201/2009

Raport Badawczy

Research Report

RB/22/2009

Wpływ wyboru metody wyznaczania oceny grupowej na wynik ekspertyzy

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2009

Wpływ wyboru metody wyznaczania oceny grupowej na wynik ekspertyzy

Powszechnie wiadomo, że przy wyznaczaniu oceny grupowej bądź wyniku głosowania rezultat w istotny sposób zależy od zastosowanej metody. Daje to podstawę do rozważania problemu, na ile otrzymany wynik odzwierciedla opinie ekspertów (wolę wyborców) czy raczej cechy zastosowanej metody agregacji ocen ekspertów.

Jeżeli nie ma narzuconych ograniczeń odnośnie wyboru metody oceny grupowej w praktyce może okazać się, że rozwiązania uzyskane przy użyciu różnych metod są zgodne lub zbliżone albo całkowicie rozbieżne. W pierwszej sytuacji można przyjąć, że ocena grupowa wiernie odzwierciedla opinie ekspertów. W szczególnym przypadku różne metody mogą wskazywać ten sam obiekt jako zwycięzcę. Baharad i Nitzan [1], [2] formułują warunki, jakie powinny być spełnione, aby zapewnić zgodność wyboru najlepszego obiektu wyznaczonego za pomocą różnych metod.

Można również sformułować zadanie wyboru takiej metody wyznaczania oceny grupowej, która zapewni zgodność otrzymanego rozwiązania z założonymi wcześniej warunkami.

Saari [4] przeanalizował zagadnienie wyznaczania dla danego zestawu ocen ekspertów wszystkich możliwych rozwiązań uzyskanych w wyniku zastosowania różnych metod pozycyjnych. W omawianym artykule jest podana szczegółowa analiza przypadku trzech obiektów. W pracy podejście to będzie rozszerzone na przykład czterech obiektów.

1. Podstawowe definicje

1.1. Zadanie wyznaczania oceny grupowej

Zakładamy, że dany jest zbiór n obiektów $O = \{O_1, O_2, ..., O_n\}$ oraz zbiór K ekspertów, których zadaniem jest uporządkowanie tego zbioru zgodnie z przyjętym kryterium (zbiorem kryteriów). Zazwyczaj przyjmuje się, że obiekt uważany za najlepszy - w sensie przyjętego kryterium lub zbioru kryteriów - jest umieszczony na pierwszej pozycji, zaś obiekt uważany za najgorszy zajmuje ostatnią pozycję.

1.2. Metody pozycyjne wyznaczania oceny grupowej

Rozważania zostaną ograniczone do tzw. metod pozycyjnych, to znaczy takich, w których ocena obiektu jest wyznaczana na podstawie jego pozycji w uporządkowaniu. Z reguły przyjmuje się - dla uproszczenia rozważań - że w uporządkowaniach podanych przez ekspertów nie występują obiekty równoważne oraz, że liczba pozycji we wszystkich uporządkowaniach jest taka sama.

Wektor wag (w teorii głosowania nazywany wektor głosowania) ma następującą postać:

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in R_n, \tag{1}$$

przy czym waga w_j – jest to liczba przyporządkowana obiektowi zajmującemu pozycję j w uporządkowaniu. Zazwyczaj przyjmuje się, że $\forall_j\, w_j \geq w_{j+1}$ oraz, że $w_1 > w_n$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Łączna liczba punktów s_i, jakie uzyskuje dany obiekt O_i dana jest zależnością

$$s_i = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \delta_j^{ik} w_j, \qquad \delta_j^{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli obiekt } O_i \text{ zajmuje pozycję } j \\ & \text{w uporządkowaniu podanym przez eksperta } k \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{2}$$

Zwycięzcą zostaje obiekt, dla którego wartość wskaźnika s_i jest największa.

Przyjęcie konkretnej postaci wektora wag prowadzi do określonej metody wyznaczania oceny grupowej, np.:

$\mathbf{w}=(1, 0, \ldots, 0)$ odpowiada metodzie większości

$\mathbf{w} = (\underbrace{1,1,\ldots1}_{m},0,\ldots,0)$ odpowiada głosowaniu na m kandydatów

$\mathbf{w}=(1, 1, \ldots 1, 0)$ odpowiada metodzie antywiększości

$\mathbf{w}=(n-1, \ldots, n-j, \ldots, 1, 0)$ odpowiada metodzie Bordy.

Ogólnie wektor głosowania można przedstawić jako kombinację wypukłą wektorów głosowania typu „głosuj na m kandydatów”

(1, 0, ..., 0), (1, 1, 0, ..., 0), ..., (1, 1, 1, ..., 1, 0), m=1, ..., n-1.

Aby zilustrować prowadzone rozważania rozpatrzymy przykład podany w pracy [6].

Przykład 1

Przyjmiemy, że jedenastu ekspertów podało następujące uporządkowania zbioru trzech obiektów (O_1, O_2, O_3):

liczba ekspertów	3	2	2	4
uporządkowanie	$O_1 \succ O_2 \succ O_3$	$O_1 \succ O_3 \succ O_2$	$O_2 \succ O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_2 \succ O_1$

Zastosowanie trzech wybranych metod pozycyjnych prowadzi do następujących wyników:

metoda / wektor wag	liczba punktów			uporządkowanie	zwycięzca
	O_1	O_2	O_3		
większości (1, 0, 0)	5	2	4	$O_1 \succ O_3 \succ O_2$	O_1
antywiększości (1, 1, 0)	5	9	8	$O_2 \succ O_3 \succ O_1$	O_2
Bordy (2, 1, 0)	10	11	12	$O_3 \succ O_2 \succ O_1$	O_3

Przykład ten pokazuje, że nawet w tak prostym przypadku każdy obiekt może zostać zwycięzcą pod warunkiem zastosowania odpowiedniej metody głosowania.

W swoich pracach (m.in. [4], [5], [6], [7]) Saari przeanalizował to zagadnienie szczegółowo, dochodząc do interesujących wniosków sformułowanych w postaci twierdzeń.

1.3. Definicja profilu

Saari zaproponował, aby oceny podawane przez ekspertów opisywać za pomocą tzw. profilu. Profil jest to pełna lista uporządkowań obiektów podanych przez ekspertów. Określenie profilu wymaga uwzględnienia wszystkich uporządkowań rozpatrywanych obiektów. W rozważanym przypadku, to znaczy przy założeniu, że w uporządkowaniach nie występują obiekty równoważne, liczba wszystkich możliwych uporządkowań n obiektów wynosi n!. Liczby uporządkowań n obiektów z równoważnościami podano w pracy [3].

Załóżmy, że p_ℓ oznacza liczbę ekspertów, których opinia ma postać uporządkowania P^ℓ, ($\ell=1,...n!$). Jeżeli liczba ekspertów, których opinie bierzemy pod uwagę jest równa K, to

$$\sum_{\ell=1}^{n!} p_\ell = K. \tag{3}$$

Profilem **p** będziemy nazywać wektor o n! składowych p_ℓ.

2. Podejście geometryczne Saariego

W metodach pozycyjnych stosuje się tzw. znormalizowane wektory wag, to znaczy takie, których suma składowych wynosi 1. Oczywiście nie wszystkie wektory wag spełniają ten warunek. Na przykład dla czterech obiektów wektor wag odpowiadający metodzie Bordy ma

postać $\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$. (4)

Saari [5] wykazał, że obowiązuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli dwa wektory głosowania są powiązane zależnością liniową (a, b skalarne, a, b>0)

$\mathbf{w}^2=a\mathbf{w}^1+b(1, 1, ..., 1, 0)$, (5)

wówczas oceny grupowe (uporządkowania) uzyskane przy użyciu tych wektorów są takie same.

Mamy zatem

$$w_i^2 = aw_i^1 + b,\ i=1, \ldots, n-1;\ w_n^2 = 0;\ w_n^1 = 0 \text{ oraz } \sum_{i=1}^{n-1} w_i^1 = 1. \tag{6}$$

Można wykazać, że

$$w_{n-1}^1 = \frac{W_{n-1} - b}{W - b(n-1)},\ \mathbf{w}^1 = \frac{(\mathbf{w}^2 - b)}{W - b(n-1)} \tag{7}$$

oraz

$$\frac{W_i}{W - b(n-1)} + w_{i+1}^1 = w_i^1. \tag{8}$$

Wykorzystując wzór (8) możemy – przyjmując określoną wartość współczynnika b – wyznaczyć kolejne wartości w_i^1.

Przykład 2.

Załóżmy, że n=4 oraz, że wektor wag ma postać $\mathbf{w}^2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$ (metoda Bordy). Wykorzystując wzór (6) oraz przyjmując $b = \frac{1}{8}$ otrzymujemy $\mathbf{w}^1 = \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)$. (9)

W przykładzie 3 pokazano, że ocena grupowa dla uporządkowań z przykładu 1 wyznaczona za pomocą metody Bordy przy użyciu wektorów $\mathbf{w}^2$ oraz $\mathbf{w}^1$ jest taka sama.

Twierdzenie 1 upoważnia do przyjęcia znormalizowanej postaci wektora wag (gdzie $w_n=0$ oraz $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$) oraz do wprowadzenia przestrzeni znormalizowanych wektorów wag będącej w przypadku n obiektów częścią (n-2) wymiarowego sympleksu danego zależnością [4]

$$\mathscr{W}^n = \left\{ \mathbf{w}^n \middle| w_i \geq w_{i+1}, i = 1, \ldots n-1, w_n = 0, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}. \tag{10}$$

Istotną rolę w podejściu Saariego odgrywają wektory głosowania na s kandydatów $\mathbf{E}_s^n$ przedstawione w postaci znormalizowanej

$$\mathbf{E}_s^n = \left(\underbrace{\frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}}_{\text{s razy}}, 0, \ldots, 0 \right), \qquad s = 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Są one wierzchołkami sympleksu $\mathscr{W}^n$. Wektory $\{\mathbf{E}_s^n\}_{s=1}^{n-1}$ tworzą bazę wypukłą dla wypukłego zbioru $\mathscr{W}^n$, tak więc każdy wektor głosowania $\mathbf{w}^n \in \mathscr{W}^n$ ma jednoznaczną reprezentację wypukłą

$$\mathbf{w}^n = \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s \mathbf{E}_s^n, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s = 1. \tag{12}$$

Wektory wypukłych wag w sympleksie (n-2)-wymiarowym

$$\Lambda^n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \middle| \lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s = 1 \right\} \tag{13}$$

są jednoznacznie powiązane z wektorami głosowania ze zbioru $\mathscr{W}^n$.

Twierdzenie 2 [4].

Znormalizowany wynik głosowania $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}^n)$ jest wyznaczany na podstawie zależności

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{w}^n) = \sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_s^n). \tag{14}$$

2.1. Przykład postępowania

Założymy, że w ekspertyzie uczestniczy 17 ekspertów, których zadaniem jest uporządkowanie zbioru czterech obiektów. Przyjmujemy, że uporządkowania podane przez ekspertów można podzielić na cztery grupy: P^1, P^2, P^3, P^4, przy czym

5 ekspertów podało uporządkowanie P^1: $O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$

2 ekspertów podało uporządkowanie P^2: $O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4$

4 ekspertów podało uporządkowanie $P^3: O_3 \succ O_1 \succ O_4 \succ O_2$

oraz 6 ekspertów podało uporządkowanie $P^4: O_1 \succ O_4 \succ O_2 \succ O_3$.

W rozpatrywanym przypadku na 4! =24 składowe profilu **p** tylko cztery są różne od zera. Zgodnie z metodologią podaną przez Saariego analizując profil p utworzony przez uporządkowania $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ czterech obiektów należy rozpatrzyć (4–1) = 3 wektory $\mathbf{E}_s^4$:

$$\mathbf{E}_1^4 = (1, 0, 0, 0),\ \mathbf{E}_2^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right),\ \mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right). \tag{15}$$

Dla uproszczenia stosujemy zapis $\mathbf{p} = \left(\begin{array}{cccc} P^1 & P^2 & P^3 & P^4 \\ \frac{5}{17}, & \frac{2}{17}, & \frac{4}{17}, & \frac{6}{17} \end{array}\right)$ uwzględniający tylko niezerowe składowe profilu **p**.

Następnie należy utworzyć trzy funkcje $f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_s^4)$, s=1, 2, 3 określające wynik głosowania otrzymany przy użyciu danego wektora wag (czyli konkretnej metody pozycyjnej) do uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$.

Zasada tworzenia wyrażeń $f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_s^4)$ jest następująca.

Dla każdego uporządkowania P^ℓ, ℓ=1,.., 4, składowe wektora $\mathbf{E}_s^4$ zależą od kolejności obiektów w uporządkowaniu. Dla $\mathbf{E}_s^4$, s=1, 2, 3, ułamek $\frac{1}{s}$ występuje na pozycjach odpowiadających obiektom zajmującym pierwszych s miejsc w uporządkowaniu.

Dla $\mathbf{E}_1^4$ jedynka występuje na pozycji odpowiadającej obiektowi zajmującemu pierwsze miejsce w uporządkowaniu. Mamy więc dla

P^1 - $\mathbf{E}_1^4$ = (1, 0, 0, 0),

P^2 - $\mathbf{E}_1^4$ =(0, 1, 0, 0),

P^3 - $\mathbf{E}_1^4$ =(0, 0, 1, 0)

P^4 - $\mathbf{E}_1^4$ = (1, 0, 0, 0).

Zatem dla $\mathbf{E}_1^4$ mamy

$$f(\mathbf{p},\mathbf{E}_1^4)=\frac{5}{17}\left(\underbrace{\overbrace{1,0,0,0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^1}\right)+\frac{2}{17}\left(\underbrace{\overbrace{0,1,0,0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^2}\right)+\frac{4}{17}\left(\underbrace{\overbrace{0,0,1,0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^3}\right)+\frac{6}{17}\left(\underbrace{\overbrace{1,0,0,0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^4}\right)=\left(\overset{O_1}{\frac{11}{17}},\overset{O_2}{\frac{2}{17}},\overset{O_3}{\frac{4}{17}},\overset{O_4}{0}\right) \tag{16}$$

czyli uporządkowanie obiektów otrzymane przy użyciu wektora wag $\mathbf{E}_1^4$ ma postać $O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$. (17)

Dla $\mathbf{E}_2^4$ ułamek $\frac{1}{2}$ występuje na pozycjach odpowiadających obiektom zajmującym pierwsze dwa miejsca w uporządkowaniu.

Dla P^1 mamy $\mathbf{E}_2^4=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$,

dla P^2 $\mathbf{E}_2^4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)$,

dla P^3 $\mathbf{E}_2^4=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$ oraz

dla P^4 $\mathbf{E}_2^4=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$.

Zatem dla $\mathbf{E}_2^4$ mamy

$$f(\mathbf{p},\mathbf{E}_2^4)=\frac{5}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^1}\right)+\frac{2}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^2}\right)+\frac{4}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^3}\right)+\frac{6}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^4}\right)=\left(\frac{5+2+4+6}{34},\frac{2}{34},\frac{5+4}{34},\frac{6}{34}\right)=\left(\overset{O_1}{\frac{17}{34}},\overset{O_2}{\frac{2}{34}},\overset{O_3}{\frac{9}{34}},\overset{O_4}{\frac{6}{34}}\right) \tag{18}$$

czyli uporządkowanie obiektów otrzymane przy użyciu wektora wag $\mathbf{E}_2^4$ ma postać $O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$. (19)

Dla $\mathbf{E}_3^4$ ułamek $\frac{1}{3}$ występuje na pozycjach odpowiadających obiektom zajmującym pierwsze trzy miejsca w uporządkowaniu. Mamy więc dla

P^1 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

P^2 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,

P^3 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

P^4 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

Zatem dla $\mathbf{E}_3^4$ mamy

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_3^4) = \frac{5}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^1}\right) + \frac{2}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^2}\right) + \frac{4}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^3}\right) + \frac{6}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^4}\right)$$

$$= \left(\frac{5+2+4+6}{51}, \frac{2+6}{51}, \frac{5+2+4}{51}, \frac{5+4+6}{51}\right) = \left(\begin{array}{cccc} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ \frac{17}{51}, & \frac{8}{51}, & \frac{11}{51}, & \frac{15}{51} \end{array}\right) \tag{20}$$

czyli uporządkowanie obiektów otrzymane przy użyciu wektora wag $\mathbf{E}_3^4$ ma postać $O_1 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_2$. (21)

Aby w rozpatrywanym przykładzie wyznaczyć zbiór wszystkich możliwych uporządkowań uzyskanych przy użyciu różnych metod pozycyjnych należy - zgodnie z metodologią podaną przez Saariego - wyznaczyć funkcję $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$, gdzie wektor wag $\mathbf{w}_\lambda^4$ ma postać

$$\mathbf{w}_\lambda^4 = \lambda_1 \mathbf{E}_1^4 + \lambda_2 \mathbf{E}_2^4 + \lambda_3 \mathbf{E}_3^4 \tag{22}$$

przy czym $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, (23)

czyli $\lambda_3 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)$, (24)

skąd $\mathbf{w}_\lambda^4 = \lambda_1 \mathbf{E}_1^4 + \lambda_2 \mathrm{E}_2^4 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{E}_3^4$. (25)

Na podstawie (20), (24) mamy

$$\mathbf{w}_\lambda^4 = \lambda_1 (\overset{j=1,}{1}, \overset{2,}{0}, \overset{3,}{0}, \overset{4}{0}) + \lambda_2 (\overset{j=1,}{1/2}, \overset{2,}{1/2}, \overset{3,}{0}, \overset{4}{0}) + (1-\lambda_1-\lambda_2)(\overset{j=1,}{1/3}, \overset{2,}{1/3}, \overset{3,}{1/3}, \overset{4}{0})$$

$$= \left(\overbrace{\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{3}(1-\lambda_1-\lambda_2)}^{j=1}, \overbrace{0 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{3}(1-\lambda_1-\lambda_2)}^{j=2}, \overbrace{\frac{1}{3}(1-\lambda_1-\lambda_2)}^{j=3}, \overbrace{0}^{j=4} \right)$$

$$= \left(\overbrace{\frac{6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=1}, \overbrace{\frac{3\lambda_2 + 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=2}, \overbrace{\frac{2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=3}, \overbrace{0}^{j=4} \right)$$

$$= \left(\overbrace{\frac{2 + 4\lambda_1 + \lambda_2}{6}}^{j=1}, \overbrace{\frac{2 + \lambda_2 - 2\lambda_1}{6}}^{j=2}, \overbrace{\frac{2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=3}, \overbrace{0}^{j=4} \right) = (w_1^4, w_2^4, w_3^4, w_4^4) \tag{26}$$

Zapis ten pokazuje, jakie wagi są przyporządkowywane obiektom zajmującym poszczególne pozycje j=1, 2, 3, 4. Zatem, mając składowe wektora $\mathbf{w}_\lambda^4$ należy wyznaczyć $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$.

Biorąc pod uwagę postać uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4) = & \frac{5}{17}\underbrace{\left(w_1^4, w_4^4, w_2^4, w_3^4\right)}_{P^1} + \frac{2}{17}\underbrace{\left(w_2^4, w_1^4, w_3^4, w_4^4\right)}_{P^2} + \\ & \frac{4}{17}\underbrace{\left(w_2^4, w_4^4, w_1^4, w_3^4\right)}_{P^3} + \frac{6}{17}\underbrace{\left(w_1^4, w_2^4, w_4^4, w_3^4\right)}_{P^4} \end{aligned}, \tag{27}$$

gdzie składowe wektora $\mathbf{w}_\lambda^4$ dane są wzorem (26).

Składowe wektorowego wyrażenia $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$ są, jak następuje:

dla O_1: $$\frac{10 + 5\lambda_2 + 20\lambda_1 + 4 + 2\lambda_2 - 4\lambda_1 + 8 + 4\lambda_2 - 8\lambda_1 + 12 + 6\lambda_2 + 24\lambda_1}{102} = \frac{34 + 17\lambda_2 + 32\lambda_1}{102} \tag{28}$$

dla O_2: $$\frac{4 + 2\lambda_2 + 8\lambda_1 + 12 - 12\lambda_1 - 12\lambda_2}{102} = \frac{16 - 10\lambda_2 - 4\lambda_1}{102} \tag{29}$$

dla O_3: $$\frac{10 + 5\lambda_2 - 10\lambda_1 + 4 - 4\lambda_2 - 4\lambda_1 + 8 + 4\lambda_2 + 16\lambda_1}{102} = \frac{22 + 5\lambda_2 + 2\lambda_1}{102} \tag{30}$$

dla O_4: $$\frac{10 - 10\lambda_2 - 10\lambda_1 + 8 - 8\lambda_2 - 8\lambda_1 + 12 + 6\lambda_2 - 12\lambda_1}{102} = \frac{30 - 30\lambda_1 - 12\lambda_2}{102} \tag{31}$$

Wyrażenie $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$ można też określić w inny sposób. Wiadomo, że [4]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4) &= f(\mathbf{p}, \lambda_1 \mathbf{E}_1^4 + \lambda_2 \mathbf{E}_2^4 + \lambda_3 \mathbf{E}_3^4) \\ &= \lambda_1 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_1^4) + \lambda_2 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2^4) + \lambda_3 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_3^4) \end{aligned} \tag{32}$$

Biorąc pod uwagę, że wyrażenie $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$ jest liniowe oraz uwzględniając (20) i (23) mamy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4) &= \lambda_1 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_1^4) + \lambda_2 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2^4) + \lambda_3 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_3^4) \\ &= \lambda_1 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_1^4) + \lambda_2 f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2^4) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_3^4) \end{aligned} \tag{33}$$

Uwzględniając postacie wyrażeń $f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_1^4)$ (16), $f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2^4)$ (18), $f(\mathbf{p}, \mathbf{E}_3^4)$ (20) mamy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4) &= \lambda_1 \left(\frac{11}{17}, \frac{2}{17}, \frac{4}{17}, 0 \right) + \lambda_2 \left(\frac{17}{34}, \frac{2}{34}, \frac{9}{34}, \frac{6}{34} \right) \\ &+ (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{17}{51}, \frac{8}{51}, \frac{11}{51}, \frac{15}{51} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

Poszczególne składowe wektora $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$, mają więc postać, dla:

$$O_1: \frac{11}{17}\lambda_1 + \frac{17}{34}\lambda_2 + \frac{17}{51}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) = \frac{66\lambda_1 + 51\lambda_2 + 34 - 34\lambda_1 - 34\lambda_2}{102} = \frac{34 + 32\lambda_1 + 17\lambda_2}{102} \tag{35}$$

$$O_2: \frac{2}{17}\lambda_1 + \frac{2}{34}\lambda_2 + \frac{8}{51}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) = \frac{12\lambda_1 + 6\lambda_2 + 16 - 16\lambda_1 - 16\lambda_2}{102} = \frac{16 - 4\lambda_1 - 10\lambda_2}{102} \tag{36}$$

$$O_3: \frac{4}{17}\lambda_1 + \frac{9}{34}\lambda_2 + \frac{11}{51}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) = \frac{24\lambda_1 + 27\lambda_2 + 22 - 22\lambda_1 - 22\lambda_2}{102} = \frac{22 + 2\lambda_1 + 5\lambda_2}{102} \tag{37}$$

$$O_4: 0 \cdot \lambda_1 + \frac{6}{34}\lambda_2 + \frac{15}{51}(1 - \lambda_1 - \lambda_2) = \frac{18\lambda_2 + 30 - 30\lambda_1 - 30\lambda_2}{102} = \frac{30 - 30\lambda_1 - 12\lambda_2}{102} \tag{38}$$

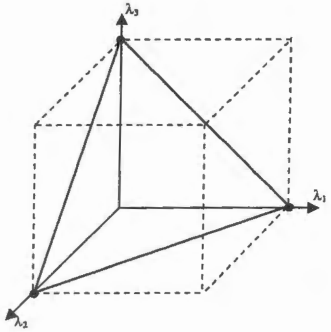
Otrzymany wynik pokrywa się z (28)÷(31). Można zatem – w zależności od postaci zadania – stosować jedno z dwu przedstawionych podejść.

Jeżeli współczynniki λ_i spełniają warunek $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$ to wartości tych współczynników muszą należeć obszaru wyznaczonego przez wierzchołki (1, 0, 0), (0, 1, 0) (0, 0, 1) (rys. 1).

Jeżeli $\lambda_3 = 0$, to $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, czyli $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. (39)

Jeżeli $\lambda_2 = 0$, to $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$, czyli $\lambda_3 = 1 - \lambda_1$. (40)

Jeżeli $\lambda_1 = 0$, to $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$, czyli $\lambda_3 = 1 - \lambda_2$. (41)



Rys. 1. Obszar dopuszczalnych wartości λ_i, i=1, 2, 3.

W celu ustalenia, jakiego typu uporządkowania można uzyskać jako ocenę grupową dla danego profilu **p** za pomocą różnych metod pozycyjnych, należy przebadać wpływ zmienności parametrów λ_1 i λ_2 na wartość składowych wektora $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$.

1. Warunek $O_1 \succ O_2$ oznacza, że $34+32\lambda_1+17\lambda_2 > 16-4\lambda_1-10\lambda_2$ (42)

   czyli $18 > -36\lambda_1 - 10\lambda_2$. (43)

   Ponieważ $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$ warunek ten jest zawsze spełniony.

2. Warunek $O_2 \succ O_3$ oznacza, że $16-4\lambda_1-10\lambda_2 > 22+2\lambda_1+5\lambda_2$ (44)

   czyli $-6\lambda_1 - 15\lambda_2 > 6$. (45)

   Warunek ten nie może być spełniony, ponieważ $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$.

3. Warunek $O_3 \succ O_4$ oznacza, że $22+2\lambda_1+5\lambda_2 > 30-30\lambda_1-12\lambda_2$ (46)

   czyli $4\lambda_1 + \frac{17}{8}\lambda_2 > 1$. (47)

   Dla $\lambda_1 = 0$ mamy $\lambda_2 > \frac{8}{17}$, dla $\lambda_1 = 1$ mamy $4 + \frac{17}{8}\lambda_2 > 1$. (48)

   Warunek ten jest zawsze spełniony, ponieważ $\lambda_2 \geq 0$.

4. Warunek $O_4 \succ O_3$ oznacza, że $30-30\lambda_1-12\lambda_2 > 22+2\lambda_1+5\lambda_2$ (49)

czyli $1 > 4\lambda_1 + \frac{17}{8}\lambda_2$. (50)

Dla $\lambda_2 = 0$ mamy $\lambda_1 < \frac{1}{4}$, dla $\lambda_1 = 0$ mamy $\lambda_2 < \frac{8}{17}$. (51)

5. Warunek $O_3 \approx O_4$

Z porównania war. 3 i 4 wynika, że równoważność obiektów O_3 i O_4 otrzymujemy wtedy, gdy spełniona jest równość $\lambda_2 = \frac{8}{17} - \frac{32}{17}\lambda_1$. (52)

6. Warunek $O_2 \succ O_4$ oznacza, że $16-4\lambda_1-10\lambda_2 > 30-30\lambda_1-12\lambda_2$ (53)

$26\lambda_1 + 2\lambda_2 > 14$ czyli $\lambda_2 > 7-13\lambda_1$. (54)

Jeżeli $\lambda_2 = 0$, to $\lambda_1 > \frac{7}{13}$. (55)

7. Warunek $O_4 \succ O_2$ oznacza, że $30-30\lambda_1-12\lambda_2 > 16-4\lambda_1-10\lambda_2$ (56)

czyli $\lambda_2 < 7-13\lambda_1$. (57)

Jeżeli $\lambda_2 = 0$, to $\lambda_1 < \frac{7}{13}$. (58)

8. Warunek $O_2 \approx O_4$

Z porównania war. 6 i 7 wynika, że równoważność obiektów O_2 i O_4 otrzymujemy wtedy, gdy spełniona jest równość $\lambda_2 = 7-13\lambda_1$. (59)

Biorąc pod uwagę, że $0 \le \lambda_1 \le 1$, $0 \le \lambda_2 \le 1$ oraz $\lambda_1 + \lambda_2 \le 1$ można wyznaczyć dla różnych parametrów λ_1 i λ_2 wartości składowych wektora $f(p, w_\lambda^4)$ odpowiadających poszczególnym obiektom. Znając wartości tych składowych można określić uporządkowanie obiektów $O_1, \ldots, O_4$ odpowiadające przyjętym wartościom λ_1 i λ_2. W Tablicy 1 podano przykładowe wartości λ_1 i λ_2 oraz odpowiadające im wartości składowych dla poszczególnych wektorów, jak również wyznaczone uporządkowania.

Tablica 1.

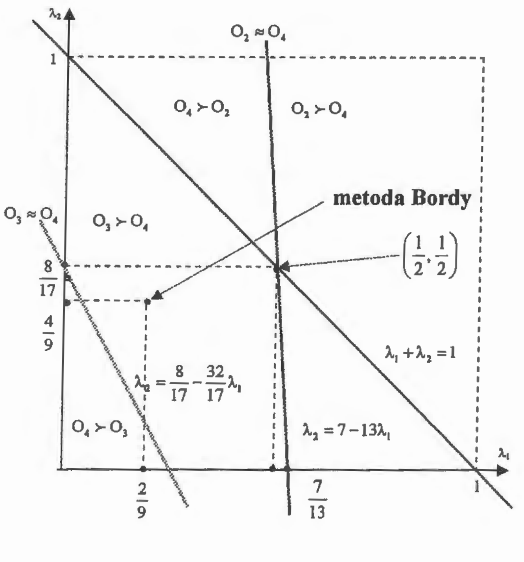
Zależność uporządkowania wynikowego od wartości parametrów λ_1 i λ_2

Obiekt		O_1	O_2	O_3	O_4	Uporządkowanie
Składowa wektora $f(p, w_\lambda^4)$		$\frac{34+32\lambda_1+17\lambda_2}{102}$	$\frac{16-10\lambda_2-4\lambda_1}{102}$	$\frac{22+5\lambda_2+2\lambda_1}{102}$	$\frac{30-30\lambda_1-12\lambda_2}{102}$	
$\lambda_1=0$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{34}{102}$	$\frac{16}{102}$	$\frac{22}{102}$	$\frac{30}{102}$	$O_1 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_2$
	1	$\frac{51}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{27}{102}$	$\frac{18}{102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$
$\lambda_1=\frac{1}{4}$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{84}{2\cdot 102}$	$\frac{30}{2\cdot 102}$	$\frac{45}{2\cdot 102}$	$\frac{45}{2\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \approx O_4 \succ O_2$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{219}{4\cdot 102}$	$\frac{54}{4\cdot 102}$	$\frac{105}{4\cdot 102}$	$\frac{54}{4\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \approx O_2$
$\lambda_1=\frac{5}{11}$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{534}{11\cdot 102}$	$\frac{156}{11\cdot 102}$	$\frac{252}{11\cdot 102}$	$\frac{180}{11\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$
	$\frac{6}{11}$	$\frac{636}{11\cdot 102}$	$\frac{96}{11\cdot 102}$	$\frac{282}{11\cdot 102}$	$\frac{108}{11\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$
$\lambda_1=\frac{6}{13}$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{634}{13\cdot 102}$	$\frac{184}{13\cdot 102}$	$\frac{298}{13\cdot 102}$	$\frac{210}{13\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$
	$\frac{7}{13}$	$\frac{753}{13\cdot 102}$	$\frac{114}{13\cdot 102}$	$\frac{327}{13\cdot 102}$	$\frac{126}{13\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$
$\lambda_1=\frac{7}{13}$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{666}{13\cdot 102}$	$\frac{180}{13\cdot 102}$	$\frac{300}{13\cdot 102}$	$\frac{180}{13\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \approx O_2$
	$\frac{6}{13}$	$\frac{768}{13\cdot 102}$	$\frac{120}{13\cdot 102}$	$\frac{330}{13\cdot 102}$	$\frac{108}{13\cdot 102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$

$\lambda_1=\frac{6}{11}$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{566}{11\cdot102}$	$\frac{152}{11\cdot102}$	$\frac{254}{11\cdot102}$	$\frac{150}{11\cdot102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$
	$\frac{5}{11}$	$\frac{651}{11\cdot102}$	$\frac{102}{11\cdot102}$	$\frac{279}{11\cdot102}$	$\frac{90}{11\cdot102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$
$\lambda_1=3/4$						
$\lambda_2=$	0	$\frac{232}{4\cdot102}$	$\frac{52}{4\cdot102}$	$\frac{94}{4\cdot102}$	$\frac{30}{4\cdot102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{249}{4\cdot102}$	$\frac{42}{4\cdot102}$	$\frac{99}{4\cdot102}$	$\frac{18}{4\cdot102}$	$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4$

Warunki 5 oraz 8 podają zależności, które muszą być spełnione, aby miała miejsce równoważność obiektów O_3 i O_4 oraz obiektów O_2 i O_4. Proste wyznaczające te zależności przedstawiono na rysunku 2.

Z warunków 1, 2 i 3 wynika, że bez względu na wartości parametrów λ_1 i λ_2 zawsze jest spełniona zależność $O_1 \succ O_2$, $O_1 \succ O_3$, $O_1 \succ O_4$. Na rysunku 2 wskazano obszary, dla których $O_2 \succ O_4$ oraz $O_4 \succ O_2$ a także $O_3 \succ O_4$ i $O_4 \succ O_3$.



Rys. 2. Obszary odpowiadające poszczególnym uporządkowaniom

Przykład 3.

Jeżeli do uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ zastosujemy metodę Bordy, to wskaźniki Bordy dla poszczególnych obiektów będą, jak następuje:

$$WB_1 = 3\cdot 11+2\cdot 6+1\cdot 0 = 45 \tag{60}$$

$$WB_2 = 3\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 6 = 12 \tag{61}$$

$$WB_3 = 3\cdot 4+2\cdot 5+1\cdot 2 = 24 \tag{62}$$

$$WB_4 = 3\cdot 0+2\cdot 6+1\cdot 9 = 21. \tag{63}$$

Zatem dla uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ ocena grupowa według metody Bordy ma postać $O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$. (64)

Aby wyznaczyć wartości parametrów λ_1 i λ_2 odpowiadających metodzie Bordy, należy zauważyć, że wektor $\mathbf{w}_\lambda^4$ ma postać (4) $\mathbf{w}^{B4}=\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

W przykładzie 2 pokazano, że znormalizowany wektor Bordy może mieć postać (9) $\overline{\mathbf{w}}^{B4}=\left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)$. Stosując opisane podejście do wektora $\overline{\mathbf{w}}^{B4}$ oraz rozpatrywanych uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ otrzymamy

$$f(\mathbf{p},\overline{\mathbf{w}}^{B4}) = \frac{5}{17}\left(\frac{5}{9}, 0, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}\right)+\frac{2}{17}\left(\frac{3}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)+\frac{4}{17}\left(\frac{3}{9}, 0, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}\right)+\frac{6}{17}\left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 0, \frac{3}{9}\right) \tag{65}$$

Składowe tego wektora są, jak następuje

$$(i=1)\ \frac{5}{17}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{17}\cdot\frac{3}{9}+\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{9}+\frac{6}{17}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25+6+12+30}{153}=\frac{73}{153} \tag{66}$$

$$(i=2)\ \frac{5}{17}\cdot 0+\frac{2}{17}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{17}\cdot 0+\frac{6}{17}\cdot\frac{1}{9}=\frac{10+6}{153}=\frac{16}{153} \tag{67}$$

$$(i=3)\ \frac{5}{17}\cdot\frac{3}{9}+\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{17}\cdot\frac{5}{9}+\frac{6}{17}\cdot 0=\frac{15+2+20}{153}=\frac{37}{153} \tag{68}$$

$$(i=4)\ \frac{5}{17}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{17}\cdot 0+\frac{4}{17}\cdot\frac{1}{9}+\frac{6}{17}\cdot\frac{3}{9}=\frac{5+4+18}{153}=\frac{27}{153}. \tag{69}$$

Zatem uporządkowanie wyznaczone przez $f(\mathbf{p}, \overline{\mathbf{w}}^{B4})$ ma postać

$$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2. \qquad (70)$$

Załóżmy, że wektor $\overline{\mathbf{w}}^{B4}$ zapiszemy jako sumę wektorów $\mathbf{E}_1^4, \mathbf{E}_2^4, \mathbf{E}_3^4$. Mamy

$$\left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, 0\right) = \lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + \lambda_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right). \qquad (71)$$

Uwzględniając $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, łatwo wykazać, że $\lambda_1 = \frac{2}{9}, \lambda_2 = \frac{4}{9}, \lambda_3 = \frac{3}{9}$.

Na rysunku 2 zaznaczono punkt odpowiadający tym wartościom λ_1 i λ_2. Dla tego punktu mamy $O_3 \succ O_4$ oraz $O_4 \succ O_2$.

Zatem biorąc pod uwagę, że $\forall \lambda_1, \lambda_2$ mamy $O_1 \succ O_3$ można stwierdzić, że $O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$. Wynik ten jest zgodny z uzyskanym poprzednio.

3. Uwagi końcowe

Przedstawione przez Saariego geometryczne podejście do pozycyjnych metod wyznaczania oceny grupowej stwarza możliwości wyjaśnienia różnic w ocenach uzyskanych w wyniku zastosowania różnych metod oraz wytłumaczenia występujących paradoksów. Podejście to pozwala również na uwzględnienie możliwości występowania obiektów równoważnych zarówno w ocenach ekspertów, jak i w ocenie grupowej. Umożliwia ono próbę odpowiedzi na pytanie, na ile uzyskane za pomocą różnych metod wyniki odzwierciedlają opinie ekspertów a w jakim stopniu zależą od zastosowanej metody.

W pracy przeanalizowano przypadek czterech obiektów oraz podano jego interpretację geometryczną.

Literatura

[1] Baharad E., Nitzan S., The Borda rule, Condorcet consistency and Condorcet stability, Economic Theory, 22, 2003

[2] Baharad E., Nitzan S., On the selection of the same winner by all scoring rules, Social Choice and Welfare, 26, 2006

[3] Bury H., Wagner D., Group Judgement With Ties. Distance-Based Methods. In: Aschemann H. (Ed.): New Approaches in Automation and Robotics. I-Tech Education and Publishing, Vienna,Austria, 2008

[4] Saari D. G., Millions of election outcomes from a single profile, Social Choice and Welfare, 9, 1992

[5] Saari D. G., Basic geometry of voting, Springer Verlag, Heidelberg, 1995,

[6] Saari D. G., Mathematics and Voting, Notices of the AMS, vol.55, no 4, 2008a

[7] Saari D. G., Complexity and the geometry of voting, Mathematical and Computer Modelling, 48, 2008b