat [4]

Uporządkowanie $KR \in \mathcal{W}^*$ jest medianą Kemeny'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $R \in \mathcal{W}^*$

$$g^u(R) < g^u(KR) \tag{11}$$

Przykład 2 [2]

Dane są uporządkowania czterech obiektów podane przez dziewięciu ekspertów.

$$\begin{array}{ll} P^1, P^2, P^3 & : O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4 \\ P^4 & : O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_1 \\ P^5, P^6 & : O_3 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_1 \\ P^7, P^8 & : O_4 \succ O_1 \succ O_2 \succ O_3 \\ P^9 & : O_4 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_1 \end{array} \tag{12}$$

Zwykła większość wynosi $5 > \frac{9}{2}$.

Macierz rozkładu głosów ekspertów jest jak następuje

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	-	5	5	3
O_2	4	-	6	6
O_3	4	3	-	6
O_4	6	3	3	-

(13)

Następujące uporządkowania spełniają zasadę większości:

$$O_1 \succ O_2, \quad O_1 \succ O_3, \quad O_2 \succ O_3, \quad O_2 \succ O_4 \quad O_3 \succ O_4, \quad O_4 \succ O_1 \tag{14}$$

czyli występuje cykl

$$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_1. \tag{15}$$

Na podstawie zasady większości nie można wyznaczyć uporządkowania wszystkich obiektów. Warunkiem utworzenia takiego uporządkowania jest zmiana relacji między obiektami (O_1, O_4) z $O_4 \succ O_1$ na $O_1 \succ O_1$. Otrzymujemy zatem uporządkowanie

$$O_1 \succ O_2, \quad O_1 \succ O_3, \quad O_2 \succ O_3, \quad O_2 \succ O_4 \quad O_3 \succ O_4, \quad O_4 \prec O_1. \tag{16}$$

Uporządkowanie otrzymane według zasady Slatera ma postać $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$. A zatem obiekt O_1 jest zwycięzcą w sensie Slatera.

Relacje (14) i (16) różnią się tylko co do jednej pary obiektów. Odległość Kemeny'ego między nimi jest więc równa 1.

Dla pary (O_1, O_4) mamy $\Delta l_{14} = -3$ oraz $\Delta l_{41} = 3$.

Do wyznaczenia mediany Kemeny'ego zastosujemy podejście opisane w [7]. Zgodnie z podaną tam metodologią w uporządkowaniu będącym medianą nie mogą występować relacje przeciwstawne do wynikających z zasady większości. Są to następujące relacje:

$$O_2 \succ O_1, \quad O_3 \succ O_1, \quad O_3 \succ O_2, \quad O_4 \succ O_2 \quad O_4 \succ O_3, \quad O_1 \succ O_4. \tag{17}$$

Jeżeli przyjmiemy, że w medianie nie mogą występować obiekty równoważne, należy rozpatrzyć 24 uporządkowania. Uwzględniając (17) medianę Kemeny'ego mogą stanowić tylko następujące uporządkowania:

a) $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$ b) $O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_1$ c) $O_2 \succ O_4 \succ O_1 \succ O_3$ (18)

d) $O_3 \succ O_4 \succ O_1 \succ O_2$ e) $O_4 \succ O_1 \succ O_2 \succ O_3$.

Aby stwierdzić, które z tych uporządkowań stanowi medianę Kemeny'ego przeanalizujemy następującą tablicę

Zasada większości	Relacje między parami obiektów						
Uporządkowanie	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_4$	$O_4 \succ O_1$	
a)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_4$	$O_4 \prec O_1$	$g(u^a)=3$
b)	$O_1 \prec O_2$	$O_1 \prec O_3$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_4$	$O_4 \succ O_1$	$g(u^b)=2$
c)	$O_1 \prec O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \prec O_4$	$O_4 \succ O_1$	$g(u^c)=4$
d)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \prec O_3$	$O_2 \prec O_3$	$O_2 \prec O_4$	$O_3 \succ O_4$	$O_4 \succ O_1$	$g(u^d)=7$
e)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \prec O_4$	$O_3 \prec O_4$	$O_4 \succ O_1$	$g(u^e)=6$

(19)

W tablicy zaznaczono kolorem szarym te pary obiektów, między którymi w uporządkowaniach a) ÷ e) zachodzi relacja inna, niż wynikająca z zasady większości. Podano również wartości funkcji g dla powyższych uporządkowań.
Zgodnie z lematem podanym przez Saariego i Merlina [4] medianę stanowi uporządkowanie b) $O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_1$. Oznacza to, że obiekt O_1 będący zwycięzcą w sensie Slatera jest przegranym w sensie mediany Kemeny'ego.

Conitzer [6] udowodnił, że wyznaczenie uporządkowania zgodnie z regułą Slatera jest zadaniem NP – trudnym. W cytowanej pracy wskazał również na możliwość ułatwienia wyznaczania uporządkowań w sensie Slatera dzięki wprowadzeniu zbioru podobnych obiektów.

Definicja [6]
Mówimy, że zbiór $\mathcal{O}_1$ składa się z podobnych obiektów, jeżeli dla każdego O_i, $O_j \in \mathcal{O}_1$ i dla każdego $O_\ell \in \mathcal{O} - \mathcal{O}_1$ $O_i \succ O_\ell$ wtedy i tylko wtedy, gdy $O_j \succ O_\ell$ (również $O_\ell \succ O_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $O_\ell \succ O_j$).
Conitzer udowodnił nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie [6]
Jeżeli zbiór $\mathcal{O}_1$ składa się z podobnych obiektów, to istnieje uporządkowanie w sensie Slatera, w którym obiekty ze zbioru $\mathcal{O}_1$ tworzą ciąg następujących po sobie obiektów, innymi słowy nie istnieją takie obiekty O_i, $O_j \in \mathcal{O}_1$ i $O_\ell \in \mathcal{O} - \mathcal{O}_1$ takie, że $O_i \succ O_\ell \succ O_j$.

Przykład 3.
Założymy, że z zasady większości wynikają następujące relacje między obiektami zbioru $\mathcal{O} = \{ O_1, O_2, O_3, O_4\}$

$$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_1 \qquad O_1 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_1 \qquad O_2 \succ O_4, \tag{20}$$

czyli występują dwa cykle.
Łatwo wykazać, że zbiór $\mathcal{O}_1 = \{O_2, O_4\}$ zawiera podobne obiekty. Mamy bowiem $\mathcal{O} - \mathcal{O}_1 = \{O_1, O_3\}$. Z relacji (20) wynika, że $O_2 \succ O_3$ i $O_2 \succ O_1$ oraz $O_4 \succ O_3$ i $O_4 \succ O_1$, to znaczy, że zbiór $\mathcal{O}_1$ można traktować jako jeden obiekt.

Można zatem zapisać (20) w postaci $O_1 \succ \mathcal{O}_1 \succ O_3 \succ O_1$. Aby uzyskać relację przechodnią należy zmienić relację między obiektami O_1 i O_3 z $O_3 \succ O_1$ na $O_1 \succ O_3$. (Odległość Kemeny'ego wynikająca z tej zmiany wynosi 1.) Otrzymane uporządkowanie ma postać $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$.

Przykład 4.

Założymy, że na podstawie uporządkowań podanych przez dziewięciu ekspertów zbioru czterech obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ utworzono macierz rozkładu głosów ekspertów

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	-	5	4	7
O_2	4	-	5	5
O_3	5	4	-	4
O_4	2	4	5	-

(21)

Większość wynosi $5 > \frac{9}{2}$.

Z macierzy (21) wynika, że zasada większości ustala następujące relacje między obiektami:

$O_1 \succ O_2$, $O_1 \succ O_4$, $O_2 \succ O_3$, $O_2 \succ O_4$ $O_3 \succ O_1$ $O_4 \succ O_3$. (22)

Analiza tych relacji pozwala stwierdzić, że istnieje cykl

$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_1$. (23)

Łatwo zauważyć, że obiekty O_2 i O_4 tworzą zbiór obiektów podobnych $\mathcal{O}_1$. Mamy bowiem $\mathcal{O} - \mathcal{O}_1 = \{O_1, O_3\}$ a także

$O_2 \succ O_3$ oraz $O_4 \succ O_3$ oraz $O_2 \prec O_1$ oraz $O_4 \prec O_1$. (24)

Aby obiekty O_1, O_2, O_3, O_4 tworzyły uporządkowanie, należy zamienić relację między obiektami O_1 i O_3 z $O_1 \prec O_3$ na $O_1 \succ O_3$. Odległość Kemeny'ego między relacjami par obiektów przed i po tej zmianie wynosi 1. A zatem obiekt O_1 jest zwycięzcą w sensie Slatera.

Aby wyznaczyć odległości Kemeny'ego dla uporządkowań, które mogą stanowić medianę Kemeny'ego zastosujemy podejście opisane w [7]. Z zależności (22) wynika, że w medianie nie mogą występować następujące relacje między obiektami (będące odwróceniem relacji (22)):

$O_2 \succ O_1$, $O_4 \succ O_1$, $O_3 \succ O_2$, $O_4 \succ O_2$ $O_1 \succ O_3$, $O_3 \succ O_4$ (25)

Jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko uporządkowania nie zawierające obiektów równoważnych, to medianę mogą stanowić jedynie uporządkowania:

a) $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ b) $O_2 \succ O_3 \succ O_1 \succ O_4$ c) $O_2 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_1$ (26)

d) $O_4 \succ O_3 \succ O_1 \succ O_2$ e) $O_3 \succ O_1 \succ O_2 \succ O_4$.

W talicy podano porównanie tych uporządkowań z relacjami między obiektami ustalonymi na podstawie zasady większości.

Zasada większości	Relacje między parami obiektów						
Uporządkowanie	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_4$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_4 \succ O_3$	$g^u(R)$
a)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_4$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_1 \succ O_3$	$O_4 \succ O_3$	1
b)	$O_2 \succ O_1$	$O_1 \succ O_4$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$	1+1=2
c)	$O_2 \succ O_1$	$O_4 \succ O_1$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_4 \succ O_3$	1+5=6
d)	$O_1 \succ O_2$	$O_4 \succ O_1$	$O_3 \succ O_2$	$O_4 \succ O_2$	$O_3 \succ O_1$	$O_4 \succ O_3$	5+1+1=7
e)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_4$	$O_3 \succ O_2$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$	1+1=2

(27)

Z tablicy wynika, że medianę Kemeny'ego stanowi uporządkowanie

$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ (28)

bowiem dla tego uporządkowania wartość $g(u^a)$ osiąga najmnieszą wartość.

Warto podkreslić, że obiekty O_2 i O_4 stanowią obiekty podobne.

Uporządkowanie według Slatera ma postać $O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3$ i w rozważanym przypadku pokrywa się z medianą Kemeny'ego.

Odległość dla mediany wynosi 28, dla uporządkowań b i e – 30, dla uporządkowania c) – 40.

Przykład 5.

Założymy, że 9 ekspertów oceniało 4 obiekty.

Macierz rozkładu głosów ekspertów jest, jak następuje

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	-	5	3	5
O_2	4	-	5	5
O_3	6	4	-	4
O_4	4	4	5	-

(29)

Większość wynosi $5 > \frac{9}{2}$.

Z macierzy (29) wynika, że zasada większości ustala następujące relacje między obiektami:

$$O_1 \succ O_2, \quad O_1 \succ O_4, \quad O_2 \succ O_3, \quad O_2 \succ O_4 \quad O_3 \succ O_1 \quad O_4 \succ O_3. \tag{30}$$

Analiza tych relacji pozwala stwierdzić, że istnieje cykl

$$O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_1. \tag{31}$$

Relacja (31) oznacza, że występuje cykl podobny, jak w przykładzie 4.

Zgodnie z metodologią przyjętą w pracy [7] w medianie nie mogą wystąpić następujące relacje (odwrotne do (30))

$$O_2 \succ O_1, \quad O_4 \succ O_1, \quad O_3 \succ O_2, \quad O_4 \succ O_2 \quad O_1 \succ O_3 \quad O_3 \succ O_4 \tag{32}$$

Eliminując spośród 4!=24 relacji te, w których występują bezpośrednio po sobie relacje (32) praz zakładając, e w medianie nie występują obiekty równoważne otrzymujemy pięć uporządkowań

$$\text{a) } O_1 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_3 \qquad \text{b) } O_2 \succ O_3 \succ O_1 \succ O_4 \qquad \text{c) } O_2 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_1 \tag{33}$$

$$\text{d) } O_4 \succ O_3 \succ O_1 \succ O_2 \qquad \text{e) } O_3 \succ O_1 \succ O_2 \succ O_4.$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że uporządkowania b, c, d stanowią medianę a odległość wynosi 32. Dla uporządkowań a, e odległość ta wynosi 34.

Zasada większości	Relacje między parami obiektów					
Uporządkowanie	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_4$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_4 \succ O_3$	$g^u(R)$
a)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_4$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_1 \succ O_3$	$O_4 \succ O_3$	3
b)	$O_2 \succ O_1$	$O_1 \succ O_4$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$	1+1=2
c)	$O_2 \succ O_1$	$O_4 \succ O_1$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_4 \succ O_3$	1+1=2
d)	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_4$	$O_3 \succ O_2$	$O_2 \succ O_4$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$	1+1+1=3
e)	$O_1 \succ O_2$	$O_4 \succ O_1$	$O_3 \succ O_2$	$O_4 \succ O_2$	$O_3 \succ O_1$	$O_4 \succ O_3$	1+1+1=2

(34)

Warto podkreślić, że wyznaczanie odległości dla każdego z uporządkowań mogących by medianą nie wymaga każdorazowego powtarzania obliczeń. Znajomość wartości funkcji $g^u(R)$ umożliwia wyznaczenie tej odległości, jeżeli znamy jej wartość dla jednego z uporządkowa.

Z zależności podanych w [7] wynika, że

$$r_{ij} = 2K - \Delta l_{ij}, \qquad \text{oraz} \qquad r_{ji} = 2K - \Delta l_{ji} \tag{35}$$

$$\text{skąd} \qquad r_{ij} - r_{ji} = -\Delta l_{ij} + \Delta l_{ji} = 2\Delta l_{ji} \tag{36}$$

$$\text{Podobnie} \qquad r_{ji} - r_{ij} = 2\Delta l_{ij} \tag{37}$$

Z rozważań przeprowadzonych poprzednio [7] wynika, że w medianie muszą między obiektami zachodzić wszystkie relacje wynikające z zasady większości. Jeżeli zatem z zasady wiekszości wynika, że $O_i \succ O_j$, to w wyrażeniu na odległość określoną dla mediany wystąpi składnik r_{ij}. Jeżeli w rozpatrywanym uporządkowaniu zachodzi $O_j \succ O_i$, to w wyrażeniu na odległość określoną dla mediany wystąpi składnik r_{ji}. Zgodnie z (36) różnica odległości wyniesie $2\Delta l_{ji}$.

Jeżeli więc znamy odległość dla mediany d^{KR}, to dla danego uporządkowania, któremu odpowiada wartość $g^u(R)$, odległość wyniesie

$$d^{KR} + (g^u(R) - g^u_{\min}(R)) \cdot 2. \tag{38}$$

Dla uporządkowania d) z przykładu 4 mamy

28+(7-1)·2=28+12=40

Wynik ten jest zgodny z uzyskanym drogą bezpośrednich obliczeń.

Literatura

[1] Kemeny J.G., Snell L.J., 1962, *Preference Ranking: An Axiomatic Approach.* In J.G. Kemeny and L.J. Snell, Mathematical Models in the Social Sciences, New York, Ginn.

[2] Klamler C., 2004, *The Dodgson ranking and its relation to Kemeny's method and Slater's rule*. Social Choice and Welfare **23**, 91–102.

[3] Litvak B.G., 1982, *Ekspertnaja informacija. Mietody połuczienija i analiza*, Radio i Swjaz, Moskwa.

[4] Saari, D.G., Merlin V.R., 2000, *A geometric examination of Kemeny's rule*. Social Choice and Welfare **17**, 403–438.

[5] Truchon M., 2004, *Aggregation of Rankings in Figure Skating*, Cahier de recherche 04-14, CIPANO, CIRPEE and Departement d'conomique, Universite Laval, Quebec, Canada.

[6] Vincent Conitzer, 2006, *Computing Slater rankings using similarities among candidates*. In Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI), Boston, MA.

[7] Wagner D., Bury H., 2010, *Efektywne metody wyznaczania mediany Kemeny'ego*, RB 24/2010, IBS PAN, Warszawa.