282/2009

Raport Badawczy
Research Report

RB/73/2009

Zarządzanie portfelem obligacji z wykorzystaniem nowoczesnych metod analizy stochastycznej

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2009

1. Wprowadzenie

W pracy, przedstawiono wykorzystanie zaawansowanych metod analizy stochastycznej do wyprowadzenia modelu czynnikowej immunizacji i optymalizacji portfela obligacji. Jako punkt wyjściowy - przyjęto model dynamiki zmian czynników oddziaływujących na strukturę terminową stóp procentowych - określony w postaci wektorowego stochastycznego równania różniczkowego Ito. A następnie, wykorzystano Lemat Ito oraz wniosek z niego wypływający. W rezultacie uzyskano - po przekształceniach - model czynnikowy o postaci końcowej pokrywającej się ze znanym z literatury przedmiotu modelem, którego wyprowadzenie nie było (jak dotąd) publikowane. Dowiedziono również, że znany dotychczas model Fishera-Weila zarządzania portfelowego na rynku obligacji - jest szczególnym przypadkiem analizowanego w pracy modelu czynnikowego.

Rozważane w pracy podejście jest kontynuacją wspomnianych powyżej wcześniejszych badań prowadzonych w USA (K. Garbade, 1986,1989; R. Litterman, J. Scheinkman, 1991) i w Danii (H. Dal, 1993). W szczególności, dotyczy to merytorycznego uzasadnienia zasadniczych koncepcji oraz formalnego wyprowadzenia podstawowych wzorów prezentowanych (bez dowodów) w tych pracach. A także, interpretacji tych zależności na gruncie metodologii nowoczesnej analizy stochastycznej. Prezentowane w tym zakresie wyniki są uzupełnieniem i rozszerzeniem wyprowadzeń analitycznych prezentowanych przez autora w raportach badawczym IBS PAN: Jakubowski (2007, 2008).

Praca zostanie zgłoszona do publikacji w czasopiśmie naukowym: "Materiały i Studia NBP".

2. Struktura terminowa stóp procentowych - analiza czynnikowa

Jednym z nowszych podejść stosowanych dla celów analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych są tzw. modele czynnikowe, w których wykorzystuje się elementy znanej powszechnie z dziedziny statystyki matematycznej i analizy danych - teorii analizy czynnikowej (*Factor Analysis*); Harman (1967), Koronacki, Ćwik (2005).

Modele te są najbardziej ogólne w tym sensie, że w stosunku do dynamiki zmian stóp procentowych *spot* r_{0t} $(t=1,\ldots T)$ nie wprowadza się żadnych założeń upraszczających, jak to było w przypadku omówionych poprzednio podejść klasycznych. W zamian za to stawia się hipotezę, że zmiany stóp procentowych r_{0t} dla kolejnych chwil $\tau=1,2,3,\ldots,$ są generowane przez kombinacje liniową pewnej zadanej liczby nieskorelowanych czynników wspólnych (*common factors*) oraz czynników swoistych (*unique factors*), traktowanych jako zmienne resztowe modelu. Należy przy tym dodać, że analizowane czynniki wspólne nie zawsze mają określona interpretację ekonomiczną lub jakąkolwiek inną; jest to niekiedy możliwe dopiero po przeprowadzeniu tzw. rotacji ortogonalnych przestrzeni czynnikowej. Czynniki te stanowią pewien zbiór "ukrytych" zmiennych, co do których zakłada się, że są one źródłem określonych korelacji pomiędzy układem zmiennych pierwotnych, opisujących dany system.

Z powyższego wynika, że (pomimo "zewnętrznego" podobieństwa modeli matematycznych) analizowanych czynników wspólnych, nie należy w żadnym przypadku utożsamiać ze zmiennymi egzogenicznymi rozpatrywanymi powszechnie w klasycznej analizie regresyjnej. Analiza regresyjna i analiza czynnikowa to dwie istotnie różne metody, u których podstaw stoją różne założenia i przed którymi postawiono różne cele. Celem analizy czynnikowej jest zastąpienie zbioru dużej liczby wzajemnie skorelowanych zmiennych, małą liczbą ortogonalnych (a więc nieskorelowanych) czynników, które w możliwie maksymalny sposób przybliżyłyby zasoby informacji reprezentowanej przez zmienne wyjściowe. Tak więc ortogonalizacja i znaczne zmniejszenie wymiarowości zagadnienia - to dwa cele, jakie postawiono przed analizą czynnikową.

W modelu czynnikowym obligacji, wyznaczającym zależność niespodziewanej stopy zwrotu od ryzyka stóp procentowych, w miejsce klasycznych definicji Macaulaya okresowości i wypukłości obligacji wprowadza się tzw. czynnikową okresowość (*factor duration*) i czynnikową wypukłość (*factor convexity*). Następnie, analizę niespodziewanych zmian stopy zwrotu portfela obligacji, spowodowanych zmianami dr_t $(t=1,...T)$ rynkowych stóp procentowych, zastępuje się analizą tych zmian ze względu na zmiany czynników wspólnych F_f $(f=1,...,m)$. Czynniki te, jako wielkości wspólne dla stóp procentowych r_{0t}, nie zależą od terminów zapadalności $t=1,...T$ (zależą one jedynie od czasu bieżącego $\tau=1,2,3,...$). W związku z tym, nie są w rozpatrywanym przypadku potrzebne dodatkowe, upraszczające założenia co do dynamiki zmian stóp r_{0t} - będące podstawą do definiowania (oraz ewentualnej modyfikacji) prezentowanych poprzednio formuł Macaulaya; por. założenia (3), (22), (31), (43).

Otrzymane w ten sposób czynnikowe modele immunizacji nabierają ostatnio coraz większego znaczenia dla teorii i praktyki zarządzania portfelami obligacji; mogą one również stanowić podstawę do tworzenia komercyjnych pakietów komputerowego wspomagania decyzji w tej dziedzinie. Pierwsze prace z tego zakresu zostały opublikowane przez cytowane już prace Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) oraz Dahla (1993). Dotyczyły one czynnikowej analizy struktury terminowej stóp procentowych oraz konstruowania portfeli immunizacyjnych dla rynków obligacji w USA oraz w Danii. W Polsce, współautorem pierwszych publikacji z tej dziedziny jest autor niniejszej pracy; por. Kulikowski, Bury Jakubowski (1995., 1996).

Poniżej - oraz w następnych punktach - przedstawimy podstawy teoretyczne rozpatrywanego podejścia. Należy podkreślić, że w cytowanych publikacjach zagranicznych podstawy te SA podane tylko w bardzo ogólnym zarysie - i często, bez uzasadnienia wprowadzanych wzorów i zależności. Ponadto, w pracach tych pojawiły się liczne błędy - co dodatkowo utrudnia zrozumienie prezentowanych w nich modeli. Jako przykład - wystarczy podać wydaną przez Cambridge University Press pracę Dahla (1993), w której autor (na stronie 195, pierwszy akapit) "proponuje" wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych z macierzy prostokątnej - co oczywiście nie jest możliwe.

Dlatego, w niniejszej pracy podano niezależne - od istniejących, fragmentarycznych publikacji - wyprowadzenie od podstaw analizowanych modeli czynnikowych immunizacji portfeli obligacji. W tym też sensie, prezentowane tu wyniki można uznać - zdaniem autora - za oryginalne.

Przedstawiony w niniejszym punkcie materiał został szerzej (lecz w nieco innym ujęciu) przedstawiony przez autora w Raporcie IBS PAN: Jakubowski (2007).

2.1 Model Fishera, Weila (1971) analizy ryzyka zmienności struktury terminowej stóp procentowych

Stosując podejście Fishera-Weila zakładamy podobnie jak poprzednio, że krzywa dochodowości, będąca reprezentacją graficzną struktury terminowej TS stóp procentowych – może mieć dowolny kształt. Natomiast ograniczającym (I to w znacznym stopniu) założeniem jest przyjęcie, że możliwe są wyłącznie równoległe przesunięcia tej krzywej, tj.

$$r_1 \neq ... \neq r_t \neq ... \neq r_T \qquad \text{oraz} \qquad dr_t = dr, \qquad \forall\, t=1,...,T, \tag{1}$$

gdzie przez r_t oznaczono (dla uproszczenia zapisu) stopy procentowe *spot* r_{0t}.

Dla analizowanego rynku zakładamy również, że obowiązuje ciągła kapitalizacja odsetek; por. Jakubowski (2003), Weron A., Weron R. (1998). Wzór określający wartość bieżącą obligacji przybiera wówczas postać:

$$P = P(r_{01},\ldots,r_{0t},\ldots,r_{0T}) = \sum_{t=1}^{T} C_t e^{-r_t t}\,. \tag{2}$$

Można łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku, tzw. czynnik dyskontujący $(1+r)^{-t}$ został – dla ciągłej kapitalizacji odsetek – zastąpiony czynnikiem dyskontującym $\exp(-r_t t)$.

Dokonując oszacowania przyrostu dP funkcji (2) za pomocą dwóch pierwszych członów szeregu Taylora, mamy

$$dP = P(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - P(\mathbf{r}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial P}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\,2}} (dr_t)^2 = -\sum_{t=1}^{T} \left(tC_t e^{-r_t t}\right) dr_t + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \left(t^2 C_t e^{-r_t t}\right)(dr_t)^2\,. \tag{3}$$

Dzieląc obie strony powyższego wzoru przez P oraz biorąc pod uwagę założenie (1), tj. $dr_t = dr$ $(t = 1,\ldots,T)$ otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -\left(\sum_{t=1}^{T} tC_t e^{-r_t t}/P\right) dr + \frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{T} t^2 C_t e^{-r_t t}/P\right)(dr)^2. \tag{4}$$

Wyrażenie w nawiasie okrągłym pierwszego członu powyższej zależności definiujemy jako okresowość Fishera-Weila D_{FW} obligacji; natomiast wyrażenie w nawiasie okrągłym drugiego członu pomnożone przez 1/2 - określa wypukłość V_{FW}. Definiując dodatkowo współczynnik wagowy

$x_t \triangleq C_t e^{-r_t t}/P \qquad \forall\, t = 1,\ldots,T,$ mamy zatem

$$D_{FW} \triangleq \sum_{t=1}^{T} tC_t e^{-r_t t}/P = \sum_{t=1}^{T} x_t t\ , \tag{5}$$

$$V_{FW} \triangleq \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t^2 C_t e^{-r_t t}/P = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} x_t t^2. \tag{6}$$

Ponadto, z (4), (5) i (6) mamy następujący wzór na oszacowanie nieoczekiwanej stopy zwrotu z obligacji, wywołanej losowym, równoległym przesunięciem krzywej dochodowości

$$\frac{dP}{P} = -D_{FW} \times dr + V_{FW} \times (dr)^2\,. \tag{7}$$

Poprzez bezpośrednie różniczkowanie funkcji (32) można łatwo sprawdzić, że wyprowadzone powyżej zależności (5) i (6) są równoważne następującym definicjom parametrów D_{FW} i V_{FW}:

$$D_{FW} = -\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial P}{\partial r_t}\frac{1}{P}, \tag{8}$$

$$V_{FW} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial^2 P}{\partial r_{0t}^{\,2}}\frac{1}{P}\ . \tag{9}$$

Wyprowadzone powyżej wzory (5)-(6) oraz (8)-(9) na okresowość D_{FW} i wypukłość V_{FW} obligacji są bezpośrednimi uogólnieniami analogicznych wzorów wyprowadzonych dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości (tj. dla $r_{0t} = r, t = 1,\dots,T$) oraz przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek; por. Jakubowski (2003).

Nietrudno jest zauważyć, że przedstawiony powyżej model Fishera-Weila kwantyfikacji ryzyka zmienności stóp procentowych za pomocą parametrów okresowości D_{FW} i wypukłości V_{FW} obligacji został sformułowany przy znacznie bardziej ograniczających założeniach (1) – w porównaniu z rozpatrywanymi później schematami dynamiki zmian krzywej dochodowości. Tak więc zdaniem autora – model ten ma w chwili obecnej znaczenie wyłącznie "historyczne". Jest on rozpatrywany w niniejszej pracy tylko z tego powodu, że analizowane w dalszej części parametry tzw. czynnikowej okresowości D_f i czynnikowej wypukłości V_f obligacji - są określonymi uogólnieniami zdefiniowanych powyżej parametrów D_{FW} i V_{FW}.

2.2. Model czynnikowy struktury terminowej

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $r_t = r_{0t}$ - rynkowa stopa procentowa *spot*, tj. rentowność do wykupu (YTM) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu $t = 1,\dots,T$ (tj. dla uproszczenia zapisu pominiemy indeks "0" przy oznaczeniu r_{0t}).
- $TS(\tau)=[r_1(\tau),\dots,r_t(\tau),\dots,r_T(\tau)]$ - struktura terminowa stóp procentowych *spot*, okreslona przez wektor wartości $\{r_t(\tau), t = 1,\dots,T\}$, dla kolejnych chwil $\tau = 1,2,3,\dots,M$.
- $\mathbf{X} = [r_{\tau t}]_{M\times T}$ -macierz obserwacji stóp procentowych r_t $(t = 1,\dots,T)$, dla kolejnych chwil $\tau = 1,2,3,\dots,M$.

Rynkowe stopy procentowe *spot* r_t $(t = 1,\dots,T)$ traktujemy jako zmienne losowe, przy czym zakładamy, że dysponujemy macierzą obserwacji $\mathbf{X}$ tych zmiennych utworzoną w ten sposób, że t-ta kolumna tej macierzy przedstawia realizacje zmiennej losowej r_t w kolejnych chwilach $\tau = 1,\dots,M$. Kolejne wiersze tej macierzy określone są więc przez wektory wierszowe

$$TS(\tau)=[r_1(\tau),\dots,r_t(\tau),\dots,r_T(\tau)]=[r_{\tau 1},\dots,r_{\tau t},\dots,r_{\tau T}], \tag{9}$$

reprezentujące strukturę terminowa stóp procentowych TS w chwilach $\tau = 1,\dots,M$; por. Tablica 1.

* * *

Tablica 1. Postać macierzy obserwacji $\mathbf{X}=[r_{\tau t}]$ o wymiarze $(M \times T)$

	r_1	$\dots$	r_t	$\dots$	r_T
$TS(\tau=1)$	r_{11}	$\dots$	r_{1t}	$\dots$	r_{1T}
$TS(\tau=2)$	r_{21}	$\dots$	r_{2t}	$\dots$	r_{2T}
$\vdots$					
$TS(\tau)$	$r_{\tau 1}$	$\dots$	$r_{\tau t}$	$\dots$	$r_{\tau T}$
$\vdots$					
$TS(\tau=M)$	r_{M1}	$\dots$	r_{Mt}	$\dots$	r_{MT}
	$\bar{r}_1$		$\bar{r}_t$		$\bar{r}_T$
	σ_1		σ_t		σ_T

Podane w ostatnich dwu wierszach powyższej tablicy estymatory nieobciążone wartości oczekiwanych oraz wariancji zmiennych r_t określamy ze znanych wzorów:

$$\bar{r} = \frac{1}{M}\sum_{\tau=1}^{M} r_{\tau t}\,, \qquad \sigma_t^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{\tau=1}^{M}(r_{\tau t}-\bar{r}_t)^2; \quad t=1,\dots,T \tag{10}$$

Na podstawie wartości poszczególnych kolumn macierzy obserwacji $\mathbf{X}$ możemy wyznaczyć estymatory współczynników kowariancji σ_{tl} oraz współczynników korelacji ρ_{tl} pomiędzy stopami procentowymi r_t oraz r_l $(t,l=1,\dots,T)$; a mianowicie

$$\sigma_{tl} = \mathrm{cov}(r_t,r_l) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{M-1}\sum_{\tau=1}^{M}\left(r_{\tau t}-\bar{r}_t\right)\left(r_{\tau l}-\bar{r}_l\right),$$

$$\rho_{tl} = cor(r_t,r_l) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\mathrm{cov}(r_t,r_l)}{\sigma_t\,\sigma_l} = \frac{\sum_{\tau=1}^{M}(r_{\tau t}-\bar{r}_t)(r_{\tau l}-\bar{r}_l)}{\sqrt{\sum_{\tau=1}^{M}(r_{\tau t}-\bar{r}_t)^2 \times \sum_{\tau=1}^{M}(r_{\tau l}-\bar{r}_l)^2}}\,. \tag{11}$$

Współczynniki kowariancji σ_{tl} oraz korelacji ρ_{tl} tworzą odpowiednio - macierz kowariancji $\mathbf{R}$ oraz macierz korelacji $\mathbf{Q}$ o wymiarach $(T \times T)$; postacie tych macierzy przedstawiono w Tablicy 2. Są to macierze symetryczne oraz dodatnio określone (z założenia).

Tablica 2. Macierze współczynników kowariancji $\mathbf{R}$ i korelacji $\mathbf{Q}$ pomiędzy zmiennymi r_t, r_l; $(t,l=1,\dots,T)$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2T} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2T} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Wyznaczona na podstawie obserwacji macierz kowariancji $\mathbf{R}$ (lub - w alternatywnym sformułowaniu -macierz korelacji $\mathbf{Q}$) ma zasadnicze znaczenie dla prezentowanej metody analizy czynnikowej; stanowić ona bowiem będzie punkt wyjściowy do dalszych rozważań.

Dokonując standaryzacji realizacji zmiennych losowych r_t $(t=1,\ldots,T)$; tj.

$$r_{\tau t}^{*}=(r_{\tau t}-\bar{r}_t)/\sigma_t, \qquad \forall\,\tau=1,\ldots,M;\quad t=1,\ldots,T, \tag{13}$$

otrzymamy $(M\times T)$ wymiarową standaryzowaną macierz obserwacji $\mathbf{Z}=[r_{\tau t}^{*}]$, o postaci analogicznej jak macierz $\mathbf{X}$ przedstawiona w Tablicy 1. Wykorzystując teraz zależności (50) i (52), po przekształceniach - otrzymamy (w przypadku estymatorów nieobciążonych) następujące wzory macierzowe, wyznaczające macierz kowariancji $\mathbf{R}$ oraz macierz korelacji $\mathbf{Q}$ (por. Jakubowski, 2007):

$$\mathbf{R}=\mathrm{cov}(\mathbf{r})=\frac{1}{M-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}-\frac{M}{M-1}\bar{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{r}}^T, \qquad \mathbf{Q}=cor(\mathbf{r})=\frac{1}{M-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}, \tag{14}$$

gdzie $\bar{\mathbf{r}}=[\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_t,\ldots\bar{r}_T]^T$.

2.2.1. Model czynnikowy

W modelu czynnikowym, stopy procentowe *spot* przedstawia się w postaci następującej kombinacji liniowej ortogonalnych czynników wspólnych oraz czynników swoistych:

$$r_t=\bar{r}_t+\alpha_{t1}F_1+\ldots+\alpha_{tf}F_f+\alpha_{tm}F_m+\alpha_t\varepsilon_t \tag{15}$$

lub też, zapisując to bardziej skrótowo

$$r_t=\bar{r}_t+\sum_{f=1}^{m}\alpha_{tf}F_f+\alpha_t\varepsilon_t, \qquad \forall\,t=1,\ldots,T, \tag{16}$$

gdzie F_f - czynniki wspólne $(f=1,\ldots,m)$, ε_t - czynniki swoiste $(t=1,\ldots,T)$,
α_{tf} - ładunek czynnika wspólnego F_f w zmiennej r_t (*common factor loading*),
α_t - ładunek czynnika swoistego w zmiennej r_t (*unique factor loading*).

W modelu czynnikowym (55) przyjmujemy następujące założenia:

(i) Liczba m czynników wspólnych jest z góry zadana; przy czym $m\le T$ (w praktyce $m<<T$).

(ii) Czynniki wspólne F_f $(f=1,\ldots,m)$ są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi; tj. $\bar{F}_f=0$, $\mathrm{var}(F_f)=1$. Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, tj.

$$\rho(F_f,F_k)=0;\ \forall\,f,k=1,\ldots,m\ (f\neq k), \tag{17}$$

gdzie przez $\rho(.,.)$ oznaczono współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi.

Ponadto, czynniki wspólne F_f oraz czynniki swoiste ε_t są również wzajemnie nieskorelowane, czyli

$$\rho(F_f,\varepsilon_t)=0; \qquad \forall\,f=1,\ldots,m;\quad t=1,\ldots,T. \tag{18}$$

(iii) Czynniki swoiste ε_t $(t=1,\dots,T)$ są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi; tj. $\bar{\varepsilon}_t=0$, $\mathrm{var}(\varepsilon_t)=1$. Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, czyli

$$\rho(\varepsilon_t,\varepsilon_l)=0,\ \forall\, t,l=1,\dots,T\ (t\neq l). \tag{19}$$

Z przedstawionych powyżej założeń wynika, że każdy czynnik wspólny F_f $(f=1,\dots,m)$ ma te same wartości dla wszystkich zmiennych r_t. Z kolei ładunki czynników wspólnych α_{tf} $(t=1,\dots,T; f=1,\dots,m)$ są wielkościami specyficznymi dla każdej ze zmiennych r_t w tym sensie, że reprezentują one wrażliwość zmiany zmiennej r_t ze względu na zmianę czynnika wspólnego F_f. A dokładniej, ładunki czynnikowe α_{tf} są równe współczynnikom kowariancji między zmiennymi r_t a czynnikami wspólnymi F_f; bezpośrednio z postaci modelu czynnikowego (55) oraz z założeń (56), (57) mamy bowiem

$$Cov(r_t,F_f)\stackrel{\Delta}{=}E[(r_t-\bar{r}_t)F_f]=E\left[(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{tk}F_k+\alpha_t\varepsilon_t)F_f\right]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{tk}E(F_kF_f)+\alpha_tE(\varepsilon_tF_f)=\alpha_{tf}E(F_f^2)=\alpha_{tf} \tag{20}$$

Z powyższego wynika, że ładunek czynnikowy α_{tf} jest wielkością o dowolnym znaku, tj. $\alpha_{tf}\in(-\infty,+\infty)$. Ponadto, biorąc pod uwagę, że czynnik wspólny F_f jest zmienną wystandaryzowaną, współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi r_t i F_f wynosi

$$\rho(r_t,F_f)=\alpha_{tf}/\sigma_t\in[-1,+1],\qquad \forall\, t=1,\dots,T;\ \ f=1,\dots,m. \tag{21}$$

Z kolei każdy czynnik swoisty ε_t jest wyłącznym atrybutem odpowiadającej mu zmiennej r_t $(t=1,\dots,T)$. Gdyby było inaczej, to czynnik ten należałoby po prostu rozpatrywać jako jeden z czynników wspólnych F_f; stąd bardzo ważne jest założenie, że czynniki swoiste są wzajemnie nieskorelowane tj. $\rho(\varepsilon_t,\varepsilon_l)=0$. Wynika stąd bowiem bezpośrednio, że czynnik swoisty ε_t zmiennej r_t jest nieskorelowany z pozostałymi zmiennymi r_l, tj.

$$\rho(r_l,\varepsilon_t)=0;\quad \forall l,t=1,\dots,T;\quad l\neq t. \tag{22}$$

Czynnik swoisty ε_t możemy więc interpretować jako tzw. ryzyko specyficzne obligacji czysto-dyskontowej o okresie do wykupu t oraz rentowności r_t $(t=1,\dots,T)$. Natomiast każdy z czynników wspólnych F_f $(f=1,\dots,m)$ reprezentuje sobą "jeden rodzaj" ryzyka, które jest wspólne dla wszystkich rozpatrywanych obligacji.

Z modelu czynnikowego (55) oraz z założenia (57) wynika, że ładunek α_t czynnika swoistego ε_t jest liczbowo równy współczynnikowi kowariancji pomiędzy czynnikiem ε_t a zmienną r_t; mamy bowiem

$$Cov(r_t,\varepsilon_t)\stackrel{\Delta}{=}E[(r_t-\bar{r}_t)\varepsilon_t]=E\left[(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{tk}F_k+\alpha_t\varepsilon_t)\varepsilon_t\right]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{tk}E(F_k\varepsilon_t)+\alpha_tE(\varepsilon_t^2)=\alpha_{tf}\ . \tag{23}$$

Jakkolwiek, z teoretycznego punktu widzenia ładunek α_t - jako współczynnik kowariancji - mógłby być wielkością o dowolnym znaku, w dalszych rozważaniach dodatkowo założymy, że przyjmuje on wartości wyłącznie nieujemne; tj. $\alpha_t\in[0,+\infty)$ $(t=1,\dots,T)$. Jest to zresztą zgodne z podana powyżej interpretacją. Ponadto, ze wzoru (62) oraz z faktu, że czynniki swoiste są zmiennymi wystandaryzowanymi wynika, że współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi r_t i ε_t wyraża się wzorem

$$\rho(r_t, \varepsilon_t) = \alpha_t / \sigma_t \in [0,+1], \qquad \forall t = 1,\ldots,T. \tag{24}$$

Podsumowując przedstawiony powyżej tok rozumowania można stwierdzić, że metoda analizy czynnikowej wiąże się z założeniem liniowej reprezentacji zbioru wzajemnie skorelowanych zmiennych r_t - zbiorem zadanej liczby nieskorelowanych między sobą (ukrytych) czynników wspólnych F_f oraz czynników swoistych ε_t, przy czym przyjmuje się, że owe "hipotetyczne" czynniki wspólne są właśnie źródłem korelacji między zmiennymi r_t $(t = 1,\ldots,T)$.

Równanie modelu czynnikowego (55) zapisane dla kolejnych dyskretnych chwil czasowych $\tau = 1,\ldots,M$, ma następującą postać:

$$r_{\tau t} = \sum_{f=1}^{m} \alpha_{tf} F_{\tau f} + \alpha_t \varepsilon_{\tau t}; \quad \tau = 1,\ldots,M; \quad t = 1,\ldots,T. \tag{25}$$

W równaniu tym $r_{\tau t}$, $F_{\tau t}$ oraz $\varepsilon_{\tau t}$ oznaczają realizacje (dla $\tau = 1,\ldots,M$) zmiennych losowych r_t, F_f oraz ε_t. Jak można zauważyć, wartości ładunków czynnikowych a_{tf} oraz a_t nie zależą od czasu bieżącego $\tau = 1,\ldots,M$; oznacza to, że wartości ładunków czynnikowych są stałym atrybutem rozpatrywanego modelu (co jest niezmiernie istotne z punktu widzenia dalszych rozważań). Natomiast wartości czynników wspólnych i swoistych zależą oczywiście od czasu bieżącego τ.

2.2.2. Zadanie analizy czynnikowej.

Zadaniem analizy czynnikowej jest wyznaczenie na podstawie zadanej macierzy obserwacji $\boldsymbol{X}$ - oraz przy założeniu liniowego modelu (55) - kolejno następujących wielkości:

- macierzy kowariancji $\boldsymbol{R}$ zmiennych r_t, $t = 1,\ldots,T$; tj.

  $$R = [\sigma_{tt}]_{T\times T} \tag{26}$$

- ładunków czynników wspólnych α_{tf} $(t = 1,\ldots,T; \ f = 1,\ldots,m)$; ładunki te tworzą tzw. *macierz "zmienna-czynnik"* o postaci

  $$\mathbf{A} = [\alpha_{tf}]_{T\times m}, \tag{27}$$

- ładunków czynników swoistych α_t $(t = 1,\ldots,T)$; ładunki te tworzą macierz diagonalną $\mathcal{A}$ o wymiarze $T \times T$, tj.

  $$\mathcal{A} = Diag(\alpha_t)_{T\times T}, \tag{28}$$

- wartości czynników wspólnych $F_{\tau t}$ $(\tau = 1,\ldots,M; f = 1,\ldots,m)$ będących realizacjami zmiennych losowych F_f w dyskretnych chwilach czasowych $\tau = 1,\ldots,M$; wartości te tworzą *macierz czynników wspólnych* o postaci

  $$\mathbf{F} = [F_{\tau t}]_{M\times m}, \tag{29}$$

– wartości czynników swoistych $\varepsilon_{\tau t}$ $(\tau = 1,...,M; t = 1,...,T)$; wartości te tworzą *macierz czynników swoistych* o postaci

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_{\tau t}]_{M\times T}. \tag{30}$$

Dodatkowo, na początkowym etapie analizy czynnikowej - wyznaczamy również na postawie wzoru (53) macierz korelacji $\mathbf{Q} = [\rho_{tt}]_{T\times T}$ pomiędzy zmiennymi r_t; jednak nie jest to bezpośrednio niezbędne dla identyfikacji modelu czynnikowego (55) (w omawianym wariancie metody). Macierz ta bywa natomiast pomocna dla celów interpretacji otrzymanych wyników.

Tak więc etapem końcowym omawianej procedury jest ekstrakcja wartości liczbowych (tj. przebiegów czasowych) "ukrytych" czynników wspólnych $F_f(\tau)$ $(f = 1,...,m)$ i czynników swoistych $\varepsilon_t(\tau)$ $(t = 1,...,T)$. Dokonuje się tego na podstawie wyjściowej macierzy obserwacji $\mathbf{X}$ oraz przedstawionego powyżej całego ciągu dosyć rygorystycznych założeń analizowanego modelu. W tym tez sensie, prezentowany model czynnikowy można zaliczyć do klasy statystycznych modeli uczących się; por. Koronacki, Ćwik (2005).

W procedurze numerycznego rozwiązywania przedstawionego powyżej zadania istotna rolę odgrywają wartości

$$h_t^2 = \alpha_{t1}^2 + ... + \alpha_{tf}^2 + ... + \alpha_{tm}^2; \tag{31}$$

gdzie h_t^2 - tzw. *zasób zmienności wspólnej* zmiennej r_t (*communality*). Bezpośrednio z modelu (55) wynika, że

$$\mathrm{var}(r_t) = \sigma_t^2 = h_t^2 + \alpha_t^2, \quad \forall t = 1,...,T. \tag{32}$$

Zasób zmienności wspólnej (tzw. *communality*) h_t^2, będący sumą kwadratów współczynników korelacji a_{tf}^2 wszystkich czynników wspólnych F_f $(f = 1,...,m)$ ze zmienną r_t, jest więc pewną miarą określającą jaka część całkowitej zmienności zmiennej r_t jest wyjaśniana przez czynniki wspólne. Wynika to stąd, że całkowita zmienność tej zmiennej reprezentowana przez jej wariancję $\mathrm{var}(r_t)$; por. (71).

Podobnie, wartość α_t^2 reprezentuje *zasób zmienności swoistej* zmiennej r_t - wyjaśnianej przez *czynnik swoisty* ε_t $(t = 1,...,T)$. Ponadto, ze wzoru (71) wynika bezpośrednio, że

$$h_t^2 \in [0, \sigma_t^2] \quad \text{oraz} \quad a_t^2 \in [0, \sigma_t^2]. \qquad \forall t = 1,...,T.$$

Podstawiając na przekątnej głównej macierzy korelacji $\boldsymbol{R}$ o postaci (7) w miejsce jedynek, wartości zasobów zmienności wspólnych h_t^2 - otrzymamy tzw. *zredukowaną macierz korelacji* $\boldsymbol{R}^*$; macierz tę przedstawiono w Tablicy 3.

Tablica 3. Postać zredukowanej macierzy kowariancji $\boldsymbol{R}^*$, gdzie $h_t^2 = \sum_{f=1}^{m} a_{tf}^2$.

$$\boldsymbol{R}^* = \begin{bmatrix} h_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & h_2^2 & \cdots & \sigma_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \cdots & h_T^2 \end{bmatrix}; \tag{33}$$

Biorąc pod uwagę wszystkie przedstawione powyżej założenia co do analizowanego liniowego modelu czynnikowego (55) można wykazać, że zachodzi (Koronacki, Ćwik, 2005)

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathcal{A}^2. \tag{34}$$

Powyższe równanie stanowi reprezentację macierzową modelu czynnikowego (55). Z równania tego wynika, że zadanie analizy czynnikowej sprowadza się w zasadzie do rozłożenia macierzy kowariancji zmiennych r_t $(t = 1,...,T)$ na dwie addytywne składowe. Pierwsza z tych składowych zależy wyłącznie od ładunków czynników wspólnych α_{tf}, natomiast druga - od ładunków czynników swoistych α_t. W tym też sensie równania (55) i (78) są sobie równoważne.

Biorąc teraz pod uwagę, że dla zredukowanej macierzy kowariancji R^* o postaci (32) mamy $R^* = \mathbf{R} - \mathcal{A}^2$, z zależności 78 otrzymamy następujące podstawowe *równanie analizy czynnikowej* (por. również Harman, 1967)

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^T. \tag{35}$$

Wyznaczenie macierzy ładunków czynnikowych A (o wymiarze $T \times m$) spełniającej równanie (79) ma podstawowe znaczenie dla rozwiązania rozpatrywanego problemu. Zauważmy, że mając dane ładunki α_{tf} $(t = 1,...,T;\ f = 1,...,m)$ czynników wspólnych możemy łatwo - na podstawie wzorów (70), (71) - wyznaczyć ładunki α_t $(t = 1,...,T)$ czynników swoistych, a tym samym - macierz $\mathcal{A}$ o postaci (67). Macierz ta jest macierzą diagonalną - na jej przekątnej głównej wystarczy podstawić wartości

$$\alpha_t = \sqrt{\sigma_t^2 - h_t^2}; \quad t = 1,...,T, \tag{36}$$

co wynika bezpośrednio ze wzoru (71) oraz z założenia, że przyjmujemy $\alpha_t > 0$.

Na podstawie znajomości macierzy A, oraz wyjściowej macierzy kowariancji R można z kolei wyprowadzić następującą zależność określającą wartość *macierzy czynników wspólnych* $\mathbf{F}$ o postaci (68)

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}^T, \tag{37}$$

Wyprowadzenie powyższego wzoru, jak również dyskusję różnych metod "ekstrakcji" wartości czynników wspólnych $F_{\tau f}$ na podstawie otrzymanego modelu można znaleźć m.in. w obszernej monografii Harmana (1967); por. również Koronacji, Ćwik (2005).

Mając wyznaczoną macierz czynników wspólnych F oraz zdefiniowany model czynnikowy (64) (tj. ładunki czynników wspólnych i swoistych określone) możemy - bezpośrednio z tego modelu - wyznaczyć wartości $\varepsilon_{\tau t}$ macierzy czynników swoistych $\mathbf{E}$ o postaci (69). Stanowi to etap końcowy analizy czynnikowej rozpatrywanego zagadnienia.

Na zakończenie powyższych rozważań należy podkreślić, że rozwiązanie podstawowego równania analizy czynnikowej jest zagadnieniem złożonym; ze wzorów (70), (72) i (79) wynika bowiem, że równanie to jest nieliniowym równaniem macierzowym o skomplikowanej strukturze. Warto również zauważyć, że nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego problemu. Można bowiem łatwo sprawdzić, że jeżeli macierz $\mathbf{A}$ spełnia to równanie, to równanie to jest również spełnione przez każde przekształcenie ortogonalne $\mathbf{AP}$ tej macierzy; gdzie $\mathbf{P}$ - dowolna macierz ortogonalna o wymiarze $(m \times m)$, tj. macierz, dla której zachodzi $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$; por. Jakubowski (2007).

Z powyższego wynika, że istnieje wiele metod rozwiązywania równania analizy czynnikowej (79), w których dla wyznaczenia macierzy A (z określonej klasy rozwiązań) stosuje się pewne dodatkowe kryteria. Najpowszechniej stosowaną metodą jest w rozpatrywanym przypadku tzw. metoda głównego czynnika Hotellinga; por. (Harman, 1967).

2.3. Metoda głównego czynnika (zarys)

Przedstawimy teraz skrótowo podstawowa ideę metody głównego czynnika (bardziej obszerny opis tej metody zawiera m.in. praca Jakubowski, 2007). A mianowicie, posługując się wzorem (70) na zasób zmienności wspólnej h_t^2 zmiennej r_t - możemy wyznaczyć tzw. *ogólną zmienność wspólną*, charakteryzującą wszystkie zmienne r_t $(t=1,\ldots,T)$, tj.

$$V=\sum_{t=1}^{T} h_t^2=\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{f=1}^{m} a_{tf}^2\right)=\sum_{f=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{T} a_{tf}^2\right)=\sum_{f=1}^{m} V_f \tag{38}$$

gdzie $V_f=\sum_{t=1}^{T} a_{tf}^2$. (39)

W powyższym równaniu przez V_f oznaczono więc część ogólnej zmienności wspólnej V, jaka wyjaśniana jest przez czynnik wspólny F_f $(f=1,\ldots,m)$.

Zauważmy, że wartość V_f jest równa sumie kwadratów współczynników kowariancji (tj. kwadratów ładunków czynnikowych) danego czynnika F_f ze wszystkimi zmiennymi r_t; $t=1,\ldots,T$. Wskaźnik V_f jest więc miarą udziału czynnika F_f w wyjaśnianiu wszystkich wzajemnych korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi wyjściowymi r_t $(t=1,\ldots,T)$.

Podstawowa idea *metody głównego czynnika* polega na takim doborze ładunków czynników wspólnych F_f $(f=1,\ldots,m)$, aby udział V_f tych czynników w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej V był malejący. A dokładniej, postępowanie rozpoczyna się od określenia ładunków czynnika pierwszego F_1, którego udział V_1 w ogólnej zmienności V powinien być maksymalny tj. $V_1=\hat{V}_1$. Następnie dobiera się ładunki czynnika drugiego F_2 tak, aby udział V_2 tego czynnika w wyjaśnianiu pozostałej zmienności wspólnej (tj. $V-\hat{V}_1$) był maksymalny, przy określonych uprzednio ładunkach czynnika pierwszego; itd.

W praktyce, metodę głównego czynnika stosuje się sposób iteracyjny. To znaczy najpierw zadaje się pewną początkową wartość h_t^2 zasobów zmienności wspólnej dla każdej ze zmiennych r_t $(t=1,\ldots,T)$. Następnie dla zadanej w ten sposób macierzy $\boldsymbol{R}^*$ - stosuje się powyższą metodę w celu wyznaczenia ładunków dla wszystkich czynników $F_1,F_2,\ldots,F_m$, po czym dokonuje się modyfikacji wartości h_t^2 według wzoru (70), tj.

$$\left(h_t^{i+1}\right)^2=\sum_{f=1}^{m}\left(a_{tf}^i\right)^2; \qquad t=1,\ldots,T, \tag{40}$$

gdzie i - numer iteracji; $i=1,2,3,\ldots$.

Można wykazać (Harman, 1967), że zastosowanie metody głównego czynnika na każdym z etapów powyższego procesu iteracyjnego jest równoważne z wyznaczaniem (dla kolejno zadawanych wartości h_t^2) wartości własnych λ_f oraz wektorów własnych $\mathbf{w}_f$ zredukowanej macierzy kowariancji $\mathbf{R}^*$; $f=1,...,m,...,T$. Dowodzi się przy tym, że w punkcie zbieżności zastosowanej procedury tylko pierwszych m wartości własnych λ_f jest dodatnich; pozostałe zaś wartości λ_f są równe zeru (w przybliżeniu). Innymi słowy, zredukowana macierz kowariancji $\mathbf{R}^*$ jest macierzą dodatnio półokreśloną, przy czym rząd tej macierzy jest równy m.

Rozpatrując wyniki końcowe analizy czynnikowej bierze się przede wszystkim pod uwagę procentowy udział P_f poszczególnych czynników wspólnych F_f w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej V danej wzorem (83), tj.

$$P_f = \frac{V_f}{V} \times 100\% . \qquad f = 1,...,m . \tag{41}$$

Dokując analizy uzyskanych wyników, warto jest również obliczyć tzw. *zasoby globalnej zmienności* V_{glob} zbioru zmiennych wyjściowych $r_1, r_2, ..., r_T$, określone przez sumę wariancji σ_t^2 tych zmiennych; tj.

$$V_{glob} = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^2 . \tag{42}$$

Następnie, możemy określić procentowy udział zasobów ogólnych zmienności wspólnej V w globalnych zasobach zmienności V_{glob}, tj.

$$Pr = \frac{V}{V_{glob}} \times 100\% . \tag{43}$$

Jak to wynika z analizowanych poprzednio wzorów (70), (71) i (83), współczynnik Pr jest zawsze mniejszy od jedności; tj. zachodzi $V < V_{glob}$. Dany wzorem (93) procentowy wskaźnik Pr określa więc poziom dokładności z jakim - zgodnie z wprowadzonym modelem czynnikowym - układ skorelowanych zmiennych wyjściowych r_t $(t = 1,...,T)$ może być przybliżony zbiorem ortogonalnych czynników wspólnych F_f $(f = 1,...,m)$. Powyższe - przy założeniu, że w analizowanym modelu czynnikowym pominiemy czynniki swoiste ε_t; na przykład - w celu uproszczenia rozważań.

2.4. Metody numeryczne

Opisana metoda analizy czynnikowej jest oprogramowana w wielu komercyjnych pakietach komputerowych przeznaczonych do zaawansowanych obliczeń statystycznych; m. in. w pakiecie STATISTICA oraz w pakiecie STATGRAPHICS (funkcja FACTOR).

Jak już wspomnieliśmy, przedstawione powyżej w ogólnym zarysie zastosowanie tej metody do konstrukcji modelu dynamiki nieoczekiwanych zmian struktury terminowej $TS(\tau)$ stóp procentowych spot r_t, z upływem czasu bieżącego τ - zostało bardziej szczegółowo omówione (w nieco innym ujęciu) w pracy autora Jakubowski (2007). W pracy tej podano m.in. interpretację geometryczną analizowanego modelu w przestrzeni czynników wspólnych $OF_1...F_m$ rzutowanej na dwuwymiarową przestrzeń OF_1F_2; a także, przedstawiono zagadnienie tzw. rotacji ortogonalnych, prowadzących do określonej modyfikacji modelu, otrzymanego metodą głównego czynnika (Hotellinga).

Procedury owych rotacji ortogonalnych przestrzeni czynników wspólnych - o nazwach VARIMAX, QUARTIMAX, oraz EQUIMAX są również oprogramowane w ramach wspomnianych pakietów komputerowych.

3. Zastosowanie zaawansowanych metod analizy stochastycznej - czynnikowa okresowość i czynnikowa wypukłość obligacji

W poprzednim punkcie przedstawiliśmy poszczególne etapy identyfikacji modelu czynnikowego (55) rynkowych stóp procentowych *spot* r_t, określanych dla kolejnych dyskretnych punktów czasowych $\tau = 1,2,3,\ldots$, na podstawie rentowności do wykupu (*YTM*) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu $t = 1,\ldots,T$.
Model ten miał postać

$$r_t = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^{m} \alpha_{tf} F_f + \alpha_t \varepsilon_t, \qquad \forall t = 1,\ldots,T. \tag{44}$$

Proces identyfikacji modelu polegał w rozpatrywanym przypadku nie tylko na określeniu współczynników a_{tf}, a_t modelu, ale również na wyznaczeniu wartości czynników wspólnych $F_f(\tau)$ (tj. macierzy F danej wzorem (81)) oraz czynników swoistych $\varepsilon_t(\tau)$ (tj. macierzy $\mathbf{E}$ o postaci (69)). Zdecydowanie wyróżnia to powyższe podejście od metodologii analizy regresyjnej, w przypadku której przedmiotem identyfikacji są tylko współczynniki a_{tf} (oraz ewentualnie a_t) modelu liniowego, natomiast F_f $(f = 1,\ldots,m)$ traktowane są jako egzogeniczne zmienne wejściowe o określonej interpretacji ekonomicznej oraz o wartościach znanych bezpośrednio z przeszłych obserwacji. Zauważmy, że w przypadku modelu czynnikowego, wartości zmiennych $F_f(\tau)$ wyznacza się dopiero na etapie końcowym konstrukcji modelu.

W dalszych rozważaniach założymy (podobnie jak w prezentowanym poprzednio modelu Fishera, Weila, 1971) ciągłą kapitalizację odsetek. Wówczas, wartość bieżąca obligacji wielokuponowej, jako funkcja stóp procentowych *spot* r_t $(t = 1,\ldots,T)$ - wyraża się wzorem

$$P = P(r_{01},\ldots,r_{0t},\ldots,r_{0T}) = \sum_{t=1}^{T} C_t e^{-r_t t}. \tag{45}$$

Podstawowa idea omawianej dalej metody czynnikowej immunizacji zawiera się w następującym spostrzeżeniu: z wyprowadzonego modelu czynnikowego (94) wynika, że zamiast rozpatrywać zmiany wartości dP obligacji danej wzorem (95) ze względu na zmiany dr_t, możemy analizować analogiczne zmiany dP ze względu na zmiany dF_f $(f = 1,\ldots,m)$ czynników wspólnych dla wszystkich stóp procentowych r_t $(t = 1,\ldots,T)$. Ze wzorów (94) i (95) wynika bowiem, że wartość bieżącą P obligacji możemy traktować jako pewną złożoną funkcję wektora czynników wspólnych $\mathbf{F} = [F_1,\ldots,F_m]$, tj.

$$P = P(\mathbf{F}) = P(F_1,\ldots,F_m). \tag{46}$$

Zauważmy, że funkcja $P(\mathbf{F})$ jest ciągła wraz z wszystkimi pochodnymi cząstkowymi dowolnego rzędu. Z formalnego punktu widzenia, funkcję te możemy więc traktować jako pewne gładkie odwzorowanie wektora czynników wspólnych $\mathbf{F}$ w przestrzeń R^1. Dynamikę nieoczekiwanych losowych zmian wzajemnie nieskorelowanych czynników wspólnych $F_1(\tau),\ldots,F_m(\tau)$ z upływem czasu bieżącego τ, wywołujących określona zmianę kształtu struktury terminowej $TS(\tau)$ - można zmodelować w postaci następującego stochastycznego równania różniczkowego $\hat{I}to$:

$$dF_f(\tau) = \mu_f d\tau + \sigma_f dW_f(\tau), \qquad \forall f = 1,\ldots,m, \tag{47}$$

gdzie μ_f - współczynnik dryfu (*drift*), σ_f - współczynnik zmienności (*volatility*), przy czym μ_f, σ_f SA danymi stałymi; $W_f(\tau) = W_f(\omega,\tau)$ - standardowy proces stochastyczny Wienera, tj. proces gaussowski o przyrostach niezależnych oraz o parametrach $W_f \sim N(0,\tau)$.

Ponadto zakładamy, że procesy Wienera $W_f(\tau)$, $W_l(\tau)$ $(f,l=1,\ldots,m;\ f \neq l)$ są wzajemnie niezależne. Z formalnego punktu widzenia, równanie (97) określa więc różniczkę stochastyczną $d\mathbf{F}(\tau)$ wektorowego procesu $\mathbf{F} = [F_1,\ldots,F_m]$ o nieskorelowanych współrzędnych. Wykażemy prawdziwość następującego lematu.

Lemat 1. Załóżmy, że różniczka stochastyczna $d\mathbf{F}(\tau)$ wektora nieskorelowanych czynników wspólnych dana jest wzorem (97). Wówczas, różniczka stochastyczna $\hat{I}to$ wartości bieżącej $P(\mathbf{F})$ obligacji wyraża się wzorem:

$$P(\mathbf{F}) = dP(F_1,\ldots,F_m) = \sum_{f=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{m} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2}(dF_f)^2. \tag{48}$$

Dowód. Wykażemy, że wzór (98) wynika z najprostszej wersji Lematu $\hat{I}to$ sformułowanego dla wektorowych procesów stochastycznych. Postać ogólną wielowymiarowego wariantu wzoru $\hat{I}to$, z którego korzystamy poniżej - przedstawiono w Dodatku, zamieszczonym na końcu niniejszej pracy.

Przy przyjętych przez nas założeniach co do wektorowego procesu $\mathbf{F}(\tau)$ oraz o różniczce stochastycznej $d\mathbf{F}(\tau)$ danej wzorem (97) - z Lematu $\hat{I}to$ mamy: dla dowolnej, ciągłej wraz z drugimi pochodnymi, nielosowej funkcji $P[\mathbf{F}(\tau),\tau]$, różniczka stochastyczna tej funkcji wyraża się wzorem

$$dP[\mathbf{F}(\tau),\tau] = \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} + \sum_{f=1}^{m}\mu_f \frac{\partial P}{\partial F_f} + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{m}\sigma_f^2 \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2}\right) d\tau + \sum_{f=1}^{m}\sigma_f \frac{\partial P}{\partial F_f} dW_f, \tag{49}$$

gdzie μ_f, σ_f -współczynniki równania (97).

Jak można zauważyć, różniczka dP wartości bieżącej obligacji składa się z członu deterministycznego stojącego przy dt, odpowiadającego za ewolucję w czasie (tzw. dryf) tej wartości oraz z członu stochastycznego, obrazującego za pomocą różniczek dW_f $(f=1,\ldots,m)$ procesów Wienera - wpływ czynników losowych na przebieg tej ewolucji. Z równania (99), po przekształceniach, otrzymamy

$$dP\,[\mathbf{F}(\tau),\tau] = \frac{\partial P}{\partial \tau}d\tau + \sum_{f=1}^{m}\frac{\partial P}{\partial F_f}(\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f) + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{m}\sigma_f^2\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2}\,d\tau\,.$$

Wykorzystamy teraz tzw. prawa mnożenia różniczki stochastycznej $dW_f(\tau)$ procesu Wienera (po. Weron A., Weron R., 1998):

$$[dW(\tau)]^2 = d\tau, \quad dW(\tau)d\tau = 0, \quad (d\tau)^2 = 0. \tag{50}$$

Pierwsze dwa z powyższych wzorów są symbolicznym zapisem następujących stochastycznych zbieżności średniokwadratowych

$$\underset{\Delta\tau\to 0}{l.i.m.}\,[\Delta W(\tau)]^2 = d\tau \qquad \text{oraz} \qquad \underset{\Delta\tau\to 0}{l.i.m.}\,[\Delta W(\tau)\Delta\tau] = 0\,. \tag{51}$$

Natomiast wzór $(d\tau)^2 = 0$ jest symbolicznym zapisem oczywistego faktu, że wartość $(\Delta\tau)^2$ jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż $\Delta\tau$, tj. $(\Delta\tau)^2 = o(\Delta\tau)$; tak więc wartość ta zanika, dla nieskończenie małych przyrostów $d\tau$.

Korzystając z praw mnożenia (101), iloczyn $\sigma_f^2 d\tau$ występujący w ostatnim członie wzoru (100) możemy przedstawić następująco:

$$\sigma_f^2 d\tau = \mu_f^2 (d\tau)^2 + 2\mu_f\sigma_f dW_f d\tau + \sigma_f^2 (dW_f)^2 = (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f)^2\,. \tag{52}$$

Z (100) i (103) mamy więc

$$dP\,[\mathbf{F}(\tau),\tau] = \frac{\partial P}{\partial \tau}d\tau + \sum_{f=1}^{m}\frac{\partial P}{\partial F_f}(\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f) + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{m}\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2}(\mu_f\, d\tau + \sigma_f dW_f)^2 \tag{53}$$

Podstawiając teraz wyrażenie (97) do wzoru (104) otrzymamy ostatecznie

$$P(\mathbf{F}) = dP(F_1,\ldots,F_m) = \frac{\partial P}{\partial \tau}d\tau + \sum_{f=1}^{m}\frac{\partial P}{\partial F_f}dF_f + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{m}\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2}(dF_f)^2\,. \tag{54}$$

Wyprowadzony wzór (105) dotyczy ogólnego przypadku, gdy funkcja $P(\cdot,\cdot)$ zależy w sposób jawny od czasu bieżącego τ. Natomiast dla analizowanej w niniejszym lemacie funkcji $P = P(\mathbf{F})$, występująca w tym wzorze pochodna $\dfrac{\partial P}{\partial \tau}$ zanika i otrzymujemy szukaną zależność (98).

c.n.d.

Zauważmy, że wyprowadzony powyżej, na gruncie analizy stochastycznej, wzór (98) jest uogólnieniem klasycznego wzoru na różniczkę zupełną funkcji wielu zmiennych, rozpatrywanego w przypadku deterministycznym. Różnica jest taka, że w przypadku różniczki stochastycznej *Îto* - występuje dodatkowo człon zawierający pochodne drugiego rzędu; por również Sobczyk (1996), s. 130.

Na rozpatrywane powyżej zagadnienie można również spojrzeć w inny sposób. A mianowicie, wyprowadzony powyżej wzór (98) moglibyśmy uzyskać w drodze "deterministycznej" rozwijając po prostu zależność $P(\mathbf{F} + d\mathbf{F})$ w szereg Taylora z dokładnością do członów drugiego rzędu i pomijając wszystkie pochodne mieszane, tj. $\frac{\partial^2 P}{\partial F_f \partial F_l}$ $(f, l = 1,...,m; f \neq l)$. Mając jednak na uwadze fakt, że pochodne te są w istocie niezerowe, przedstawiona przez nas powyżej procedura, wykorzystująca formalizm stochastycznych równań różniczkowych *Îto* - jest merytorycznie bardziej poprawna i uzasadniona. Tym bardziej, że w dalszych rozważaniach dotyczących zagadnienia immunizacji portfela, nie będziemy więcej korzystać z równania stochastycznego (97) ewolucji czasowej czynników wspólnych F_f $(f = 1,...,m)$. Tak więc - dla naszych celów - Ne zaistnieje konieczność identyfikacji parametrów dryfu μ_f oraz zmienności σ_f, co w praktyce mogłoby być dosyć kłopotliwe.

Dzieląc obie strony równania (98) przez P, otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = \sum_{f=1}^{m} \left[\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} \right] dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^{m} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} \right] (dF_f)^2. \tag{55}$$

W powyższym wzorze, wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie prostokątnym definiujemy jako czynnikową okresowość D_f obligacji; natomiast wyrażenie w drugim nawiasie prostokątnym - określamy jako wypukłość czynnikową V_f. Mamy więc

$$D_f \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P}, \qquad V_f \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f{}^2} \frac{1}{P}, \qquad \forall f = 1,...,m. \tag{56}$$

A zatem, z (106), (107) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -\sum_{f=1}^{m} D_f \, dF_f + \sum_{f=1}^{m} V_f (dF_f)^2, \tag{57}$$

gdzie wielkość $\frac{dP}{P}$ nazywamy niespodziewaną stopą zwrotu z obligacji wywołaną nieoczekiwanymi zmianami dF_f czynników wspólnych $(f = 1,...,m)$.

W celu wyznaczenia parametrów okresowości D_f wypukłości V_f, danych zależnościami (107), a tym samym obliczenia odnośnych pierwszych i drugich pochodnych funkcji $P(\mathbf{F})$ danej wzorami (95) i (94), skorzystamy ze wzorów na pochodna zupełną funkcji złożonej. Mamy zatem

$$\frac{\partial P}{\partial F_f} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial P}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial F_f} = -\sum_{t=1}^{T} t \alpha_{tf} C_t e^{-r_t t}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} = \frac{\partial}{\partial F_f} \left(\frac{\partial P}{\partial F_f} \right) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial}{\partial r_t} \left(\frac{\partial P}{\partial F_f} \right) \frac{\partial r_t}{\partial F_f} = \sum_{t=1}^{T} t^2 \alpha_{tf}^2 C_t e^{-r_t t}. \tag{59}$$

Z (107), (109) i (110) otrzymamy więc końcową postać wzorów na parametry D_f i V_f

$$D_f \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^{T} t \alpha_{tf} C_t e^{-r_t t} / P, \qquad \forall f = 1,...,m, \tag{60}$$

$$V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^{\,2}} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} t^2 \alpha_{tf}^2 C_t e^{-r_t t} / P, \qquad \forall f = 1,\ldots,m. \tag{61}$$

Wyprowadzone powyżej wzory (108), (111) i (112) stanowią kompletny układ zależności, za pomocą których możemy oszacować niespodziewaną stopę zwrotu dP/P z obligacji wywołaną nieoczekiwaną zmianą struktury terminowej *TS* stóp procentowych *spot* r_t, przy założeniu, że zmiany te są reprezentowane przez nieskorelowane wahania dF_f $(f = 1,\ldots,m)$ ortogonalnych czynników wspólnych. Zauważmy, że wzory (111) i (112) na czynnikową okresowość D_f i czynnikową wypukłość V_f obligacji są bezpośrednimi uogólnieniami analogicznych wzorów (35) i (36) definiujących okresowość D_{WF} i wypukłość V_{WF} obligacji, w przypadku rozpatrywanego wcześniej modelu Fishera-Weila, sformułowanego przy założeniu wyłącznie równoległych przesunięć *dr* krzywej dochodowości. Z formalnego punktu widzenia, wzory te różnią się tylko tym, że w przypadku modelu czynnikowego występują w odnośnych zależnościach dodatkowo współczynniki (tj. ładunki czynnikowe) α_{tf}. Również wzór (108) określający niespodziewaną stopę zwrotu z obligacji jest bezpośrednim uogólnieniem analogicznego wzoru (37).

Bardziej wnikliwa analiza porównawcza powyższych podejść prowadzi jednak do dalszych wniosków. Przede wszystkim zauważmy, że współczynnik α_{tf} występujący m.in. we wzorze (111) określającym parametr D_f okresowości czynnikowej obligacji - może być dowolnego znaku. Tak więc wpływ zmiany dF_f czynników wspólnych na niespodziewaną stopę zwrotu dP/P - modelowany za pomocą równania (108) - ma o wiele bardziej złożoną naturę, w porównaniu z analogicznym wpływem nieoczekiwanego, równoległego przesunięcia *dr* krzywej dochodowości, rozpatrywanego w modelu Fishera-Weila za pomocą równania (37). W tym ostatnim równaniu, parametr okresowości D_{FW} przybiera bowiem zawsze wartości dodatnie.

Druga istotną różnicą pomiędzy modelem Fishera-Weila a modelem czynnikowym jest to, że wprowadzenie definicji zarówno czynnikowej okresowości (111) jak i czynnikowej wypukłości (112) wiąże się z przyjęciem po m parametrów D_f i V_f dla każdej z rozpatrywanych obligacji wielokuponowych, ponieważ rozpatrujemy łączne oddziaływanie m czynników wspólnych F_f. Natomiast w przypadku modelu Fishera-Weila (jak też i w przypadku innych podejść klasycznych) dla każdej obligacji definiujemy tylko po jednym parametrze okresowości i wypukłości. Jednak w przypadku modelu czynnikowego nie powinno to być zbyt kłopotliwe, ponieważ - jak wykazują dotychczasowe doświadczenia - w praktyce, na rozwiniętych rynkach kapitałowych, wzięcie pod uwagę $m = 3 \div 4$ czynników prowadziło do wyjaśnienia ok. 95-97 % *zasobów zmienności ogólnej* rynkowych stóp procentowych *spot* r_t $(t = 1,\ldots,T)$.

Biorąc dodatkowo pod uwagę, że na rynkach tych rozpatruje się struktury terminowe stóp procentowych dla terminów zapadalności od 1 roku do 30 lat - a więc w sumie dla $T = 30$ zmiennych r_t - otrzymana w wyniku modelu czynnikowego redukcja liczby zmiennych objaśniających (przy minimalnej stracie informacji) - jest rzeczywiście bardzo znacząca. Wynika to zresztą z samej specyfiki metody analizy czynnikowej, w ramach której - jako punkt wyjściowy do rozważań rozpatrujemy na ogół silnie skorelowane stopy procentowe r_t. Zauważmy, że gdyby wszystkie współczynniki korelacji ρ_{tl} pomiędzy analizowanymi zmiennymi

r_t , r_l $(t, l = 1,...,T; t \neq l)$ były równe jedności - do analizy układu T tych zmiennych, wystarczyłby jeden czynnik wspólny F_1.

W modelu czynnikowym opracowanym dla rynku amerykańskiego zidentyfikowano $m = 3$ istotne czynniki wspólne (Litterman, Scheinkman, 1991):

F_1 - czynnik wpływający na ogólny poziom stóp procentowych r_t; tzw. czynnik poziomu (*level factor*);

F_2 - czynnik wpływający na nachylenie krzywej dochodowości; tzw. czynnik nachylenia (*steepness factor*);

F_3 - czynnik wpływający na stopień zakrzywienia krzywej dochodowości; tzw. czynnik krzywizny (*curvature factor*).

W celu bliższego wyjaśnienia takiej właśnie interpretacji tych czynników, wygodnie jest przedstawić analizowany dla czynników F_1, F_2 i F_3 model czynnikowy (94) tak - jak to przedstawiono w tablicy 4.

Tablica 4. Model czynnikowy dla trzech czynników wspólnych F_1, F_2, F_3;
r_t - stopy procentowe *spot*, $\bar{r}_t$ - wartości oczekiwane stóp r_t,
ε_t - czynniki swoiste, α_{tf}, α_t - ładunki czynnikowe

$$\boxed{\begin{aligned}
r_1 &= \bar{r}_1 + \alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \alpha_{13}F_3 + \alpha_1\varepsilon_1 \\
r_2 &= \bar{r}_2 + \alpha_{21}F_1 + \alpha_{22}F_2 + \alpha_{23}F_3 + \alpha_2\varepsilon_2 \\
&\vdots \\
r_t &= \bar{r}_t + \alpha_{t1}F_1 + \alpha_{t2}F_2 + \alpha_{t3}F_3 + \alpha_t\varepsilon_t \\
&\vdots \\
r_T &= \bar{r}_T + \alpha_{T1}F_1 + \alpha_{T2}F_2 + \alpha_{T3}F_3 + \alpha_T\varepsilon_T
\end{aligned}}$$

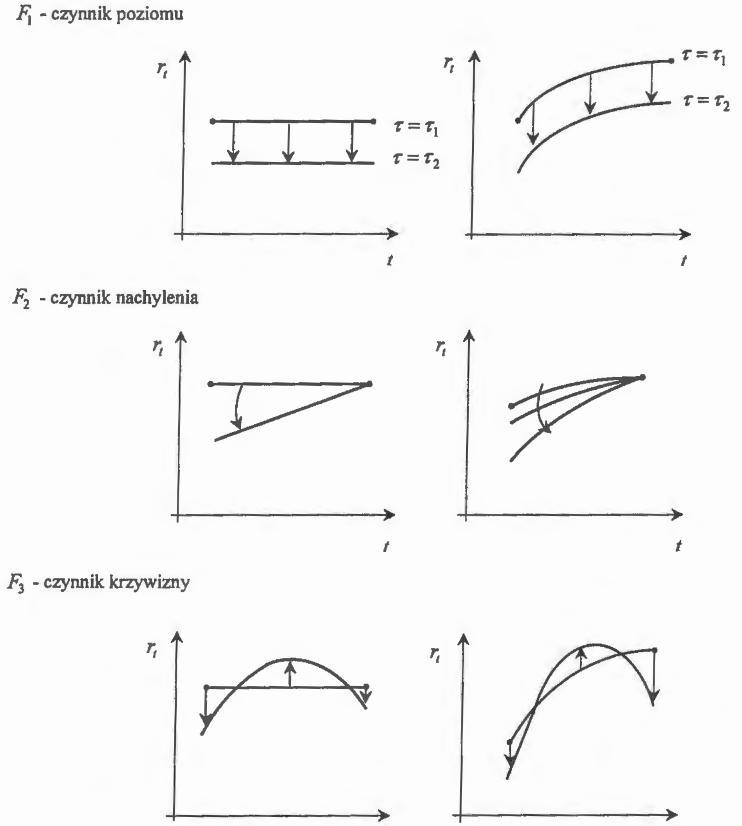
Zauważmy, że gdy wszystkie ładunki czynnikowe $(\alpha_{11},...\alpha_{t1},...,\alpha_{T1})$ czynnika F_1 w zmiennych r_t $(t = 1,...,T)$ są dodatnie - to wzrost lub spadek dF_1 wartości tego czynnika (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) będzie powodował jednoczesny wzrost lub spadek poziomu wszystkich analizowanych stóp procentowych *spot* r_t. Czynnik F_1 można więc nazwać - *czynnikiem poziomu*.

Ponadto, gdy początkowe wartości ciągu ładunków czynnikowych $(\alpha_{12}, \alpha_{22}...\alpha_{t2},...,\alpha_{T2})$ stojących przy czynniku F_2 są dodatnie, natomiast wartości końcowe tego ciągu są ujemne (lub na odwrót) - to wzrost lub spadek dF_2 tego czynnika (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) - będzie powodował zmianę nachylenia analizowanej krzywej dochodowości. Czynnik F_2 jest nazywany w tym przypadku - *czynnikiem nachylenia*.

Natomiast, gdy skrajne wartości ciągu ładunków czynnikowych $(\alpha_{13}, \alpha_{23}...\alpha_{t3},...,\alpha_{T3})$ stojących przy czynniku F_3 są tego samego znaku, natomiast środkowe wartości tego ciągu są znaku przeciwnego - to wzrost lub spadek dF_3 czynnika F_3 (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) stanie się przyczyną określonego odkształcenia krzywej dochodowości w górę lub w dół. Czynnik F_3 można więc nazwać w tym przypadku - *czynnikiem krzywizny*.

Całkowity kształt analizowanej krzywej dochodowości wynikał więc z "liniowego" nałożenia się oddziaływań rozpatrywanych czynników wspólnych, zgodnie z modelem czynnikowym prezentowanym w tablicy 4. Ilustrację graficzną tych oddziaływań można sobie wyobrazić tak, jak to przedstawiono na rysunku 3.

W lewej części tego rysunku zilustrowano dynamiczne zmiany początkowo płaskiej krzywej dochodowości; natomiast w prawej części rysunku - przedstawiono analogiczne zmiany, przy założeniu, że początkowy przebieg tej krzywej był nieliniowy.



Rys. 3. Ilustracja oddziaływań czynników wspólnych F_1, F_2 i F_3 na strukturę terminową stóp procentowych; F_1 – czynnik poziomu, F_2 – czynnik nachylenia, F_3 – czynnik krzywizny.
Źródło: Jakubowski (2007).

4. Optymalizacja i immunizacja portfela obligacji

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

P_i - bieżąca wartość (cena równowagowa) i-tej obligacji, $i = 1,...,N$;

x_i - liczba nominałów i-tej obligacji w rozpatrywanym portfelu (zmienna decyzyjna);

P - wartość bieżąca portfela P obligacji;

P_L - zdyskontowana w czasie do chwili obecnej wartość przyszłego zobowiązania L inwestora (*liability*), przy zastosowaniu rynkowych stóp procentowych *spot* r_t jako stóp dyskontowych;

D_{if} - czynnikowa okresowość i-tej obligacji, $f = 1,...,m$;

D_{Lf} - czynnikowa okresowość zobowiązania finansowego, $f = 1,...,m$;

V_{if} - czynnikowa wypukłość i-tej obligacji, $f = 1,...,m$;

V_{Lf} - czynnikowa wypukłość zobowiązania finansowego, $f = 1,...,m$;

$Q(x_1,...,x_n)$ - stopa zwrotu z portfela P obligacji jako funkcja liczby nominałów x_i $(i = 1,...,N)$, poszczególnych walorów.

Model immunizacji portfela obligacji ze względu na zmiany rynkowych stóp procentowych *spot* r_t $(t = 1,...,T)$ wyznaczony przy założeniu, że wartości bieżące obligacji P_i są określone wzorem (60) oraz czynnikowe okresowości i wypukłości - wzorami (64) i (66), można sformułować następująco (Dahl, 1993) :

Należy określić takie optymalne wartości zmiennych $\hat{x}_i$ $(i = 1,...,n)$ aby zachodziło:

$$Q(x_1,...,x_N) \xrightarrow[\{x_i\}]{} MAX, \tag{62}$$

przy ograniczeniach

$$P = P_L, \tag{63}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_{if} P_i x_i = D_{Lf} P_L, \quad \forall f = 1,...,m, \tag{64}$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_{if} P_i x_i \geq V_{Lf} P_L, \quad \forall f = 1,...,m, \tag{65}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{oraz} \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1,...,n. \tag{66}$$

Należy podkreślić, że wzory (62)-(66) przedstawiają rozwiązanie zagadnienia czynnikowej immunizacji portfela obligacji dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek. Zauważmy, że z ograniczenia równościowego (69) wynika, że czynnikowa okresowość portfela obligacji ma być równa czynnikowej okresowości zobowiązań. Natomiast formułując ograniczenie nierównościowe (70) żądamy, aby czynnikowa wypukłość portfela obligacji miała co najmniej taką wartość jak czynnikowa wypukłość zobowiązań. Przedstawione warunki (68)-(71) immunizacji portfela dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek – jakkolwiek podobne – różnią się jednak od rozpatrywanych w innych pracach analogicznych warunków, sformułowanych dla dyskretnej kapitalizacji odsetek; por. Jakubowski (2006b).

Zagadnienie optymalizacji (62)-(66) jest typowym zadaniem programowania matematycznego. W pracy Dahla (1993) wyprowadzono powyższy model przy założeniu, że funkcja celu $Q(x_1,...,x_n)$ jest liniowa względem udziałów x_i $(i=1,...,n)$, jakkolwiek istnieje tu wiele innych możliwości formalizacji rozpatrywanego problemu optymalizacyjnego.

Na zakończenie warto podkreślić, że pominięcie niektórych ze sformułowanych powyżej ograniczeń, np. w stosunku do immunizacji rozpatrywanego portfela ze względu na wybrany czynnik wspólny F_f (tj. dla ustalonego $f=f_0$) - może prowadzić do tzw. *aktywnego zarządzania portfelem obligacji* ze względu na ten właśnie czynnik. Załóżmy na przykład, że dla rozpatrywanego problemu immunizacji zidentyfikowano czynnik F_1 jako czynnik ogólnego poziomu stóp procentowych r_t $(t=1,...,T)$. W praktyce oznaczać to będzie, że ładunki czynnikowe a_{1t} mają dla wszystkich stóp r_t wartości dodatnie oraz bliskie jedności. Tak więc wzrost czynnika F_1 powoduje jednoczesny wzrost wszystkich stóp procentowych r_t $(t=1,...,T)$; natomiast spadek czynnika F_1 - wywołuje spadek tych stóp; por. rysunek 5 (*czynnik poziomu*).

W takiej sytuacji, gdy dysponujemy wiarygodnymi danymi, że wszystkie stopy procentowe na przykład spadną, to możemy "uwolnić" immunizację swego portfela ze względu na czynnik F_1. Oznaczać to będzie pominięcie w ograniczeniach (69), (70) modelu - indeksu $f=1$. To znaczy, portfela nie immunizujemy ze względu na czynnik F_1 ponieważ wiemy, jak czynnik ten będzie się zachowywał w przyszłości, dla zadanego horyzontu czasowego. W miejsce immunizacji ze względu na pierwszy czynnik, możemy natomiast zastosować strategię aktywną polegającą na zakupie obligacji długoterminowych, ponieważ spodziewamy się spadku ogólnego poziomu stóp procentowych.

Natomiast immunizację ze względu na pozostałe dwa czynniki, tj. czynnik nachylenia F_2 oraz czynnik krzywizny F_3 - pozostawiamy w mocy, ponieważ nie jesteśmy pewni czy spodziewane przesunięcie krzywej dochodowości TS w dół nastąpi w sposób równomierny, to znaczy czy będzie to przesunięcie równoległe o stałą wartość $dr=const(t)$; $t=1,...,T$. W ten sposób, spodziewając się ogólnego spadku stóp procentowych i stosując w związku z tym odpowiednią strategię aktywną, zabezpieczamy się jednocześnie przed ryzykiem zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych (*shape risk*).

Można spodziewać się, że zastosowanie takiego właśnie postępowania, polegającego na powiązaniu aktywnej strategii zarządzania portfelowego ze strategią pasywną, dotyczącą częściowej immunizacji (tj. ze względu na wspomniane ryzyko kształtu) będzie źródłem dodatkowych zysków, w porównaniu ze strategią całkowicie pasywną. Strategia całkowicie pasywna jest w analizowanym przypadku określona przez model (67)-(71), rozpatrywany dla wszystkich zidentyfikowanych czynników F_f $(f=1,...,m)$ dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych.

Oczywiście przedstawione powyżej postępowanie będzie uzasadnione, o ile nasze prognozy co do spodziewanego „ruchu" krzywej dochodowości w dół się spełnią. Oznacza to, że dokonując immunizacji naszego portfela inwestycyjnego ze względu na *ryzyko kształtu*, musimy jednocześnie zaakceptować określone ogólne ryzyko zmiany poziomu stóp procentowych (*interest rate risk*).

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawiony powyżej czynnikowy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji oferuje nam daleko szerszy wachlarz możliwości w porównaniu z modelami klasycznymi, wykorzystującymi koncepcję Macaulay'a parametru *okresowości* i *wypukłości* obligacji; bądź tylko pewne modyfikacje tej koncepcji zaproponowane np. przez Fishera, Weila (1977) czy też Babbela (1983). W przypadku modelu czynnikowego, możemy bowiem immunizować nasz portfel inwestycyjny nie tylko ze względu na wszystkie zidentyfikowane czynniki dynamiki zmian stóp procentowych; możemy również samodzielnie (tj. według naszego uznania) wybierać te czynniki, które mają podlegać immunizacji. A to już oznacza duży postęp w rozpatrywanej dziedzinie zarządzania ryzykiem inwestycyjnym.

* * *

Literatura

1. Babbel D.F. (1983) Duration and the Term Structure of Interest Rates Volatility. In: G.G. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs, (Eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn., pp. 239-265.
2. Bierwag G.O. (1987) *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
3. Brennan M.J., Schwartz E. (1979) A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, pp. 133-155.
4. Brennan M.J., Schwartz E. (1983) Duration, Bond Pricing and Portfolio Management. In: G.C. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs (Eds.) *Innovations in Bond Portfolio Management*, , JAI Press, Greenwich, Conn.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S. (1979) Duration and the Measurement of Basic Risk. *Journal of Business*, Vol. 52, No. 1, pp. 51-61, January.
6. Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, pp. 385-407.
7. Dahl H. (1993) *A Flexible Approach to Interest Rate Risk Management*. In: Zenios S.A. (Ed.), Financial Optimization. Cambridge University Press, Cambridge.
8. Elton E.J., Gruber M.J., Brown S.J., Goetzmann W.N. (2003) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, 6-th Ed.
9. Fabozzi F.J., Fong G. (1994) *Advanced Fixed Income PortfolioManagement – The State of Art*. Probus Pub. Comp., Chicago.
10. Fabozzi F.J. (1996) *Bond Portfolio Management*. F.J. Fabozzi Associates, New Hope, Penn.
11. Fabozzi F.J. (2006) *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 5-th ed.
12. Fisher L., Weil R.L. (1971) Coping with the Risk of Market Rate Fluctuations - Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business*, Vol. 4, October, pp. 408-431.
13. Garbade K. (1986) *Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, June.
14. Garbade K. (1989) *Polynomial Representations of the Yield Curve and its Modes of Fluctuations*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, No. 53, July.
15. Gątarek D., Bachert P., Maksymiuk R. (2006) The LIBOR Market Model in Practice. J. Wiley & Sons, Chichester.
16. Gibson R., Lhabitant F.,-S., Talay D. (2001) *Modeling The Term Structure of Interest Rates – A Review of the Literature*. RiskLab Research Raport, The Project on Interest Rate Risk Management and Model Risk, Zurich, June.
17. Gichman I.I., Skorochod A.W. (1968): *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa.
18. Harman H.H. (1967) *Modern Factors Analysis*. Chicago University Press, 2-nd ed.

19. Hawawini G.A. (1982) *Bond Duration and Immunization – Early Development and Recent Contributions*. Garland Publishing, New York.

20. Ho T.S.Y. (1990) *Strategic Fixed Income Investments*. Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill.

21. Jajuga K., Jajuga T. (1996) *Inwestycje - instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. PWN, Warszawa.

22. Jakubowski A. (1996) *Modelowanie struktury czasowej stóp procentowych*. IBS PAN, Raport Projektu badawczego KBN, Nr PB 536 /HO2/96/10 - G 37, Warszawa.

23. Jakubowski A. (1997a) *Ryzyko zmian stóp procentowych – zasady tworzenia zimmunizowanych portfeli inwestycyjnych*. IBS PAN, Raport Projektu Badawczego KBN, Nr PB 536/H02/96/10-G37, Warszawa.

24. Jakubowski A. (1997b) *Zagadnienia teorii stóp procentowych*. IBS PAN, Raport Projektu Badawczego KBN, Nr PB 536/H02/96/10-G37, Warszawa.

25. Jakubowski A. (2000) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: M. Krawczak, A. Miklewski, A. Jakubowski, P. Konieczny, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*, Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t. 25, Warszawa, Część II, s. 49-122.

26. Jakubowski (2003): Zarządzanie inwestycjami na rynku obligacji. W: Krawczak M., Jakubowski A. (et. al.), *Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi*, EXIT, Warszawa 2003, Rozdz. VI, s. 269-374.

27. Jakubowski A. (2002) Wycena obligacji katastroficznych w ujęciu teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a Ryzyko*'02. Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 151-177.

28. Jakubowski A. (2004a) *Zarządzanie portfelem obligacji w przypadku proporcjonalnych zmian struktury terminowej stop procentowych*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/41/2004, Warszawa.

29. Jakubowski A. (2004b) *Zagadnienia teorii stóp procentowych a ryzyko inwestycyjne*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/42/2004, Warszawa.

30. Jakubowski A. (2005a) Human Attitude Towards Risk in the Process of Pricing Catastrophe Bonds. In: K.A. Atanassov, J. Kacprzyk, M. Krawczak, E. Szmidt (Eds.) *Issues in the Representation and Processing of Uncertain and Imprecise Information*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa, pp. 153-180.

31. Jakubowski A. (2005b) *Two-Factor Utility Approach to Valuation of Catastrophe Bonds*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/59/2005, Warszawa.

32. Jakubowski A. (2006a) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '05*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 285-303.

33. Jakubowski A. (2006b) *Zagadnienia immunizacji portfela obligacji*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/31/2006, Warszawa.

34. Jakubowski A. (2007): *Czynnikowy model immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko stóp procentowych*. Raport Badawczy IBS PAN, RB/68/2007, Warszawa.

35. Jakubowski A. (2009): *Zagadnienie maksymalizacji parametru czynnikowej wypukłości portfela obligacji*. Systems Research Institute Working Paper, Warszawa (w przygotowaniu).

36. Jakubowski A. (2009): Czynnikowy model zarządzania portfelem obligacji dla różnych sposobów koncentracji strumieni finansowych portfela. Raport Badawczy IBS PAN RB/45/2008, Warszawa 2009.

37. Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003) *Matematyka finansowa – Instrumenty pochodne*. WNT, Warszawa.

38. Jones F.J. (1991) Yield Curve Strategies. *Journal of Fixed Income*, September, pp. 41-43.

39. Kaufman G.C., Bierwag G.O., Toevs A. (Eds.) (1983) *Innovations in Bond Portfolio Management - Duration Analysis and Immunization*. JAI Press, Greenwich, Conn.

40. Klaffky T.E., Ma Y.Y., Nozari A. (1992) Managing Yield Curve Exposure – Introducing Reshaping Durations. *Journal of Fixed Income*, December 1992, pp. 5-15.

41. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000) *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*. Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t.25, Warszawa.

42. Krawczak M., Jakubowski A., Konieczny P., Kulikowski R., Miklewski A., Szkatuła G. (2003) *Aktywne zarządzanie inwestycjami finansowymi*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.

43. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995) *Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce*. Raport IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.

44. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996) *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*. Raport IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.

45. Kulikowski R., Jakubowski A. (1999) Wycena obligacji w warunkach ryzyka niewypłacalności emitenta. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko*'99, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, Cz. 1, s. 187-208.

46. Kulikowski R., Jakubowski A. (2000) Valuation of Catastrophe Bonds. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No. 2, 2000, pp. 181-211.

47. Lipcer R. Sz., Sziriajew A.N. (1981): *Statystyka procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa.

48. Litterman R., Scheinkman J. (1991) Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income Securities*, June, pp. 54-61.

49. Macaulay F.R, (1938) *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. Columbia University Press, National Bureau of Economic Research, New York.

50. Redington F.M. (1952) Review of the Principle of Life Office Valuations. *Journal of The Institute of Actuaries*, Vol. 18, pp. 286-340; (Reprinted in G.A. Hawawini (1982) Bond Duration and Immunization – Early Development and Recent Contributions, Garland Publishing, New York).

51. Sławiński A. (1996) *Krzywa dochodowości*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 62, Warszawa, październik.

52. Sobczyk K. (1996): *Stochastyczne równania różniczkowe*. WNT, Warszawa.

53. Vasicek O.A. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, pp. 177-188.

54. Utkin J. (2005): *Obligacje i ich portfele - wycena, wrażliwość, strategie*. Wyd. SGH, Warszawa.

55. Weron A., Weron R. (1998) *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa.

56. Zaremba L.S. (1995) *Solutions of Immunization Problem in Case of Proportional Spot Rate Shifts*. Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences (IBS PAN), Working Paper WP-3-1995, , Warsaw.

57. Zaremba L.S. (1998) Construction of a k-Immunization Strategy with the Highest Convexity. *Control and Cybernetics*, Vol. 27, No. 1, pp. 135-144.
58. Zaremba L.S., Smoleński W.H. (2000a) How to Find a Bond Portfolio with the Highest Convexity in a Class of Fixed Duration Portfolios. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, pp.279-286.
59. Zaremba L.S., Smoleński W.H. (2000b) Optimal Portfolio Choice under a Liability Constraint. *Annals of Operational Research*, No. 97, pp. 131-141.
60. Zenios S.A., Ed. (1993) *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.