

361/2008

**Raport Badawczy**

**RB/45/2008**

**Research Report**

**Czynnikowy model zarządzania  
portfelem obligacji dla różnych  
sposobów koncentracji  
strumieni finansowych portfela**

**A. Jakubowski**

**Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute  
Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:  
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2008

Andrzej Jakubowski

## CZYNNIKOWY MODEL ZARZĄDZANIA PORTFELEM OBLIGACJI DLA RÓŻNYCH SPOSOBÓW KONCENTRACJI STRUMIENI FINANSOWYCH PORTFELA \*

### *Streszczenie*

W pracy przedstawiono analizę wpływu sposobu konstrukcji portfela obligacji na efektywność aktywnego i semi-aktywnego (immunizacja) zarządzania tym portfelem na analizowanym rynku instrumentów dłużnych. Sformułowane zostały trzy sposoby koncentracji strumieni finansowych portfela i wiążące się z tym trzy strategie aktywnego zarządzania inwestycjami w obligacje: strategia "sztangi" (*barbell*), strategia "pocisku" (*bullet*) oraz strategia "drabiny" (*ladder*). W przypadku pierwszej strategii - strumienie finansowe portfela są skoncentrowane na najkrótszym i najdłuższym terminie analizowanego horyzontu czasowego. Druga strategia charakteryzuje się koncentracją wszystkich strumieni finansowych w jednym punkcie na osi czasu. Natomiast trzecia strategia dotyczy równomiernego rozłożenia strumieni finansowych rozpatrywanego portfela obligacji.

Uzyskane w powyższym kontekście wyniki dotyczyły zastosowania metodologii analizy czynnikowej dla konstrukcji modelu zarządzania portfelem obligacji uwzględniającego zarówno immunizację portfela ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian stóp procentowych jak i maksymalizację stopy zwrotu z portfela (zarządzanie aktywne). Rozważane podejście było kontynuacją wcześniejszych badań prowadzonych w tym zakresie w USA (K. Garbade, 1986, 1989; R. Litterman, J. Scheinkman, 1991) i w Danii (H. Dahl, 1993). W szczególności, dotyczyło to merytorycznego uzasadnienia zasadniczych koncepcji oraz formalnego wyprowadzenia podstawowych wzorów prezentowanych (bez dowodów) w tych pracach. A także, interpretacji tych zależności na gruncie metodologii nowoczesnej analizy stochastycznej.

Prowadzone rozważania zilustrowano wynikami obliczeń numerycznych, dotyczących zastosowania modelu czynnikowego do analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych – na rynku finansowym w Polsce.

---

\* Niniejsza praca zostanie zgłoszona do publikacji w czasopiśmie naukowym: *Materiały i Studia NBP*.



## Wprowadzenie

Przedmiotem prowadzonych rozważań będzie analiza wpływu sposobu konstrukcji portfela obligacji na efektywność aktywnego i semi-aktywnego (immunizacja) zarządzania tym portfelem na analizowanym rynku instrumentów dłużnych. Sformułowane zostaną trzy sposoby koncentracji strumieni finansowych portfela i wiążące się z tym trzy strategie aktywnego zarządzania inwestycjami w obligacje: strategia "sztangi" (*barbell*), strategia "pocisku" (*bullet*) oraz strategia "drabiny" (*ladder*). W przypadku pierwszej strategii - strumienie finansowe portfela są skoncentrowane na najkrótszym i najdłuższym terminie analizowanego horyzontu czasowego. Druga strategia charakteryzuje się koncentracją wszystkich strumieni finansowych w jednym punkcie na osi czasu. Natomiast trzecia strategia dotyczy równomiernego rozłożenia strumieni finansowych rozpatrywanego portfela obligacji. Prezentowane wyniki dotyczyć będą zastosowania metodologii analizy czynnikowej dla konstrukcji modelu zarządzania portfelem obligacji uwzględniającego zarówno immunizację portfela ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian stóp procentowych jak i maksymalizację stopy zwrotu z portfela (zarządzanie aktywne).

Ogólnie rzecz biorąc, pod pojęciem immunizacji portfela obligacji rozumiemy takie zaprojektowanie udziałów wartościowych poszczególnych obligacji (o różnych terminach wykupu) wchodzących w skład analizowanego portfela, aby wartość globalna tego portfela była jak najmniej wrażliwa na nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych. Zagadnienie to rozpatruje się przy zadanym horyzoncie inwestycyjnym wynikającym z terminu płatności przyszłych zobowiązań finansowych. W najprostszych modelach immunizacyjnych zakłada się, że w przyszłości występować będzie pojedyncze zobowiązanie. Natomiast w modelach bardziej złożonych, podstawowym problemem jest dopasowanie strumienia przyszłych dochodów wynikających z faktu posiadania określonego portfela obligacji (płatności odsetkowe i wartości nominalne) ze strumieniem przyszłych zobowiązań, rozpatrywanych w dyskretnych chwilach czasowych.

Zadanie immunizacji nie ma na ogół jednoznacznego rozwiązania - istnieje wiele (lub nieskończenie wiele) portfeli umożliwiających dopasowanie przyszłych dochodów (*assets*) do przyszłych zobowiązań (*liabilities*). Umożliwia to dodatkowo sformułowanie pewnej funkcji celu - np. maksymalizacja zysku lub minimalizacja kosztu utworzenia określonego portfela obligacji. Problematyka immunizacji sprowadza się w rozpatrywanym przypadku do zagadnienia optymalizacji, rozwiązywanego za pomocą jednej z wielu technik programowania matematycznego. W zagadnieniu tym problem immunizacji portfela formułuje się w postaci określonego zbioru ograniczeń.

Zagadnienie immunizacji portfela obligacji jest pewnym szczególnym (ale ważnym) przypadkiem bardziej ogólnej problematyki zarządzania portfelowego obligacjami w warunkach ryzyka stóp procentowych. Podstawowe etapy rozwoju teorii immunizacji wyznaczają prace Macaulaya (1938) - wprowadzenie pojęcia okresowości (*duration*) obligacji, Redingtona (1952) - pierwsze użycie terminu (i koncepcji) „immunizacja” w odniesieniu do zagadnień inwestycyjnych, Fishera, Weila (1971) - uogólnienie pojęcia okresowości obligacji, Vasiceka (1977) oraz Coxa, Ingersolla, Rossa (1979, 1985) - model stochastyczny dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, Bierwaga (1987) - koncepcja „okna okresowości” (*duration window*), Brennana, Schwartza (1979, 1983) - dwuwskaznikowe modele dynamiki zmian stóp procentowych - oraz prace Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) i Dahla (1993) - czynnikiowy model dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych oraz koncepcja czynnikowej okresowości i czynnikowej wypukłości obligacji.

W niniejszej pracy, omówimy najpierw skrótowo pojęcie struktury terminowej stóp procentowych oraz zagadnienie wyceny tzw. wartości wewnętrznej obligacji. Następnie przedstawimy zagadnienie kwantyfikacji ryzyka stopy procentowej – podając wyprowadzenia

podstawowych wzorów definiujących parametry okresowości (*duration*) oraz wypukłości (*convexity*) pojedynczej obligacji oraz portfela obligacji; dokonamy również interpretacji tych parametrów. W dalszej kolejności zaprezentujemy tzw. podstawowe twierdzenie o immunizacji oraz przedstawimy możliwości uogólnienia tego twierdzenia na przypadek krzywej dochodowości (*yield curve*) o dowolnym kształcie oraz przy zadanej dynamice przyszłych zmian tej krzywej. Zagadnienia te są bardziej szczegółowo przedstawione m. in. w innej pracy autora (por. Jakubowski, 2006b), gdzie podano nowy dowód twierdzenia o immunizacji oraz dokonano pewnego podsumowania ogólnej problematyki z zakresu immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian rynkowych stóp procentowych *spot*

Natomiast w ostatniej – a zarazem zasadniczej części niniejszej pracy, podamy szczegółowy opis matematyczny analizy czynnikowej dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, przedstawimy definicje czynnikowej okresowości (*factor duration*) oraz czynnikowej wypukłości obligacji (*factor convexity*), po czym zaprezentujemy czynnikowy model immunizacji portfela obligacji. Szczególną uwagę zwrócimy w tym przypadku na możliwość identyfikacji tzw. czynnika poziomu, czynnika nachylenia oraz czynnika krzywizny krzywej dochodowości będącej ilustracją graficzną zmieniającej się losowo, z upływem czasu bieżącego – struktury terminowej stóp procentowych.

Rozważane w pracy podejście jest kontynuacją wspomnianych powyżej wcześniejszych badań prowadzonych w USA (K. Garbade, 1986,1989; R. Litterman, J. Scheinkman, 1991) i w Danii (H. Dal, 1993). W szczególności, dotyczy to merytorycznego uzasadnienia zasadniczych koncepcji oraz formalnego wyprowadzenia podstawowych wzorów prezentowanych (bez dowodów) w tych pracach. A także, interpretacji tych zależności na gruncie metodologii nowoczesnej analizy stochastycznej. Prezentowane w tym zakresie wyniki są uzupełnieniem i rozszerzeniem wyprowadzeń analitycznych prezentowanych przez autora w raporcie badawczym IBS PAN: Jakubowski (2007).

Prowadzone rozważania zilustrowano wynikami obliczeń numerycznych, dotyczących zastosowania modelu czynnikowego do analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych – na rynku finansowym w Polsce.

## 2. Struktura terminowa stóp procentowych – zagadnienie wyceny obligacji

Zagadnienie immunizacji portfela obligacji wiąże się ściśle z pojęciem struktury terminowej stóp procentowych. Struktura ta odzwierciedla funkcyjną zależność wysokości poszczególnych stóp procentowych od terminów zapadalności zobowiązań, dla których te stopy się rozpatruje. W analizowanym przypadku przyjmuje się, że rynkowe stopy procentowe *spot*  $r_{0t}$  rozpatrywane dla poszczególnych terminów  $t = 1, 2, 3, \dots, T$ , są określone przez rentowności do wykupu *YTM* (*yield to maturity*) obligacji czysto-dyskontowych. Rentowności te stanowią pewien "wzorzec", według którego dokonuje się wyceny wszystkich innych funkcjonujących w danym sektorze rynku finansowego obligacji wielokuponowych, jak też i innych instrumentów finansowych. Mamy więc

$$TS(\tau) = [r_{01}(\tau), \dots, r_{0t}(\tau), \dots, r_{0T}(\tau)], \quad (1)$$

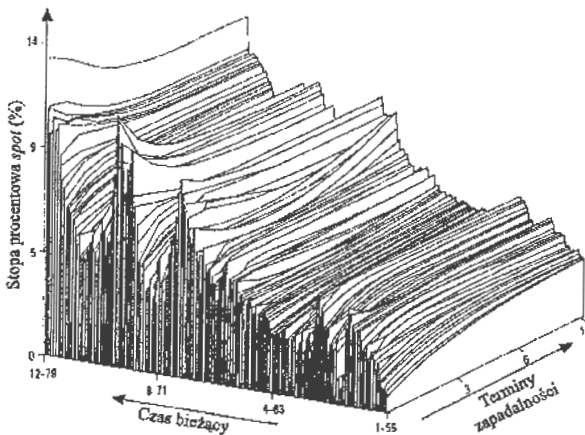
gdzie *TS* – struktura terminowa rozpatrywana jako wektor stóp procentowych  $spo^t r_{0t}$ ,  $t = 1, \dots, T$  - terminy zapadalności,  $\tau$  - czas bieżący.

---

\* Ze względu na brak jednolitego nazewnictwa w j. polskim, w pracy - często odwoływać się będziemy do terminów angielskich; np. stopy procentowe "spot" - są niekiedy nazywane "stopami natychmiastowymi" lub "stopami kasowymi".

Graficznym zobrazowaniem struktury terminowej stóp procentowych *spot* jest tzw. krzywa dochodowości. Krzywa ta, przedstawiająca zależność rentowności do wykupu  $YTM = r_{0,t}$  obligacji czysto-dyskontowych od terminów wykupu tych obligacji  $t=1, \dots, T$  - może mieć różny kształt. Może to być krzywa rosnąca (*normal*) malejąca (*inverted*), w przybliżeniu stała (*flat*) lub łukowata (*hump-shaped*). Kształt krzywej dochodowości zależy od szeregu czynników związanych zarówno z funkcjonowaniem analizowanego rynku finansowego, od bieżącej sytuacji gospodarczej danego kraju, jak również od sektora rynku, dla którego krzywa ta jest identyfikowana (rynek obligacji i bonów skarbowych, rynek obligacji komunalnych, korporacyjnych, itp.). Ponadto, kształt tej krzywej zmienia się dynamicznie w czasie – co jest właśnie źródłem ryzyka stóp procentowych.

Na rysunku 1 przedstawiono przebiegi krzywych dochodowości skarbowych papierów dłużnych, ilustrujące stochastyczną dynamikę zmian struktury terminowej stóp procentowych *spot* dla rynku USA na przestrzeni ok. 25 lat; charakterystyki te zdejmowano w odstępach comiesięcznych od stycznia 1955 do grudnia 1979. Każdorazowo, rozpatrywano poziom stóp procentowych  $r_{0,t}$  o terminach zapadalności – od 1 roku do 10 lat. Natomiast na rysunku XX (punkt 8 pracy) przedstawiono analogiczny wykres ilustrujący zmienność z upływem czasu bieżącego krzywych dochodowości na rynku finansowym w Polsce, w okresie marzec 1994 – grudzień 1996 (dane comiesięczne); w tym przypadku – rozpatrywano stopy  $r_{0,t}$  dla terminów  $t$  od 13 tygodni do 5 lat.



Rys. 1. Ilustracja zmienności struktury terminowej dla rynku w USA; okres: I 1955 – XII 1979 (dane comiesięczne); Źródło: Haugen (1996), s. 436.

Analizując powyższe wykresy, warto zwrócić uwagę na następujące fakty:

- Po pierwsze, rozpatrywane krzywe dochodowości na ogół nie są płaskie – dla całego zakresu zmienności terminów zapadalności.

- Po drugie – można zauważyć ściśle dodatnią korelację pomiędzy zmiennością krótkoterminowych stóp procentowych *spot* – a zmiennością stóp długoterminowych; a więc wzrost stóp krótkoterminowych powoduje (na ogół) wzrost stóp długoterminowych i odwrotnie.

- Po trzecie – dynamika zmian (a więc wariancja) stóp krótkoterminowych jest znacznie większa w porównaniu z przypadkiem stóp długoterminowych. Można tu więc mówić o występowaniu pewnego współczynnika "tłumienia" zakresu zmienności stóp  $r_{0t}$ , niwelującego wahania tych stóp – w miarę, jak przesuwamy się w kierunku stóp długoterminowych. Zjawisko dużej zmienności stóp krótkoterminowych tłumaczymy silnym wpływem na te stopy określonych – zmiennych w czasie – decyzji banku centralnego (lub Rady Polityki Pieniężnej) co do poziomu stóp *reverse-repo*. Natomiast tłumienie tej zmienności, jakie występuje w odniesieniu do stóp długoterminowych – wyjaśniane jest na gruncie tzw. teorii segmentacji rynku.

- I na koniec, po czwarte – analizowane przebiegi krzywych dochodowości są regularnymi przebiegami gładkimi; a więc funkcje aproksymujące te przebiegi nie wykazują żadnych "pofalowań" czy też uskoków. Tłumaczone jest to z jednej strony – działalnością na analizowanych rynkach arbitrażystów, spekulujących na wartościach stopy procentowej; a z drugiej strony – funkcjonowaniem na danym rynku tzw. teorii oczekiwań (*expectations theory*).

Jak wspomniano, krzywa dochodowości stanowi pewien wzorzec stóp procentowych *spot*  $r_{0t}$  ( $t=1, \dots, T$ ), za pomocą którego można dokonywać wyceny różnych papierów wartościowych. Wyceny tej dokonuje się poprzez dyskontowanie w czasie (do chwili bieżącej) przyszłych wpływów pieniężnych związanych z rozpatrywanym instrumentem finansowym. W szczególności, każdą obligację o stałym oprocentowaniu, związaną z wypłatami w kolejnych latach  $t=1, 2, \dots, (T-1)$  odsetek  $C$  oraz w roku  $T$  - odsetek  $C$  plus wartość nominalna  $N$  - możemy rozpatrywać jako sumę obligacji czysto-dyskontowych. A zatem, wartość bieżąca takiej obligacji jest równa

$$PV = \frac{C}{1+r_{01}} + \frac{C}{(1+r_{02})^2} + \dots + \frac{C+N}{(1+r_{0T})^T}. \quad (2)$$

Wartość tę nazywa się również często wartością wewnętrzną obligacji (*intrinsic value*). Natomiast sam wzór (2) jest często nazywany wzorem wyceny obligacji.

W teorii rynków kapitałowych dowodzi się (Elton, Gruber, 2003), że gdy rynek obligacji znajduje się w równowadze, strumienie pieniężne pochodzące od różnych obligacji powinny być dla tych samych okresów  $t=1, \dots, T$ , dyskontowane według tych samych stóp procentowych *spot*  $r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0T}$ . Tym samym, można w tym celu stosować „wzorcowe” stopy procentowe *spot* określone na podstawie rentowności do wykupu *YTM* obligacji czysto-dyskontowych. Wynika to z zastosowania tzw. prawa jednej ceny (*the law of one price*) w stosunku do rozpatrywanego rynku obligacji. Prawo to oznacza, że w przypadku gdy chwilowa cena bieżąca  $P$  analizowanej obligacji jest różna od jej wartości równowagowej  $PV$ , to na skutek arbitrażu cena ta - po pewnym okresie przejściowym - staje się zbieżna do wartości  $PV$ . Zakłada się przy tym, że wspomniany okres przejściowy jest na ogół nie dłuższy niż czas trwania jednego okresu odsetkowego analizowanej obligacji, co znajduje potwierdzenie w badaniach empirycznych z tego zakresu. Oczywiście warunkiem aby zachodziła owa zbieżność ceny bieżącej obligacji  $P$  do jej wartości równowagowej  $PV$  jest odpowiednia efektywność rynku kapitałowego (Jakubowski, 1996).

Określenie struktury terminowej stóp procentowych przez rentowności do wykupu  $r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0T}$  obligacji czysto-dyskontowych ma zasadnicze znaczenie nie tylko ze względu na wycenę wartości obligacji. Znając przebieg rozpatrywanej krzywej dochodowości, a także



dynamikę zmian tego przebiegu z upływem czasu bieżącego, potrafimy oszacować wpływ zmian rynkowych stóp procentowych na wartość rozpatrywanych obligacji, a tym samym na stopę zwrotu z dokonywanych inwestycji.

Stopa zwrotu  $R$  z inwestycji w daną obligację (tzw. *period-by-period return*) wynika ogólnie rzecz biorąc z dwóch składowych: dochodów z wypłacanych odsetek  $C$  oraz z zysków lub strat związanych ze zmianą bieżącej ceny  $P$  obligacji. Z kolei zmiana ceny obligacji wynikać może ze zmiany wartości równowagowej obligacji oraz określonych działań spekulacyjnych na rozpatrywanym rynku (tzw. *arbitraż cenowy*). Pomijając dla uproszczenia owe działania spekulacyjne (jako charakterystyczne dla okresów przejściowych) otrzymamy, że cena bieżąca  $P$  obligacji jest równa jej wartości równowagowej  $PV$  określonej wzorem (2). Ze wzoru tego wynika, że zmiana ceny (wartości) bieżącej obligacji może być spowodowana oddziaływaniem dwóch czynników: zmianą wartości obligacji wywołaną tylko i wyłącznie upływem czasu bieżącego (w miarę upływu kolejnych okresów odsetkowych zanikają kolejne czynniki zależności (2)) oraz - nieoczekiwaną zmianą rynkowych stóp procentowych  $r_{0t}$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

Ze wzoru wyceny (2) wynika bezpośrednio, że nieoczekiwany wzrost rynkowych stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , a więc przesunięcie się krzywej dochodowości w górę – powoduje spadek wartości bieżącej  $PV$  obligacji. Natomiast spadek tych stóp procentowych, a więc ruch krzywej dochodowości w dół, powoduje wzrost wartości bieżącej  $PV$ . Istotne są również wszelkiego rodzaju niespodziewane zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych, prowadzące do zmiany nachylenia krzywej dochodowości, pojawiania się różnego rodzaju garbów (*hump-shaped curve*), itp. Mówi się w tym przypadku o tzw. ryzyku kształtu analizowanej krzywej (*shape risk*).

Na zakończenie tych uwag należy podkreślić, że o ile znajomość i umiejętność analizy struktury terminowej stóp procentowych jest niezmiernie istotna w przypadku wszelkiego rodzaju inwestycji na rynku finansowym, o tyle na rynku obligacji – jest to sprawa o zasadniczym znaczeniu. Wynika to wprost ze wzoru wyceny (2).

### 3. Kwantyfikacja ryzyka stopy procentowej – parametry okresowości i wypukłości obligacji

Z przeprowadzonych w poprzednim punkcie rozważań wynika, że bieżąca cena rynkowa obligacji może podlegać ciągłym oraz nieoczekiwanym fluktuacjom - ze względu na zmiany obowiązujących w danym momencie rynkowych stóp procentowych, za pomocą których dyskontujemy w czasie do chwili bieżącej wszystkie przyszłe wpływy pieniężne związane z posiadaniem obligacji (tj. odsetki oraz nominał). Często trudne do przewidzenia zmiany rynkowych stóp procentowych oraz wynikające stąd zmiany ceny obligacji (czy też szerzej - instrumentów finansowych) są źródłem ryzyka stóp procentowych. Ryzyko to wyraża się tzw. nieoczekiwaną stopą zwrotu (*unanticipated return*); Elton, Gruber (2003). W związku z tym istotna jest - z punktu widzenia zarówno inwestora jak i emitenta - wrażliwość (lub też przeciwnie - odporność) wartości rozpatrywanej obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych. Parametrami umożliwiającymi pomiar takiej wrażliwości jest właśnie **okresowość** (*duration*) oraz **wypukłość** (*convexity*) obligacji.

#### 3.1. Klasyczne definicje (Macaulaya) okresowości i wypukłości

Klasyczne definicje (Macaulaya) okresowości i wypukłości obligacji związane są z przyjęciem silnie ograniczającego założenia, że wszystkie rynkowe stopy procentowe *spot* – jak również ich przyrosty - są sobie równe, niezależnie od terminów zapadalności zobowiązań, tj.

$$r_{0t} = r \quad \text{oraz} \quad dr_{0t} = dr, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

gdzie  $dr$  - przyrost skończony

Oznacza to, że struktura terminowa stóp procentowych wyrażona krzywą dochodowości obligacji czysto-dyskontowych jest „płaska”, przy czym zachodzi to dla dowolnej chwili bieżącej  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ . Z powyższego założenia wynika bezpośrednio, że jeżeli chodzi o zmiany rynkowej stopy procentowej  $r$  (w tym przypadku już tylko jednej) - to możliwe są jedynie równoległe przesunięcia w górę lub w dół rozpatrywanej krzywej dochodowości o wartość  $dr$ .

Wyprowadzenie wzorów określających parametry okresowości i wypukłości obligacji jest następujące. Ze wzoru (2) wyceny obligacji, uwzględniając warunek (3) oraz zakładając, że analizowany rynek jest w równowadze (tj.  $P = PV$ ), mamy

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^t}, \quad (4)$$

gdzie  $C_t$  - przyszłe strumienie finansowe wynikające z faktu nabycia obligacji, tj.  $C_t = C$  ( $t = 1, \dots, T-1$ ) oraz  $C_T = C + N$ ;  $C$  - wartość kuponu,  $N$  - wartość nominalna. Zauważmy, że w analizowanym przypadku, wartość bieżąca  $P(r)$  obligacji jest ściśle wypukłą i ściśle malejącą funkcją rynkowej stopy procentowej  $r$ . Jest to również oczywiście funkcja ciągła wraz z wszystkimi pochodnymi.

Z powyższego bezpośrednio wynika, że zmianę  $dP$  wartości bieżącej obligacji wywołaną nieoczekiwaną, skończoną zmianą  $dr$  stopy procentowej można z dostateczną dużą dokładnością przybliżyć przez dwa pierwsze człony szeregu Taylora, tj.

$$dP = P(r + dr) - P(r) = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 \quad (5)$$

Z (4) i (5) mamy zatem

$$dP = - \left[ \sum_{t=1}^T t C_t (1+r)^{-t} \right] \frac{dr}{1+r} + \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^T t(t+1) C_t (1+r)^{-t} \right] \left( \frac{dr}{1+r} \right)^2. \quad (6)$$

Dzieląc obie strony zależności (6) przez  $P = P(r)$  oraz biorąc pod uwagę, że  $dr = d(1+r)$ , otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = - \left[ \sum_{t=1}^T \frac{t C_t}{(1+r)^t} / P \right] \frac{d(1+r)}{1+r} + \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1) C_t}{(1+r)^t} / P \right] \left( \frac{d(1+r)}{1+r} \right)^2. \quad (7)$$

W powyższym wzorze, wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie kwadratowym nazywane jest okresowością  $D$  obligacji; natomiast wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym pomnożone przez  $1/2$  - nazywane jest wypukłością  $V$  obligacji. Mamy zatem

$$D \triangleq \sum_{t=1}^T \frac{t C_t}{(1+r)^t} / P \quad \text{oraz} \quad V \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1) C_t}{(1+r)^t} / P. \quad (8)$$

Z (7) - (8) mamy

$$\frac{dP}{P} = -D \times \Delta_r + V \times (\Delta_r)^2, \quad \text{gdzie} \quad \Delta_r \triangleq \frac{d(1+r)}{1+r}. \quad (9)$$

Drogą bezpośredniego różniczkowania funkcji  $P(r)$  danej wzorem (4) można łatwo sprawdzić, że zachodzi

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1+r}{P} \quad \text{oraz} \quad V = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \frac{1+r}{P}. \quad (10)$$

Tak więc wzory (10) są często w literaturze przedmiotu traktowane jako alternatywne – w stosunku do wzorów (8) – definicje okresowości  $D$  i wypukłości  $V$  obligacji.

Parametr okresowości  $D$  obligacji jest również często interpretowany następująco. Dla małych zmian  $dr$ , a dokładniej, dla małych zmian  $\Delta_r = d(1+r)/(1+r)$  - z zależności (9) mamy

$$\frac{dP}{P} = -D \frac{d(1+r)}{1+r}, \quad \text{a stąd} \quad (11)$$

$$D = -\frac{dP}{P} \bigg/ \frac{d(1+r)}{1+r}. \quad (12)$$

A zatem, okresowość  $D$  obligacji możemy traktować jako współczynnik elastyczności (wzięty ze znakiem minus) wartości  $P(r)$  obligacji ze względu na względną zmianę wartości  $1$  plus stopa procentowa  $r$ . Czy też – inaczej to ujmując – parametr okresowości  $D$  wyraża procentowy spadek wartości  $P$  obligacji przy wzroście wartości  $(1+r)$  o  $1\%$ . Należy tylko mieć na uwadze, że ocena tego spadku – dokonana za pomocą tylko wartości  $D$  jest często zbyt "konserwatywna"; bowiem ze wzoru (9) wynika, że ocenę tę należałoby skorygować o dodatnia wartość  $V \times (\Delta_r)^2$ . Zjawisko to nazywane jest "efektem wypukłości" obligacji.

W literaturze, spotykany jest jeszcze jeden zestaw wzorów definiujących parametry okresowości  $D$  i wypukłości  $V$  obligacji. A mianowicie, do rozważań wprowadza się współczynnik wagowy  $x_t$ , tj.

$$x_t \triangleq [C_t/(1+r)^t]/P = [C_t/(1+r)^t] \bigg/ \sum_{i=1}^T [C_i/(1+r)^i]. \quad (13)$$

Współczynnik  $x_t$  określa więc udział wartości bieżącej strumienia finansowego  $C_t$  (zdyskontowanego na chwilę początkową za pomocą rynkowej stopy procentowej  $r$ ) w wartości bieżącej  $P$  obligacji. Z (13) wynika bezpośrednio, że  $\sum_{i=1}^T x_i = 1$ .

Podstawiając zależność (13) do definicji (8) otrzymamy

$$D \triangleq \sum_{i=1}^T x_i t \quad \text{oraz} \quad V \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T x_i t(t+1). \quad (14)$$

Otrzymane wzory (14) są więc również - obok wzorów (8) i (10) - traktowane jako definicje parametrów okresowości  $D$  i wypukłości  $V$  obligacji.

Z definicji (14) bezpośrednio wynika, że parametr okresowości  $D$  Macaulaya ma wymiar czasu. Okresowość  $D$  jest w tym kontekście często traktowana jako pewien przeciętny ważony okres zwrotu z inwestycji w dana obligację; stąd też nazwa tego parametru.

### Parametry okresowości $D_0$ i wypukłości $V_0$ obligacji czysto-dyskontowej.

Dla obligacji czysto-dyskontowej (tj. dla odsetek  $C = 0$ ) mamy

$$C_t = 0 \quad \text{dla } t = 1, \dots, T-1 \quad \text{oraz} \quad C_T = N. \quad (15)$$

A zatem, ze wzorów (13), (15) otrzymamy, że współczynniki wagowe  $x_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) są w analizowanym przypadku równe

$$x_t = 0 \text{ dla } t=1, \dots, T-1 \quad \text{oraz} \quad x_T = 1. \quad (16)$$

Ze wzorów (14), uwzględniając (16), mamy zatem

$$D_0 = T \quad \text{oraz} \quad V_0 = \frac{1}{2}T(T+1). \quad (17)$$

Tak więc w przypadku obligacji czysto dyskontowej, parametry okresowości  $D_0$  i wypukłości  $V_0$  zależą tylko i wyłącznie od terminu wykupu  $T$  tej obligacji, przy czym okresowość  $D_0$  jest równa bezpośrednio terminowi  $T$ .

Z ogólnej definicji (14) dowolnej obligacji wynika więc, że spośród wszystkich obligacji o tym samym terminie wykupu  $T$  - obligacja czysto-dyskontowa ma największą okresowość, tj.  $D_{\max} = D_0 = T$ . Wynika to bezpośrednio stąd, że okresowość  $D$  obligacji wielokuponowych jest średnią ważoną terminów  $t=1, \dots, T$ , przy czym suma wag  $x_t$  jest równa jedności. Tak więc okresowość  $D$  musi być krótsza od najdłuższego z rozpatrywanych terminów, wynoszącego  $T$ .

Ponadto, o ile założenia (3) są spełnione, można wykazać, że z kolei spośród wszystkich obligacji (bądź portfeli obligacji) o tej samej okresowości  $D$  - obligacja czysto-dyskontowa charakteryzuje się najmniejszą wypukłością, tj.  $V_{\min} = V_0 = \frac{1}{2}T(T+1)$ . A zatem, obligacja ta ma najmniej korzystne własności z punktu widzenia ryzyka stopy procentowej. Obligacje wielokuponowe ściśle dominują bowiem w analizowanym przypadku obligację czysto-dyskontową w sensie wspomnianego poprzednio "efektu wypukłości". Wynika to bezpośrednio z zależności (9): dla obligacji (lub portfeli obligacji) wielokuponowych, tzw. nieoczekiwana stopa zwrotu  $dP/P$  wywołana zmiennością  $dr$  stopy procentowej jest wyższa w porównaniu z przypadkiem obligacji czysto-dyskontowej o tej samej okresowości  $D$ , przy czym zachodzi to zarówno dla dodatnich jak i ujemnych zmian  $dr$ .

W pracy Zaremby (1995) wykazano prawdziwość powyższego stwierdzenia dla bardziej ogólnego przypadku, tj. dla krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz przy założeniu proporcjonalnych zmian czynnika  $(1+r_{0t})$ , gdzie  $r_{0t}$  - stopa procentowa *spot* dla terminów zapadalności  $t=1, \dots, T$ .

### Parametry okresowości i wypukłości portfela obligacji.

Ogólnie rzecz biorąc portfel  $P$  obligacji możemy traktować jako kombinację wypukłą obligacji  $O_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej. Mamy zatem

$$P = \sum_{i=1}^N w_i O_i \text{ - portfel obligacji,} \quad (18)$$

gdzie  $w_i$  - udział procentowy obligacji  $O_i$  w portfelu  $P$ ; tj.

$$w_i \in (0,1), \quad \forall i=1, \dots, N; \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (19)$$

Zauważmy, że każdy portfel  $P$  obligacji można traktować jako pewną sztucznie utworzoną ("wirtualną") obligację, o strumieniach finansowych  $C_t$  będących sumami ważonymi strumieniami finansowymi  $C_t^i$  obligacji  $O_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Biorąc pod uwagę ten fakt, droga dosyć prostych przekształceń można wykazać (Jakubowski, 2003), że zarówno okresowość  $D_p$  jak i

wypukłość  $V_p$  portfela  $P$  są kombinacjami wypukłymi odpowiednio okresowości  $D_i$  i wypukłości  $V_i$  poszczególnych obligacji ( $i=1, \dots, N$ ). Mamy zatem

$$D_p = \sum_{i=1}^N w_i D_i \quad \text{oraz} \quad V_p = \sum_{i=1}^N w_i V_i. \quad (20)$$

Powyższe wzory mają duże znaczenie dla zastosowań praktycznych. A mianowicie, dobierając odpowiednio udziały procentowe  $w_i$  poszczególnych obligacji  $O_i$  w portfelu  $P$  możemy utworzyć w ten sposób pewną obligację syntetyczną o odpowiednich – wymaganych przez nas – parametrach okresowości  $D_p$  i wypukłości  $V_p$ . Możemy więc w ten sposób kształtować odpowiednią wrażliwość analizowanego portfela obligacji na ryzyko stóp procentowych. Co więcej, wzory (20) można łatwo uogólnić na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie - o ile tylko dynamika zmian z upływem czasu bieżącego rynkowych stóp procentowych *spot*  $r_{0t}$ , przebiega według pewnego, z góry założonego schematu; por. Zaremba (1995).

### Portfele obligacji o maksymalnej wypukłości.

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych, interesującym zagadnieniem jest poszukiwanie portfela obligacji o maksymalnej wypukłości, wśród klasy portfeli – o tym samym parametrze okresowości  $D$ . Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika bowiem, że portfel taki – przy zachowaniu stosownych założeń co do dynamiki zmian krzywej dochodowości – będzie zapewniał najwyższą nieoczekiwaną stopę zwrotu ( $dP/P$ ).

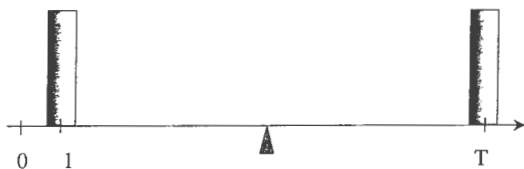
Otóż nie wnikając bliżej w szczegóły matematyczne można stwierdzić, że im większe jest rozproszenie strumieni finansowych  $C_t$  portfela obligacji wokół punktu na osi czasu wyznaczonym przez wartość parametru okresowości  $D$  tego portfela, tym większa jest jego wypukłość  $V$ . Natomiast portfelem spełniającym ów warunek największego rozproszenia rozpatrywanych strumieni finansowych  $C_t$ , a więc portfelem o maksymalnej wypukłości - jest tzw. portfel sztangowy (*barbell*). Portfel ten składa się wyłącznie z dwóch obligacji czysto-dyskontowych o odpowiednio najkrótszym i najdłuższym terminie do wykupu – spośród terminów zapadalności wszystkich obligacji istniejących na danym rynku kapitałowym; por. rysunek 2.

Powyższy fakt, udowodniono dla przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz dla proporcjonalnych zmian czynnika  $(1+r_{0t})$  w pracy Zaremby (1998) oraz – dla osłabionych założeń co do dynamiki zmian krzywej dochodowości – w pracach Zaremby, Smoleńskiego (2000a, 2000b).

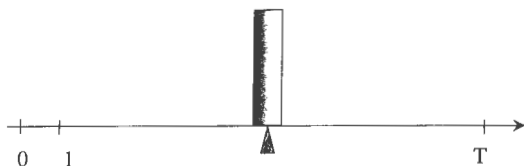
Pozostałe, interesujące z punktu widzenia powyższych analiz rodzaje portfeli to portfel typu "pocisku" (*bullet*) – o maksymalnie skupionych strumieniach finansowych oraz portfel typu "drabiny" (*ladder*) – o strumieniach finansowych równomiernie rozproszonych wzdłuż osi czasu. Można wykazać, że portfel typu "pocisku" jest portfelem o minimalnej wypukłości, spośród wszystkich portfeli o tym samym parametrze okresowości; natomiast portfel typu "drabiny" – stanowi przypadek pośredni; por. Fabozzi, Fong (1994).

Zagadnienia aktywnego zarządzania portfelami obligacji w zależności od wspomnianych powyżej sposobów koncentracji strumieni finansowych portfeli będą szerzej rozpatrywane w dalszej części niniejszej pracy.

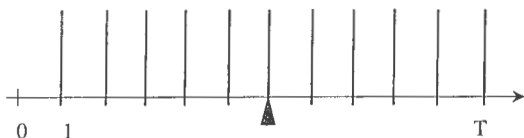
Portfel *barbell*:



Portfel *bullet*:



Portfel *ladder*:



Rys. 2. Ilustracja rozkładu strumieni finansowych portfeli typu *barbell*, *bullet*, *ladder*.

### 3.2. Definicje okresowości i wypukłości obligacji dla krzywej dochodowości o dowolnym kształcie i zadanej dynamice zmian

W przypadku niepłaskiej krzywej dochodowości, a więc dla różnych wartości stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$  ( $t=1, \dots, T$ ) zależność (2) określająca bieżącą wartość  $P$  obligacji można zapisać następująco

$$P = P(r_{01}, \dots, r_{0t}, \dots, r_{0T}) = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t}. \quad (21)$$

Tak więc, wartość bieżąca  $P$  obligacji jest  $T$ -wymiarową ściśle wypukłą i różniczkowalną funkcją stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$ . Wielowymiarowość tej funkcji powoduje zasadnicze trudności w zdefiniowaniu skalarnych parametrów okresowości  $D$  i wypukłości  $V$

obligacji. Dlatego też, w celu rozwiązania powyższego problemu, wprowadza się pewne dodatkowe założenia upraszczające co do możliwej dynamiki zmian analizowanej krzywej dochodowości z upływem czasu bieżącego. Otrzymane w ten sposób definicje parametrów  $D$  i  $V$  są bezpośrednim uogólnieniem klasycznej wersji Macaulaya tych parametrów, rozpatrywanych dla płaskiej krzywej dochodowości; a więc dla przypadku, gdy rozpatrujemy jednowymiarową postać funkcji  $P(r)$ .

Poniżej, przedstawimy skrótoowo dwa sformułowania wspomnianych założeń upraszczających, umożliwiające zdefiniowanie parametrów okresowości  $D$  i wypukłości  $V$  obligacji w przypadku wielowymiarowej funkcji (21). Trzecią możliwą metodą rozwiązania powyższego problemu – jest wprowadzenie modelu czynnikowego struktury terminowej stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$  - co będzie zasadniczym przedmiotem rozważań prowadzonych w dalszej części niniejszej pracy.

### Przypadek proporcjonalnych zmian krzywej dochodowości – ze współczynnikiem tłumienia

Założymy, że zmiany kształtu analizowanej krzywej dochodowości z upływem czasu bieżącego, przebiegają według następującego schematu (Elton, Gruber, 2003)

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = L^{t-1} \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}}; \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (22)$$

gdzie  $L \in (0, 1]$  - dany parametr, identyfikowany na podstawie danych z przeszłości; np. za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Zauważmy, że założenie schematu (23) dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych jest odzwierciedleniem częstych obserwacji empirycznych; a więc – że zmienność z upływem czasu bieżącego stóp krótkoterminowych jest znacznie silniejsza od zmienności długoterminowych stóp procentowych  $spot$ ; por. punkt 2 niniejszej pracy (rys. 1). Założenie schematu (22) oznacza więc przyjęcie proporcjonalnych zmian wartości  $(1+r_{0t})$  - z dokładnością do pewnego współczynnika "tłumienia"  $L^{t-1}$ ,  $t = 1, \dots, T$ ; tzn. dla wartości  $L = 1$ , zmiany te są ściśle proporcjonalne.

Warto również podkreślić, że przyjęcie do dalszych rozważań dynamiki zmian (22) krzywej dochodowości oznacza założenie, że współczynniki korelacji pomiędzy stopami procentowymi  $spot\ r_{0t}$  ( $t = 1, \dots, T$ ) - SA równe jedności, co tylko w pewnym przybliżeniu jest spełnione w rzeczywistości.

Biorąc pod uwagę wypukłość i różniczkowalność wartości bieżącej  $P(r)$  obligacji, jako funkcji (21) wektora  $r = [r_{01}, \dots, r_{0T}]$  stóp procentowych  $spot$ , zmiany  $dP$  tej wartości możemy z dużą dokładnością oszacować za pomocą dwóch pierwszych członów rozwinięcia funkcji  $P(r)$  w szereg Taylora, tj.

(23)

$$dP = P(r + dr) - P(r) = \sum_{i=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_{0i}} dr_{0i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_{0i}^2} (dr_{0i})^2 = - \sum_{i=1}^T \frac{tC_t}{(1+r_{0t})^t} \frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \frac{t(t+1)C_t}{(1+r_{0t})^t} \left( \frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}} \right)^2$$

Należy podkreślić, że zew względu na postać funkcji (21), zanikają wszystkie pochodne mieszane powyższego rozwinięcia tej funkcji.

Dzieląc obie strony powyższej zależności przez  $P$  oraz biorąc pod uwagę, że  $dr_{0t} = d(1+r_{0t})$ , otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = - \left[ \sum_{t=1}^T \frac{tC_t}{(1+r_{0t})^t} / P \right] \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} + \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)C_t}{(1+r_{0t})^t} / P \right] \left( \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} \right)^2. \quad (24)$$

A zatem, z (23) i (24) mamy

$$\frac{dP}{P} = - \left[ \sum_{t=1}^T \frac{tL^{t-1}C_t}{(1+r_{0t})^t} / P \right] \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} + \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)(L^{t-1})^2 C_t}{(1+r_{0t})^t} / P \right] \left( \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} \right)^2. \quad (25)$$

W powyższym wzorze, wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie kwadratowym definiujemy jako okresowość  $D_L$  obligacji; natomiast wyrażenie w drugim nawiasie prostokątnym, pomnożone przez  $1/2$  - jako wypukłość  $V_L$  obligacji. Przez indeks "L" oznaczono symbolicznie założenie występowania w analizowanych zależnościach współczynnika tłumienia  $L^{t-1}$  ( $t=1, \dots, T$ ).

Definiując ponadto współczynnik wagowy

$$x_t \triangleq \left[ C_t / (1+r_{0t})^t \right] / P, \quad \forall t=1, \dots, T, \text{ mamy zatem}$$

$$D \triangleq \sum_{t=1}^T \frac{tL^{t-1}C_t}{(1+r_{0t})^t} / P = \sum_{t=1}^T x_t L^{t-1} t, \quad (26)$$

$$V_L \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)(L^{t-1})^2 C_t}{(1+r_{0t})^t} / P = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t (L^{t-1})^2 t(t+1). \quad (27)$$

Z (25)-(27) otrzymamy następujący wzór na oszacowanie nieoczekiwanej stopy zwrotu wywołanej losowymi zmianami stóp procentowych *spot*  $r_{0t}$ , przebiegającymi według schematu (22).

$$\frac{dP}{P} = -D_L \times \Delta_r + V_L \times (\Delta_r)^2, \quad \text{gdzie } \Delta_r \triangleq \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}}. \quad (28)$$

Na uwagę zasługuje w tym miejscu pełna analogia pomiędzy powyższym wzorem a wzorem (9) – wyprowadzonym dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości.

Ponadto, drogą bezpośredniego różniczkowania funkcji  $P(r)$  danej wzorem (21) można łatwo sprawdzić, że wzory (26), (27) są równoważne następującym definicjom parametrów  $D_L$  i  $V_L$  obligacji:

$$D_L = - \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_{0t}} \frac{1+r_{0t}}{P} L^{t-1} \quad (29)$$

$$V_L = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_{0t}^2} \frac{(1+r_{0t})^2}{P} (L^{t-1})^2. \quad (30)$$

Jak można łatwo zauważyć, wyprowadzone powyżej wzory (26)-(27) oraz (23)-(30) określające parametry okresowości  $D_L$  oraz wypukłości  $V_L$  dla krzywej dochodowości o dowolnym



kształcie oraz przy założeniu schematu (22) dynamiki zmian tej krzywej, są uogólnieniami analogicznych wzorów określających klasyczne definicje Macaulaya tych parametrów. Dla wartości  $L=1$  oraz  $r_{0t} = r$  ( $t=1, \dots, T$ ) wzory te prowadzą bowiem bezpośrednio do wzorów (8)-(9), (13)-(14) i (15)-(16) wyprowadzonych dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości.

Na zakończenie rozważań dotyczących powyższego przypadku należy podkreślić, że jakkolwiek celowość wprowadzenia upraszczającego schematu (22) zmian stóp procentowych *spot*  $r_{0t}$  została zasugerowana w cytowanej już pracy Eltona, Grubera (2003) – brak jest w tej pracy przedstawionych powyżej szczegółowych wyprowadzeń analitycznych.

### Model Fishera, Weila (1971) analizy ryzyka zmienności struktury terminowej stóp procentowych

Stosując podejście Fishera-Weila zakładamy podobnie jak poprzednio, że krzywa dochodowości, będąca reprezentacją graficzną struktury terminowej  $TS$  stóp procentowych – może mieć dowolny kształt. Natomiast ograniczającym (I to w znacznym stopniu) założeniem jest przyjęcie, że możliwe są wyłącznie równoległe przesunięcia tej krzywej, tj.

$$r_1 \neq \dots \neq r_t \neq \dots \neq r_T \quad \text{oraz} \quad dr_t = dr, \quad \forall t=1, \dots, T, \quad (31)$$

gdzie przez  $r_t$  oznaczono (dla uproszczenia zapisu) stopy procentowe *spot*  $r_{0t}$ .

Dla analizowanego rynku zakładamy również, że obowiązuje ciągła kapitalizacja odsetek; por. Jakubowski (2003), Weron A., Weron R. (1998). Wzór (21) określający wartość bieżącą obligacji przybiera wówczas postać:

$$P = P(r_{01}, \dots, r_{0t}, \dots, r_{0T}) = \sum_{t=1}^T C_t e^{-r_t t}. \quad (32)$$

Porównując wzory (21) i (32) można łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku, tzw. czynnik dyskontujący  $(1+r)^{-t}$  został – dla ciągłej kapitalizacji odsetek – zastąpiony czynnikiem dyskontującym  $\exp(-r_t t)$ .

Dokonując oszacowania przyrostu  $dP$  funkcji (32) za pomocą dwóch pierwszych członów szeregu Taylora, mamy

$$dP = P(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - P(\mathbf{r}) = \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 = - \sum_{t=1}^T (t C_t e^{-r_t t}) dr_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (t^2 C_t e^{-r_t t}) (dr_t)^2. \quad (33)$$

Dzieląc obie strony powyższego wzoru przez  $P$  oraz biorąc pod uwagę założenie (31), tj.  $dr_t = dr$  ( $t=1, \dots, T$ ) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = - \left( \sum_{t=1}^T t C_t e^{-r_t t} / P \right) dr + \frac{1}{2} \left( \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-r_t t} / P \right) (dr)^2. \quad (34)$$

Wyrażenie w nawiasie okrągłym pierwszego członu powyższej zależności definiujemy jako okresowość Fishera-Weila  $D_{FW}$  obligacji; natomiast wyrażenie w nawiasie okrągłym drugiego członu pomnożone przez  $1/2$  - określa wypukłość  $V_{FW}$ . Definiując dodatkowo współczynnik wagowy

$$x_t \triangleq C_t e^{-r_t t} / P \quad \forall t=1, \dots, T, \quad \text{mamy zatem}$$

$$D_{FW} \triangleq \sum_{t=1}^T t C_t e^{-r_t} / P = \sum_{t=1}^T x_t t, \quad (35)$$

$$V_{FW} \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-r_t} / P = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t t^2. \quad (36)$$

Ponadto, z (34), (35) i (36) mamy następujący wzór na oszacowanie nieoczekiwanej stopy zwrotu z obligacji, wywołanej losowym, równoległym przesunięciem krzywej dochodowości

$$\frac{dP}{P} = -D_{FW} \times dr + V_{FW} \times (dr)^2. \quad (37)$$

Poprzez bezpośrednie różniczkowanie funkcji (32) można łatwo sprawdzić, że wyprowadzone powyżej zależności (35) i (36) są równoważne następującym definicjom parametrów  $D_{FW}$  i  $V_{FW}$ :

$$D_{FW} = - \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} \frac{1}{P}, \quad (38)$$

$$V_L = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_{0t}^2} \frac{1}{P}. \quad (39)$$

Wyprowadzone powyżej wzory (35)-(36) oraz (38)-(39) na okresowość  $D_{FW}$  i wypukłość  $V_{FW}$  obligacji są bezpośrednimi uogólnieniami analogicznych wzorów wyprowadzonych dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości (tj. dla  $r_{0t} = r, t=1, \dots, T$ ) oraz przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek; por. Jakubowski (2003).

Nietrudno jest zauważyć, że przedstawiony powyżej model Fishera-Weila kwantyfikacji ryzyka zmienności stóp procentowych za pomocą parametrów okresowości  $D_{FW}$  i wypukłości  $V_{FW}$  obligacji został sformułowany przy znacznie bardziej ograniczających założeniach (31) – w porównaniu z rozpatrywanym poprzednio schematem (22) dynamiki zmian krzywej dochodowości. Tak więc zdaniem autora – model ten ma w chwili obecnej znaczenie wyłącznie "historyczne". Jest on rozpatrywany w niniejszej pracy tylko z tego powodu, że analizowane w dalszej części parametry tzw. czynnikowej okresowości  $D_f$  i czynnikowej wypukłości  $V_f$  obligacji - są określonymi uogólnieniami zdefiniowanych powyżej parametrów  $D_{FW}$  i  $V_{FW}$ .

#### 4. Podstawowe twierdzenie o immunizacji, możliwe uogólnienia oraz optymalizacja portfela.

Powrócimy teraz do klasycznych definicji Macaulaya parametrów okresowości i wypukłości obligacji oraz zaprezentujemy tzw. podstawowe twierdzenie o immunizacji portfela ze względu na pojedyncze zobowiązanie finansowe. Podamy również interpretacje tego twierdzenia oraz przedstawimy zarys dowodu. Szczegółowy dowód, wyprowadzony przez autora niezależnie od innych dowodów z tego zakresu - można znaleźć w pracy Jakubowski (2003); por. również Bierwag (1987). W dalszej kolejności, przedstawimy zagadnienie optymalnego wyboru zimmunizowanego portfela obligacji.

W prowadzonych rozważaniach dla uproszczenia założymy, że struktura terminowa stóp procentowych *spot* jest płaska, tj.

$$r_{0t} = r \quad \text{oraz} \quad dr_{0t} = dr; \quad \forall t=1, \dots, T,$$

gdzie  $dr$  - przyrost skończony.

**Twierdzenie 1** (Podstawowe twierdzenie o immunizacji):

- (i) Załóżmy, że zadany jest horyzont inwestycyjny  $h$ , przy czym w chwili  $\tau = h$  inwestor musi spłacić zobowiązanie finansowe (*liability*)  $L$ . W celu wypełnienia tego zobowiązania oraz osiągnięcia ewentualnie dodatkowych zysków (*excess return*) inwestor kupuje na rynku w chwili  $\tau = 0$  portfel obligacji o określonej strukturze strumieni finansowych.
- (ii) Ponadto, załóżmy, że wartość bieżąca zobowiązania finansowego  $L$  w chwili początkowej  $\tau = 0$ , wynikająca ze zdyskontowania zobowiązania  $L$  na chwilę bieżącą według obowiązującej w chwili  $\tau = 0$  rynkowej stopy procentowej  $r$  – jest zadana i równa wartości początkowej  $P = P_0$  analizowanego portfela obligacji.
- (iii) Należy tak dobrać strumienie finansowe analizowanego portfela obligacji, aby przyszła wartość tego portfela w chwili  $\tau = h$  była równa co najmniej wartości  $L$  przyszłego zobowiązania finansowego. Co więcej ma to nastąpić niezależnie od nieoczekiwanych zmian  $dr$  rynkowej stopy procentowej  $r$ , jaka może wystąpić bezpośrednio po zakupie rozpatrywanego portfela.

Portfelem spełniającym postulaty (i) – (iii) – dla niezbyt dużej zmiany  $dr$  stopy procentowej - jest każdy portfel obligacji, którego parametr okresowości (Macaulaya)  $D$  jest równy horyzontowi inwestycyjnemu  $h$ ; tj.

$$D = h \quad . \quad (40)$$

### Zarys dowodu:

Najpierw, dokonamy następującej interpretacji założeń rozpatrywanego twierdzenia. Przyjmijmy, że mamy do dyspozycji obligację (lub portfel obligacji) o strumieniach finansowych  $C_t$ ,  $t = 1, \dots, h, \dots, T$ . Przyjmijmy również, że w chwili  $h$  mamy spłacić zobowiązanie finansowe  $L$ . Celem naszym jest taki dobór parametrów obligacji (lub portfela obligacji) aby po upływie okresu  $h$  wartość wypadkowa inwestycji w daną obligację była równa  $L$  niezależnie od losowych zmian rynkowej stopy procentowej  $r$ .

Wprowadzimy oznaczenia:  $\tau = 0, 1, 2, 3, \dots$  - czas bieżący;

$V_h(r)$  - wartość inwestycji w obligację w chwili  $\tau = h$ , jako funkcja rynkowej stopy procentowej  $r$ ;

$P = \sum_{t=1}^{\tau} \frac{C_t}{(1+r)^t}$  - wartość bieżąca obligacji dla chwili  $\tau = 0$ ;

$P_L = \frac{L}{(1+r)^h}$  - wartość bieżąca zobowiązania finansowego  $L$  dla  $\tau = 0$ .

Wartość inwestycji w obligację brana pod uwagę w przyszłej chwili  $\tau = h$  jest następująca:

$$V_h(r) = \sum_{\tau=1}^h C_{\tau} (1+r)^{h-\tau} + \sum_{\tau=1}^{\tau=h} \frac{C_{h+\tau}}{(1+r)^{\tau}} \quad . \quad (41)$$

Jak więc można zauważyć, wartość ta składa się z dwóch członów, przy czym członki te zależą w sposób przeciwny od ryzyka stopy procentowej  $r$ . Ze spadkiem stopy procentowej  $r$  spadają bowiem wpływy z reinwestycji (na chwilę  $\tau = h$ ) odsetek  $C_{\tau}$  od obligacji. Mówimy w tym przypadku o tzw. ryzyku reinwestowania. Jednocześnie, ze spadkiem stopy procentowej  $r$  wzrasta wartość rynkowa obligacji rozpatrywanej (w chwili  $\tau = h$ ) dla horyzontu

czasowego  $T-h$ . Wynika to bezpośrednio z drugiego członu wzoru (41). Odwrotna sytuacja występuje przy założeniu wzrostu stopy  $r$ ; wzrasta bowiem wówczas pierwszy człon wzoru (41) wynikający z reinwestycji odsetek według wyższej stopy procentowej. Maleje natomiast człon drugi, bowiem przy wzroście stopy procentowej maleje wartość rynkowa analizowanej obligacji, rozpatrywana w chwili  $\tau=h$ ; mówimy w tym przypadku o tzw. ryzyku okresu posiadania lub o ryzyku cenowym (*holding period risk*).

Podstawowym pytaniem, jakie można w analizowanym przypadku sformułować jest następujące pytanie: dla jakiego okresu  $h$  wskazane powyżej przeciwstawne zmiany dwóch członów wyrażenia (41) spowodowane losowymi zmianami stopy procentowej  $r$  - całkowicie się znoszą tak, że wartość inwestycji  $V_h(r)$  pozostaje niezmienna. Innymi słowy, pytaniem jest - dla jakiego horyzontu inwestycyjnego  $h$  ryzyko reinwestowania jest całkowicie kompensowane przez ryzyko cenowe rozpatrywanej obligacji. Odpowiedzią na to pytanie jest właśnie *podstawowe twierdzenie o immunizacji*. A mianowicie, dla horyzontu czasowego  $h$  równego okresowości  $D$  analizowanej obligacji (bądź portfela obligacji) oba wspomniane powyżej rodzaje ryzyka stopy procentowej całkowicie się kompensują; przynajmniej dla niewielkich zmian  $dr$  stopy procentowej  $r$ . Tak więc dla zadanego horyzontu inwestycyjnego  $h$  wystarczy dostosować do tego horyzontu okresowość  $D$  rozpatrywanej obligacji (aby zachodziło  $h=D$ ) i wówczas wartość inwestycji  $V_h(r)$  jest niezależna od ryzyka stopy procentowej.

Formalny dowód rozpatrywanego twierdzenia przebiega w trzech krokach (Jakubowski, 2003): W kroku pierwszym wykazuje się, że warunek (ii) mówiący o tym, że wartość bieżąca  $P$  (dla  $\tau=0$ ) analizowanego portfela obligacji powinna być równa wartości bieżącej  $P_L$  zobowiązania (tj.  $P=P_L$ ) - jest warunkiem koniecznym immunizacji. Jest to dosyć oczywiste, bowiem z warunku  $P=P_L$  bezpośrednio wynika, że dla chwili  $\tau=h$  - przy nie zmienionej stopie procentowej  $r$  - zachodzi  $V_h(r)=L$ , gdzie  $L$  - wartość przyszłego zobowiązania. Tak więc o ile rozpatrywany portfel ma być zimmunizowany ze względu na dowolne, niewielkie zmiany  $dr$  stopy procentowej  $r$ , no to przede wszystkim - powyższa równość powinna być spełniona.

W drugim kroku dowodu, przyrost  $dV_h(r)=V_h(r+dr)-V_h(r)$  przybliża się różniczką zupełną funkcji  $V_h$ . Zadając następnie, aby pochodna funkcji  $V_h(r)$  ze względu na  $r$  była równa zeru - z otrzymanego warunku stacjonarności, po dosyć złożonych przekształceniach - otrzymuje się warunek:

$$\sum_{t=1}^T \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P = h, \quad \text{a tym samym} \quad D = h, \quad (42)$$

co wynika bezpośrednio z definicji (8) okresowości  $D$  obligacji.

Natomiast w kroku trzecim dowodzi się, że funkcja  $V_h(r)$  jest - poza pewnym szczególnym przypadkiem - funkcją ściśle wypukłą; por. również Bierwag (1987). Oznacza to, że wyznaczony z warunku  $D=h$  punkt stacjonarny tej funkcji ze względu na stopę procentową  $r$  jest jednocześnie jej minimum globalnym. Tym samym, zarówno dodatnia jak i ujemna zmiana  $dr$  stopy  $r$  powoduje, że  $V_h(r+dr) \geq V_h(r) = L$ ; a więc analizowany portfel jest zimmunizowany ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian rynkowej stopy procentowej.

c.n.d.

W cytowanej już kilkakrotnie pracy Bierwaga (1987) można znaleźć interesujące przykłady obliczeniowe ilustrujące analizowane w tym punkcie podstawowe twierdzenie o

immunizacji. Również, m.in. w pracy Eltona, Grubera (2003) zawiera przykład zastosowania tego twierdzenia. Natomiast w pracy Prismana (1986) rozpatruje się zagadnienie immunizacji, jako określony problem maksy-minowy. Literatura dotycząca tej problematyki jest zresztą dosyć obszerna; por. Jakubowski (2003), Kaufman, Bierwag, Toevs (1982), Prisman, Shoves (1988), Schaefer (1984) i inni.

### Możliwe uogólnienia:

Przedstawiony powyżej dowód podstawowego twierdzenia o immunizacji można uogólnić na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz przy założeniu dynamiki możliwych zmian tej krzywej przebiegającej według schematu (22), w którym dodatkowo przyjmuje się, że parametr  $L=1$ ; por. Zaremba (1995, 1998). Kolejne uogólnienie tego dowodu podano w pracy Zaremby, Smoleńskiego (2000a), w której założono, że ewolucja zmian krzywej dochodowości z upływem czasu bieżącego może przebiegać według schematu:

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = g_t \frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (43)$$

gdzie  $g_t > 0$  - zadane parametry identyfikowane na podstawie danych z przeszłości (*uwaga*: w cytowanej pracy nie wprowadzono warunku dodatniości parametru  $g_t$  - co wg autora niniejszego opracowania było błędem).

Punktem wyjściowym wspomnianych powyżej uogólnień podstawowego twierdzenia o immunizacji jest przyjęcie, że każde pojedyncze zobowiązania finansowe  $L$  o terminie zapadalności  $h$ , można formalnie traktować jako pewną wirtualną obligację czysto-dyskontową. Można więc w tym przypadku mówić o parametrach okresowości  $D_L$  i wypukłości  $V_L$  zobowiązania finansowego i stosować odnośne wzory i twierdzenia dotyczące tych parametrów. Na przykład, dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości, z zależności (17) mamy:

$$D_L = h, \quad V_L = \frac{1}{2} h(h+1). \text{ Oczywiście, podobne podejście można zastosować dla przypadku}$$

istnienia strumienia przyszłych zobowiązań; wówczas równoważna tym zobowiązaniom obligacja wirtualna - będzie "obligacją wielokuponową". Podejście to zastosujemy w dalszej części pracy - w trakcie formułowania czynnikowego modelu zarządzania portfelem obligacji.

W cytowanej powyżej pracy Zaremby i Smoleńskiego (2000a), dla krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz dla schematu (43) wykazano, że warunkiem koniecznym immunizacji analizowanego portfela obligacji jest, aby: (1) wartość bieżąca portfela była równa wartości bieżącej zobowiązania (tj.  $P = P_L$ ); (2) okresowość  $D$  portfela była równa okresowości  $D_L$  zobowiązania (tj.  $D = D_L$ ); oraz (3) wypukłość  $V$  portfela była wyższa lub równa wypukłości  $V_L$  zobowiązania (tj.  $V \geq V_L$ ). Ponadto wykazano, że warunki (1)-(3) są jednocześnie warunkami koniecznymi i dostatecznymi immunizacji.

Zauważmy, że w przypadku prezentowanego na początku tego punktu klasycznego twierdzenia o immunizacji, rozpatrywanego dla płaskiej krzywej dochodowości - powyższy warunek(3), dotyczący wypukłości portfela obligacji - był spełniony automatycznie. Wynikało to bowiem wprost ze wspomnianego w punkcie 3.1 niniejszej pracy faktu, iż w przypadku płaskiej krzywej dochodowości, spośród wszystkich obligacji (bądź portfeli obligacji) o tej samej okresowości  $D$  - obligacja czysto-dyskontowa, a więc w naszym przypadku - zobowiązanie  $L$  - charakteryzuje się minimalną wypukłością; Jakubowski (2003). Niestety, stwierdzenie to nie jest w ogólności prawdziwe, gdy rozpatrujemy krzywą dochodowości o dowolnym kształcie, charakteryzująca się dynamiką zmian zachodzących według schematu (22) lub jeszcze bardziej ogólnego - schematu (43).

### Zagadnienie optymalizacji:

W praktyce, trudno jest znaleźć pojedynczą obligację spełniającą warunki konieczne i dostateczne immunizacji. Dlatego zakładamy, że inwestor tworzy portfel  $P$  obligacji  $O_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) o udziałach procentowych  $w_1, w_2, \dots, w_N$  i o okresowościach  $D_1, D_2, \dots, D_N$ . Portfel ten dobierany jest tak, aby zachodził warunek konieczny, tj.

$$P = \sum_{i=1}^N x_i P_i = P_L, \quad (44)$$

gdzie  $x_i$  - liczba obligacji  $O_i$  w portfelu.

Ponadto, w przypadku modelu klasycznego (tj. dla płaskiej krzywej dochodowości) ze względu na warunek (40) musi zachodzić

$$\sum_{i=1}^N w_i D_i = h, \quad \text{przy czym} \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1; \quad w_i \in [0,1], \quad \forall i=1, \dots, N. \quad (46)$$

We wzorze (45) wykorzystaliśmy podaną poprzednio zależność (20) na okresowość  $D_p$  portfela obligacji.

Układ równań (45), (46) ze względu na wektor udziałów wartościowych  $[w_i, i=1, \dots, N]$  ma dla  $N > 2$  nieskończenie wiele rozwiązań, co oznacza istnienie wielu możliwych zimmunizowanych portfeli obligacji. W praktyce, można na przykład wybrać ten portfel, który charakteryzuje się najwyższą stopą zwrotu z dokonanej inwestycji. Stopa ta jest pewną funkcją  $Q(w_1, w_2, \dots, w_N)$  udziałów procentowych poszczególnych walorów w portfelu.

Formalnie, rozpatrywane zagadnienie optymalizacji portfela obligacji można zapisać następująco:

$$Q(w_1, w_2, \dots, w_N) \xrightarrow{\{w_i\}} MAX, \quad (47)$$

przy ograniczeniach (45) i (46).

W literaturze przedmiotu, często dokonuje się linearyzacji funkcji celu  $Q(w_1, w_2, \dots, w_N)$  wprowadzając w ten sposób problem (45) – (47) do zagadnienia programowania liniowego; por. Dahl, Meeraus, Zenios (1993).

W przypadku przedstawionego w tym punkcie skrótowo uogólnionego modelu immunizacyjnego, rozpatrywanego dla schematu (43) dynamiki zmian krzywej dochodowości o dowolnym kształcie, w analizowanym zagadnieniu optymalizacyjnym, ograniczenia równościowe będące odpowiednikami ograniczeń (45), (46) - należy jeszcze uzupełnić ograniczeniem nierównościowym, dotyczącym wypukłości analizowanego portfela obligacji; tj.

$$\sum_{i=1}^N w_i V_i \geq V_L,$$

gdzie  $V_i$  - wypukłość obligacji  $O_i$ ,  $V_L$  - parametr wypukłości zobowiązania  $L$ .

## 5. Aktywne zarządzanie portfelem obligacji - strategię typu *barbell*, *bullet*, *ladder*.

Rzeczywista stopa zwrotu z inwestycji w obligacje rozpatrywana dla horyzontu czasowego równego jednemu okresowi odsetkowemu (tzw. *period-by-period return*), zależy ogólnie rzecz biorąc nie tylko od zmiany bezwzględnego poziomu stóp procentowych *spot*. Zależy ona również od przyszłej zmiany kształtu obowiązującej dla danego rynku krzywej dochodowości, a więc od tego czy nastąpi efekt „spłaszczenia” tej krzywej – czy też krzywa ta stanie się bardziej stroma; w j. angielskim efekty te są określane odpowiednio jako *flattening* oraz *steepening*.

Tak więc kolejna z omawianych tu metod zarządzania portfelem obligacji wiąże się z prognozowaniem przyszłego kształtu krzywej dochodowości, a ujmując to dokładniej – dokonuje się w tym przypadku prognozy przyszłej rozpiętości (tj. *spreadu*) pomiędzy długoterminowymi stopami procentowymi a stopami krótkoterminowymi. Strategia dostosowywania struktury portfela inwestycyjnego do przewidywanego przyszłego kształtu krzywej dochodowości, jest w literaturze amerykańskiej określana jako: *yield curve strategy*; Fabozzi (2000).

Polega to na przeprowadzeniu badań symulacyjnych dotyczących generowania różnych scenariuszy przyszłych zmian kształtu krzywej dochodowości, a następnie bada się wpływ tych zmian na efektywność inwestycyjną wynikającą ze stosowania trzech klas portfeli obligacji: portfeli typu *barbell* (sztanga), portfeli typu *bullet* (pocisk) oraz portfeli typu *ladder* (drabina). Przykładowe strumienie finansowe, charakteryzujące każdy z wymienionych typów portfeli pokazano już na rysunku 2. Portfel *barbell* charakteryzuje się maksymalnym „rozrzutem” strumieni finansowych w stosunku do portfela *bullet*, w którym strumienie te są skupione wokół jednego punktu na osi czasu. Portfel *ladder* jest portfelem pośrednim – strumienie finansowe tego portfela są rozłożone równomiernie wzdłuż osi czasu; od najkrótszych terminów zapadalności – do terminów najdłuższych.

Portfele powyższych trzech typów najłatwiej byłoby skonstruować dokonując zakupu do każdego z tych portfeli – wyłącznie obligacji czysto-dyskontowych o odpowiednich terminach zapadalności. W przypadku braku na analizowanym rynku wszystkich niezbędnych do powyższych celów obligacji czysto-dyskontowych, w celu uzyskania odpowiedniej aproksymacji struktur strumieni finansowych typu *barbell*, *bullet* i *ladder* – można posłużyć się zakupem obligacji wielokuponowych o odpowiednich wartościach nominalnych oraz o odpowiednich terminach do wykupu (*terms to maturity*). Oczywiście, w tym (bardziej realnym w praktyce) przypadku, wykresy rozpatrywanych strumieni finansowych dla każdego z trzech typów portfeli będą tylko pewnym przybliżeniem „idealnych” struktur prezentowanych na rysunku 2.

Interesujące jest następujące zagadnienie. Przyjmijmy, że dla założonej dynamiki zmian krzywej dochodowości – niech to będzie na przykład dynamika wynikająca ze wzoru (31) – skonstruowano portfele o trzech podanych powyżej własnościach. Przyjmijmy również, że portfele te dobrano w taki sposób, że parametry okresowości  $D$  tych portfeli są jednakowe. Owa okresowość  $D$  reprezentowana jest na rysunku 2 przez położone w tym samym miejscu punkty podparcia „dźwigni” tworzonych dla każdego z trzech analizowanych przypadków – przez osie poziome. Na osiach tych umieszczono „ciężary” (po pionowe słupki) reprezentujące rozkład w czasie wartości bieżących strumieni finansowych rozpatrywanych portfeli typu *barbell*, *bullet* i *ladder*. Zauważmy, że w każdym z trzech analizowanych przypadków owe dźwignie są w równowadze.

Z powyższego wynika interesująca interpretacja fizyczna parametru okresowości  $D$  dowolnego portfela obligacji, jako środka masy wspomnianych „ciężarów” – tj. wartości

bieżących strumieni finansowych tego portfela. Oczywiście podana interpretacja odnosi się w równej mierze do pojedynczej obligacji – a nie tylko do portfela tych walorów.

W analizowanym powyżej przypadku można nietrudno udowodnić, że portfel typu *barbell* będzie portfelem o największej wypukłości, portfel *bullet* będzie charakteryzował się najmniejszą wypukłością oraz portfel *ladder* będzie portfelem o pośredniej wypukłości; por. Zaremba (1998).

W dalszych rozważaniach, założymy trzy możliwe rodzaje przyszłych zmian struktury terminowej stóp procentowych: tj. przesunięcia równoległe krzywej dochodowości, ruchy zwiększające stromość tej krzywej oraz ruchy w kierunku „wypłaszczenia” jej przebiegu. Zauważmy, że te dwa ostatnie typy zmian analizowanej krzywej są niezgodne z założonym w schemacie (5) postulatem, że rozpatrujemy co prawda krzywą dochodowości o dowolnym kształcie, jednak możliwe są jedynie równoległe przesunięcia tej krzywej.

Dla każdej z postulowanych powyżej zmian struktury terminowej stóp procentowych, możemy następnie obliczyć rzeczywistą (jednookresową) stopę zwrotu z inwestycji w każdy z trzech typów analizowanych portfeli. Badania takie przeprowadzili R.E. Dattatreya i F.J. Fabozzi (1995). Okazało się, że dla stosunkowo znacznego zakresu zmian stóp procentowych, strategia *barbell* okazała się najlepszą strategią inwestycyjną w przypadku, gdy oczekujemy ruchu krzywej dochodowości w kierunku jej spłaszczenia; por. też Van Horne (1994). Również, strategia *barbell* zapewniała najwyższą rzeczywistą stopę zwrotu, w przypadku znacznych przesunięć równoległych krzywej dochodowości oraz w przypadku znacznych ruchów w kierunku zwiększenia stromości tej krzywej.

Natomiast strategia *bullet* (tj. o silnie skoncentrowanych strumieniach finansowych) okazywała się być lepszą strategią w przypadkach nieznacznych zmian stóp procentowych prowadzących do przesunięć równoległych krzywej dochodowości oraz prowadzących do zwiększenia jej stromości ale tylko w ograniczonym zakresie.

Cytowane powyżej badania symulacyjne, jakkolwiek doprowadziły do dosyć użytecznych wniosków, powinny być powtórzone przy bardziej ogólnych założeniach co do dynamiki możliwych zmian struktury terminowej; tj. przy założeniach, przedstawionych za pomocą wzorów (22), (43) lub w jakikolwiek inny, bardziej ogólny sposób; por. Bierwag (1987), Fabozzi, Fong (1994), Litterman, Scheinkman (1991). Przyjęcie przez R.E. Dattatreya i F.J. Fabozziego początkowego założenia, że możliwe są tylko równoległe przesunięcia analizowanej krzywej dochodowości, obliczenie na tej podstawie parametrów okresowości i wypukłości rozpatrywanych trzech typów portfeli, a następnie badanie – co się wydarzy, gdy przesunięcia tej krzywej nie będą jednak równoległe – wydaje się bowiem być zbyt dużą niekonsekwencją.

Ujmując to dokładniej, zawsze, gdy definiujemy parametry okresowości i wypukłości obligacji (bądź portfeli obligacji) – musimy przyjąć pewne założenia co do możliwej dynamiki przyszłych zmian struktury terminowej stóp procentowych. Chodzi w tym przypadku tylko o to, żeby założenia te nie były tak silnie ograniczające, jak miało to miejsce w przypadku cytowanych badań R.E. Dattatreya i F.J. Fabozziego. Jednak sam kierunek badań tego typu jest interesujący i może mieć duże znaczenie z punktu widzenia zastosowań praktycznych.

## 6. Analiza czynnikowa dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych

Jednym z nowszych podejść stosowanych dla celów analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych są tzw. modele czynnikowe, w których wykorzystuje się elementy znanej powszechnie z dziedziny statystyki matematycznej i analizy danych - teorii analizy czynnikowej (*Factor Analysis*); Harman (1967), Koronacki, Ćwik (2005).

Modele te są najbardziej ogólne w tym sensie, że w stosunku do dynamiki zmian stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$  ( $t=1, \dots, T$ ) nie wprowadza się żadnych założeń upraszczających, jak to



było w przypadku omówionych poprzednio podejść klasycznych. W zamian za to stawia się hipotezę, że zmiany stóp procentowych  $r_{\tau}$  dla kolejnych chwil  $\tau=1,2,3,\dots$ , są generowane przez kombinacje liniową pewnej zadanej liczby nieskorelowanych czynników wspólnych (*common factors*) oraz czynników swoistych (*unique factors*), traktowanych jako zmienne resztowe modelu. Należy przy tym dodać, że analizowane czynniki wspólne nie zawsze mają określoną interpretację ekonomiczną lub jakąkolwiek inną; jest to niekiedy możliwe dopiero po przeprowadzeniu tzw. rotacji ortogonalnych przestrzeni czynnikowej. Czynniki te stanowią pewien zbiór "ukrytych" zmiennych, co do których zakłada się, że są one źródłem określonych korelacji pomiędzy układem zmiennych pierwotnych, opisujących dany system.

Z powyższego wynika, że (pomimo "zewnętrznego" podobieństwa modeli matematycznych) analizowanych czynników wspólnych, nie należy w żadnym przypadku utożsamiać ze zmiennymi egzogenicznymi rozpatrywanymi powszechnie w klasycznej analizie regresyjnej. Analiza regresyjna i analiza czynnikowa to dwie istotnie różne metody, u których podstaw stoją różne założenia i przed którymi postawiono różne cele. Celem analizy czynnikowej jest zastąpienie zbioru dużej liczby wzajemnie skorelowanych zmiennych, małą liczbą ortogonalnych (a więc nieskorelowanych) czynników, które w możliwie maksymalny sposób przybliżyłyby zasoby informacji reprezentowanej przez zmienne wyjściowe. Tak więc ortogonalizacja i znaczne zmniejszenie wymiarowości zagadnienia - to dwa cele, jakie postawiono przed analizą czynnikową.

W modelu czynnikowym obligacji, wyznaczającym zależność niespodziewanej stopy zwrotu od ryzyka stóp procentowych, w miejsce klasycznych definicji Macaulaya okresowości i wypukłości obligacji wprowadza się tzw. czynnikową okresowość (*factor duration*) i czynnikową wypukłość (*factor convexity*). Następnie, analizę niespodziewanych zmian stopy zwrotu portfela obligacji, spowodowanych zmianami  $dr_t$  ( $t=1,\dots,T$ ) rynkowych stóp procentowych, zastępuje się analizą tych zmian ze względu na zmiany czynników wspólnych  $F_f$  ( $f=1,\dots,m$ ). Czynniki te, jako wielkości wspólne dla stóp procentowych  $r_{\tau}$ , nie zależą od terminów zapadalności  $t=1,\dots,T$  (zależą one jedynie od czasu bieżącego  $\tau=1,2,3,\dots$ ). W związku z tym, nie są w rozpatrywanym przypadku potrzebne dodatkowe, upraszczające założenia co do dynamiki zmian stóp  $r_{\tau}$  - będące podstawą do definiowania (oraz ewentualnej modyfikacji) prezentowanych poprzednio formuł Macaulaya; por. założenia (3), (22), (31), (43).

Otrzymane w ten sposób czynnikowe modele immunizacji nabierają ostatnio coraz większego znaczenia dla teorii i praktyki zarządzania portfelami obligacji; mogą one również stanowić podstawę do tworzenia komercyjnych pakietów komputerowego wspomagania decyzji w tej dziedzinie. Pierwsze prace z tego zakresu zostały opublikowane przez cytowane już prace Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) oraz Dahla (1993). Dotyczyły one czynnikowej analizy struktury terminowej stóp procentowych oraz konstruowania portfeli immunizacyjnych dla rynków obligacji w USA oraz w Danii. W Polsce, współautorem pierwszych publikacji z tej dziedziny jest autor niniejszej pracy; por. Kulikowski, Bury Jakubowski (1995., 1996).

Poniżej - oraz w następnych punktach - przedstawimy podstawy teoretyczne rozpatrywanego podejścia. Należy podkreślić, że w cytowanych publikacjach zagranicznych podstawy te SA podane tylko w bardzo ogólnym zarysie - i często, bez uzasadnienia wprowadzanych wzorów i zależności. Ponadto, w pracach tych pojawiły się liczne błędy - co dodatkowo utrudnia zrozumienie prezentowanych w nich modeli. Jako przykład - wystarczy podać wydaną przez Cambridge University Press pracę Dahla (1993), w której autor (na stronie 195, pierwszy akapit) "proponuje" wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych z macierzy prostokątnej - co oczywiście nie jest możliwe.

Dlatego, w niniejszej pracy podano niezależne - od istniejących, fragmentarycznych publikacji - wyprowadzenie od podstaw analizowanych modeli czynnikowych immunizacji portfeli obligacji. W tym też sensie, prezentowane tu wyniki można uznać - zdaniem autora - za oryginalne.

Przedstawiony w niniejszym punkcie materiał został szerzej (lecz w nieco innym ujęciu) przedstawiony przez autora w Raporcie IBS PAN: Jakubowski (2007).

### 5.1. Model czynnikowy struktury terminowej

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $r_t = r_{0t}$  - rynkowa stopa procentowa *spot*, tj. rentowność do wykupu (YTM) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu  $t=1, \dots, T$  (tj. dla uproszczenia zapisu pominiemy indeks "0" przy oznaczeniu  $r_{0t}$ ).
- $TS(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_t(\tau), \dots, r_T(\tau)]$  - struktura terminowa stóp procentowych *spot*, określona przez wektor wartości  $\{r_t(\tau), t=1, \dots, T\}$ , dla kolejnych chwil  $\tau=1, 2, 3, \dots, M$ .
- $X = [r_{\tau t}]_{M \times T}$  - macierz obserwacji stóp procentowych  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ), dla kolejnych chwil  $\tau=1, 2, 3, \dots, M$ .

Rynkowe stopy procentowe *spot*  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) traktujemy jako zmienne losowe, przy czym zakładamy, że dysponujemy macierzą obserwacji  $X$  tych zmiennych utworzoną w ten sposób, że  $t$ -ta kolumna tej macierzy przedstawia realizacje zmiennej losowej  $r_t$  w kolejnych chwilach  $\tau=1, \dots, M$ . Kolejne wiersze tej macierzy określone są więc przez wektory wierszowe

$$TS(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_t(\tau), \dots, r_T(\tau)] = [r_{\tau 1}, \dots, r_{\tau t}, \dots, r_{\tau T}], \quad (48)$$

reprezentujące strukturę terminowa stóp procentowych  $TS$  w chwilach  $\tau=1, \dots, M$ ; por. Tablica 1.

Tablica 1. Postać macierzy obserwacji  $X = [r_{\tau t}]$  o wymiarze  $(M \times T)$

	$r_1$	...	$r_t$	...	$r_T$
$TS(\tau=1)$	$r_{11}$	...	$r_{1t}$	...	$r_{1T}$
$TS(\tau=2)$	$r_{21}$	...	$r_{2t}$	...	$r_{2T}$
⋮					
$TS(\tau)$	$r_{\tau 1}$	...	$r_{\tau t}$	...	$r_{\tau T}$
⋮					
$TS(\tau=M)$	$r_{M1}$	...	$r_{Mt}$	...	$r_{MT}$
	$\bar{r}_1$		$\bar{r}_t$		$\bar{r}_T$
	$\sigma_1$		$\sigma_t$		$\sigma_T$

Podane w ostatnich dwu wierszach powyższej tablicy estymatory nieobciążone wartości oczekiwanych oraz wariancji zmiennych  $r_t$  określamy ze znanych wzorów:

$$\bar{r} = \frac{1}{M} \sum_{\tau=1}^M r_{\tau i}, \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{\tau=1}^M (r_{\tau i} - \bar{r}_i)^2; \quad i=1, \dots, T \quad (49)$$

Na podstawie wartości poszczególnych kolumn macierzy obserwacji  $X$  możemy wyznaczyć estymatory współczynników kowariancji  $\sigma_{ii}$  oraz współczynników korelacji  $\rho_{ii}$  pomiędzy stopami procentowymi  $r_i$  oraz  $r_j$  ( $i, j=1, \dots, T$ ); a mianowicie

$$\sigma_{ii} = \text{cov}(r_i, r_i) \triangleq \frac{1}{M-1} \sum_{\tau=1}^M (r_{\tau i} - \bar{r}_i)(r_{\tau i} - \bar{r}_i), \quad (50)$$

$$\rho_{ii} = \text{cor}(r_i, r_i) \triangleq \frac{\text{cov}(r_i, r_i)}{\sigma_i \sigma_i} = \frac{\sum_{\tau=1}^M (r_{\tau i} - \bar{r}_i)(r_{\tau i} - \bar{r}_i)}{\sqrt{\sum_{\tau=1}^M (r_{\tau i} - \bar{r}_i)^2 \times \sum_{\tau=1}^M (r_{\tau i} - \bar{r}_i)^2}}$$

Współczynniki kowariancji  $\sigma_{ii}$  oraz korelacji  $\rho_{ii}$  tworzą odpowiednio - macierz kowariancji  $R$  oraz macierz korelacji  $Q$  o wymiarach  $(T \times T)$ ; postaci tych macierzy przedstawiono w Tabelicy 2. Są to macierze symetryczne oraz dodatnio określone (z założenia).

**Tabelica 2.** Macierze współczynników kowariancji  $R$  i korelacji  $Q$  pomiędzy zmiennymi  $r_i, r_j$ ; ( $i, j=1, \dots, T$ )

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \dots & \sigma_T^2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Wyznaczona na podstawie obserwacji macierz kowariancji  $R$  (lub - w alternatywnym sformułowaniu - macierz korelacji  $Q$ ) ma zasadnicze znaczenie dla prezentowanej metody analizy czynnikowej; stanowić ona bowiem będzie punkt wyjściowy do dalszych rozważań.

Dokonując standaryzacji realizacji zmiennych losowych  $r_i$  ( $i=1, \dots, T$ ); tj.

$$r_{\tau i}^* = (r_{\tau i} - \bar{r}_i) / \sigma_i, \quad \forall \tau=1, \dots, M; \quad i=1, \dots, T, \quad (52)$$

otrzymamy  $(M \times T)$  wymiarową standaryzowaną macierz obserwacji  $Z = [r_{\tau i}^*]$ , o postaci analogicznej jak macierz  $X$  przedstawiona w Tabelicy 1. Wykorzystując teraz zależności (50) i (52), po przekształceniach - otrzymamy (w przypadku estymatorów nieobciążonych) następujące wzory macierzowe, wyznaczające macierz kowariancji  $R$  oraz macierz korelacji  $Q$  (por. Jakubowski, 2007):

$$R = \text{cov}(r) = \frac{1}{M-1} X^T X - \frac{M}{M-1} \bar{r} \bar{r}^T, \quad Q = \text{cor}(r) = \frac{1}{M-1} Z^T Z, \quad (53)$$

gdzie  $\bar{r} = [\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_T]^T$ .

## Model czynnikowy

W modelu czynnikowym, stopy procentowe *spot* przedstawia się w postaci następującej kombinacji liniowej ortogonalnych czynników wspólnych oraz czynników swoistych:

$$r_t = \bar{r}_t + \alpha_{1f}F_{1f} + \dots + \alpha_{jf}F_{jf} + \alpha_{mf}F_{mf} + \alpha_t \varepsilon_t, \quad (54)$$

lub też, zapisując to bardziej skrótowo

$$r_t = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^m \alpha_{jf} F_{jf} + \alpha_t \varepsilon_t, \quad \forall t=1, \dots, T, \quad (55)$$

gdzie  $F_{jf}$  - czynniki wspólne ( $f=1, \dots, m$ ),  $\varepsilon_t$  - czynniki swoiste ( $t=1, \dots, T$ ),  $\alpha_{jf}$  - ładunek czynnika wspólnego  $F_{jf}$  w zmiennej  $r_t$  (*common factor loading*),  $\alpha_t$  - ładunek czynnika swoistego w zmiennej  $r_t$  (*unique factor loading*).

W modelu czynnikowym (55) przyjmujemy następujące założenia:

- (i) Liczba  $m$  czynników wspólnych jest z góry zadana; przy czym  $m \leq T$  (w praktyce  $m \ll T$ ).
- (ii) Czynniki wspólne  $F_{jf}$  ( $f=1, \dots, m$ ) są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi; tj.  $\bar{F}_{jf} = 0$ ,  $\text{var}(F_{jf}) = 1$ . Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, tj.

$$\rho(F_{jf}, F_{kf}) = 0; \quad \forall f, k=1, \dots, m \quad (f \neq k), \quad (56)$$

gdzie przez  $\rho(\cdot, \cdot)$  oznaczono współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi.

Ponadto, czynniki wspólne  $F_{jf}$  oraz czynniki swoiste  $\varepsilon_t$  są również wzajemnie nieskorelowane, czyli

$$\rho(F_{jf}, \varepsilon_t) = 0; \quad \forall f=1, \dots, m; \quad t=1, \dots, T. \quad (57)$$

- (iii) Czynniki swoiste  $\varepsilon_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi; tj.  $\bar{\varepsilon}_t = 0$ ,  $\text{var}(\varepsilon_t) = 1$ . Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, czyli

$$\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_l) = 0, \quad \forall t, l=1, \dots, T \quad (t \neq l). \quad (58)$$

Z przedstawionych powyżej założeń wynika, że każdy czynnik wspólny  $F_{jf}$  ( $f=1, \dots, m$ ) ma te same wartości dla wszystkich zmiennych  $r_t$ . Z kolei ładunki czynników wspólnych  $\alpha_{jf}$  ( $t=1, \dots, T; f=1, \dots, m$ ) są wielkościami specyficznymi dla każdej ze zmiennych  $r_t$  w tym sensie, że reprezentują one wrażliwość zmiany zmiennej  $r_t$  ze względu na zmianę czynnika wspólnego  $F_{jf}$ . A dokładniej, ładunki czynnikowe  $\alpha_{jf}$  są równe współczynnikom kowariancji między zmiennymi  $r_t$  a czynnikami wspólnymi  $F_{jf}$ ; bezpośrednio z postaci modelu czynnikowego (55) oraz z założeń (56), (57) mamy bowiem

$$\text{Cov}(r_t, F_{jf}) \stackrel{\Delta}{=} E[(r_t - \bar{r}_t)F_{jf}] = E\left[\left(\sum_{k=1}^m \alpha_{jk} F_{jk} + \alpha_t \varepsilon_t\right)F_{jf}\right] = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} E(F_{jk}F_{jf}) + \alpha_t E(\varepsilon_t F_{jf}) = \alpha_{jf} E(F_{jf}^2) = \alpha_{jf} \quad (59)$$

Z powyższego wynika, że ładunek czynnikowy  $\alpha_{fj}$  jest wielkością o dowolnym znaku, tj.  $\alpha_{fj} \in (-\infty, +\infty)$ . Ponadto, biorąc pod uwagę, że czynnik wspólny  $F_j$  jest zmienną wystandaryzowaną, współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi  $r_t$  i  $F_j$  wynosi

$$\rho(r_t, F_j) = \alpha_{fj} / \sigma_j \in [-1, +1], \quad \forall t = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, m. \quad (60)$$

Z kolei każdy czynnik swoisty  $\varepsilon_t$  jest wyłącznym atrybutem odpowiadającej mu zmiennej  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Gdyby było inaczej, to czynnik ten należałoby po prostu rozpatrywać jako jeden z czynników wspólnych  $F_j$ ; stąd bardzo ważne jest założenie, że czynniki swoiste są wzajemnie nieskorelowane tj.  $\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_l) = 0$ . Wynika stąd bowiem bezpośrednio, że czynnik swoisty  $\varepsilon_t$  zmiennej  $r_t$  jest nieskorelowany z pozostałymi zmiennymi  $r_l$ , tj.

$$\rho(r_t, \varepsilon_l) = 0; \quad \forall l, t = 1, \dots, T; \quad l \neq t. \quad (61)$$

Czynnik swoisty  $\varepsilon_t$  możemy więc interpretować jako tzw. ryzyko specyficzne obligacji czysto-dyskontowej o okresie do wykupu  $t$  oraz rentowności  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Natomiast każdy z czynników wspólnych  $F_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) reprezentuje sobą "jeden rodzaj" ryzyka, które jest wspólne dla wszystkich rozpatrywanych obligacji.

Z modelu czynnikowego (55) oraz z założenia (57) wynika, że ładunek  $\alpha_t$  czynnika swobodnego  $\varepsilon_t$  jest liczbowo równy współczynnikowi kowariancji pomiędzy czynnikiem  $\varepsilon_t$  a zmienną  $r_t$ ; mamy bowiem

$$\text{Cov}(r_t, \varepsilon_t) \stackrel{\Delta}{=} E[(r_t - \bar{r}_t)\varepsilon_t] = E\left[\left(\sum_{k=1}^m \alpha_{tk} F_k + \alpha_t \varepsilon_t\right)\varepsilon_t\right] = \sum_{k=1}^m \alpha_{tk} E(F_k \varepsilon_t) + \alpha_t E(\varepsilon_t^2) = \alpha_{tj}. \quad (62)$$

Jakkolwiek, z teoretycznego punktu widzenia ładunek  $\alpha_t$  - jako współczynnik kowariancji - mógłby być wielkością o dowolnym znaku, w dalszych rozważaniach dodatkowo założymy, że przyjmuje on wartości wyłącznie nieujemne; tj.  $\alpha_t \in [0, +\infty)$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Jest to zresztą zgodne z podaną powyżej interpretacją. Ponadto, ze wzoru (62) oraz z faktu, że czynniki swoiste są zmiennymi wystandaryzowanymi wynika, że współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi  $r_t$  i  $\varepsilon_t$  wyraża się wzorem

$$\rho(r_t, \varepsilon_t) = \alpha_t / \sigma_t \in [0, +1], \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (63)$$

Podsumowując przedstawiony powyżej tok rozumowania można stwierdzić, że metoda analizy czynnikowej wiąże się z założeniem liniowej reprezentacji zbioru wzajemnie skorelowanych zmiennych  $r_t$  - zbiorem zadanej liczby nieskorelowanych między sobą (ukrytych) czynników wspólnych  $F_j$  oraz czynników swoistych  $\varepsilon_t$ , przy czym przyjmuje się, że owe "hipotetyczne" czynniki wspólne są właśnie źródłem korelacji między zmiennymi  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).

Równanie modelu czynnikowego (55) zapisane dla kolejnych dyskretnych chwil czasowych  $\tau = 1, \dots, M$ , ma następującą postać:

$$r_{\tau t} = \sum_{j=1}^m \alpha_{tj} F_{\tau j} + \alpha_t \varepsilon_{\tau t}; \quad \tau = 1, \dots, M; \quad t = 1, \dots, T. \quad (64)$$

W równaniu tym  $r_{\tau}$ ,  $F_{\tau}$  oraz  $\varepsilon_{\tau}$  oznaczają realizacje (dla  $\tau=1, \dots, M$ ) zmiennych losowych  $r_t$ ,  $F_t$  oraz  $\varepsilon_t$ . Jak można zauważyć, wartości ładunków czynnikowych  $a_{t,f}$  oraz  $a_t$  nie zależą od czasu bieżącego  $\tau=1, \dots, M$ ; oznacza to, że wartości ładunków czynnikowych są stałym atrybutem rozpatrywanego modelu (co jest niezmiernie istotne z punktu widzenia dalszych rozważań). Natomiast wartości czynników wspólnych i swoistych zależą oczywiście od czasu bieżącego  $\tau$ .

### Zadanie analizy czynnikowej.

Zadaniem analizy czynnikowej jest wyznaczenie na podstawie zadanej macierzy obserwacji  $X$  - oraz przy założeniu liniowego modelu (55) - kolejno następujących wielkości:

- macierzy kowariancji  $R$  zmiennych  $r_t$ ,  $t=1, \dots, T$ ; tj.

$$R = [\sigma_{tt}]_{T \times T} \quad (65)$$

- ładunków czynników wspólnych  $\alpha_{t,f}$  ( $t=1, \dots, T$ ;  $f=1, \dots, m$ ); ładunki te tworzą tzw. *macierz "zmienna-czynnik"* o postaci

$$A = [\alpha_{t,f}]_{T \times m}, \quad (66)$$

- ładunków czynników swoistych  $\alpha_t$  ( $t=1, \dots, T$ ); ładunki te tworzą macierz diagonalną  $\mathcal{A}$  o wymiarze  $T \times T$ , tj.

$$\mathcal{A} = \text{Diag}(\alpha_t)_{T \times T}, \quad (67)$$

- wartości czynników wspólnych  $F_{\tau,f}$  ( $\tau=1, \dots, M$ ;  $f=1, \dots, m$ ) będących realizacjami zmiennych losowych  $F_f$  w dyskretnych chwilach czasowych  $\tau=1, \dots, M$ ; wartości te tworzą *macierz czynników wspólnych* o postaci

$$F = [F_{\tau,f}]_{M \times m}, \quad (68)$$

- wartości czynników swoistych  $\varepsilon_{\tau,t}$  ( $\tau=1, \dots, M$ ;  $t=1, \dots, T$ ); wartości te tworzą *macierz czynników swoistych* o postaci

$$E = [\varepsilon_{\tau,t}]_{M \times T}. \quad (69)$$

Dodatkowo, na początkowym etapie analizy czynnikowej - wyznaczamy również na podstawie wzoru (53) macierz korelacji  $Q = [\rho_{tt}]_{T \times T}$  pomiędzy zmiennymi  $r_t$ ; jednak nie jest to bezpośrednio niezbędne dla identyfikacji modelu czynnikowego (55) (w omawianym wariancie metody). Macierz ta bywa natomiast pomocna dla celów interpretacji otrzymanych wyników.

Tak więc etapem końcowym omawianej procedury jest ekstrakcja wartości liczbowych (tj. przebiegów czasowych) "ukrytych" czynników wspólnych  $F_f(\tau)$  ( $f=1, \dots, m$ ) i czynników swoistych  $\varepsilon_t(\tau)$  ( $t=1, \dots, T$ ). Dokonuje się tego na podstawie wyjściowej macierzy obserwacji  $X$  oraz przedstawionego powyżej całego ciągu dosyć rygorystycznych założeń analizowanego modelu. W tym też sensie, prezentowany model czynnikowy można zaliczyć do klasy statystycznych modeli uczących się; por. Koronacki, Ćwik (2005).

W procedurze numerycznego rozwiązywania przedstawionego powyżej zadania istotną rolę odgrywają wartości

$$h_i^2 = \alpha_{i1}^2 + \dots + \alpha_{if}^2 + \dots + \alpha_{im}^2; \quad (70)$$

gdzie  $h_i^2$  - tzw. *zasób zmienności wspólnej* zmiennej  $r_i$  (*communality*). Bezpośrednio z modelu (55) wynika, że

$$\text{var}(r_i) = \sigma_i^2 = h_i^2 + \alpha_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, T. \quad (71)$$

Zasób zmienności wspólnej (tzw. *communality*)  $h_i^2$ , będący sumą kwadratów współczynników korelacji  $a_{if}^2$  wszystkich czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) ze zmienną  $r_i$ , jest więc pewną miarą określającą jaką część całkowitej zmienności zmiennej  $r_i$  jest wyjaśniana przez czynniki wspólne. Wynika to stąd, że całkowita zmienność tej zmiennej reprezentowana przez jej wariancję  $\text{var}(r_i)$ ; por. (71).

Podobnie, wartość  $\alpha_i^2$  reprezentuje *zasób zmienności swoistej* zmiennej  $r_i$  - wyjaśnianej przez *czynnik swoisty*  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, T$ ). Ponadto, ze wzoru (71) wynika bezpośrednio, że

$$h_i^2 \in [0, \sigma_i^2] \quad \text{oraz} \quad \alpha_i^2 \in [0, \sigma_i^2]. \quad \forall i = 1, \dots, T.$$

Podstawiając na przekątnej głównej macierzy korelacji  $R$  o postaci (7) w miejsce jednego, wartości zasobów zmienności wspólnych  $h_i^2$  - otrzymamy tzw. *zredukowaną macierz korelacji*  $R^*$ ; macierz tę przedstawiono w Tabelicy 3.

Tabelica 3. Postać zredukowanej macierzy kowariancji  $R^*$ , gdzie  $h_i^2 = \sum_{f=1}^m a_{if}^2$ .

$$R^* = \begin{bmatrix} h_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & h_2^2 & \dots & \sigma_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \dots & h_T^2 \end{bmatrix}; \quad (72)$$

Biorąc pod uwagę wszystkie przedstawione powyżej założenia co do analizowanego liniowego modelu czynnikowego (55) można wykazać, że zachodzi (Koronacki, Ćwik, 2005)

$$R = AA^T + \mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}\mathcal{A}^T + \mathcal{A}^2. \quad (78)$$

Powyższe równanie stanowi reprezentację macierzową modelu czynnikowego (55). Z równania tego wynika, że zadanie analizy czynnikowej sprowadza się w zasadzie do rozłożenia macierzy kowariancji zmiennych  $r_i$  ( $i = 1, \dots, T$ ) na dwie addytywne składowe. Pierwsza z tych składowych zależy wyłącznie od ładunków czynników wspólnych  $\alpha_{if}$ , natomiast druga - od ładunków czynników swoistych  $\alpha_i$ . W tym też sensie równania (55) i (78) są sobie równoważne.

Biorąc teraz pod uwagę, że dla zredukowanej macierzy kowariancji  $R^*$  o postaci (72) mamy  $R^* = R - \mathcal{A}^2$ , z zależności 78 otrzymamy następujące podstawowe *równanie analizy czynnikowej* (por. również Harman, 1967)

$$R^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^T. \quad (79)$$

Wyznaczenie macierzy ładunków czynnikowych  $A$  (o wymiarze  $T \times m$ ) spełniającej równanie (79) ma podstawowe znaczenie dla rozwiązania rozpatrywanego problemu. Zauważmy, że mając dane ładunki  $\alpha_{t,f}$  ( $t=1, \dots, T$ ;  $f=1, \dots, m$ ) czynników wspólnych możemy łatwo - na podstawie wzorów (70), (71) - wyznaczyć ładunki  $\alpha_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) czynników swoistych, a tym samym - macierz  $\mathcal{A}$  o postaci (67). Macierz ta jest macierzą diagonalną - na jej przekątnej głównej wystarczy podstawić wartości

$$\alpha_t = \sqrt{\sigma_t^2 - h_t^2}; \quad t=1, \dots, T, \quad (80)$$

co wynika bezpośrednio ze wzoru (71) oraz z założenia, że przyjmujemy  $\alpha_t > 0$ .

Na podstawie znajomości macierzy  $A$ , oraz wyjściowej macierzy kowariancji  $R$  można z kolei wyprowadzić następującą zależność określającą wartość macierzy czynników wspólnych  $F$  o postaci (68)

$$F^T = A^T R^{-1} X^T, \quad (81)$$

Wyprowadzenie powyższego wzoru, jak również dyskusję różnych metod "ekstrakcji" wartości czynników wspólnych  $F_{t,f}$  na podstawie otrzymanego modelu można znaleźć m.in. w obszernej monografii Harmana (1967); por. również Koronacji, Ćwik (2005).

Mając wyznaczoną macierz czynników wspólnych  $F$  oraz zdefiniowany model czynnikowy (64) (tj. ładunki czynników wspólnych i swoistych określone) możemy - bezpośrednio z tego modelu - wyznaczyć wartości  $\varepsilon_{t,i}$  macierzy czynników swoistych  $E$  o postaci (69). Stanowi to etap końcowy analizy czynnikowej rozpatrywanego zagadnienia.

Na zakończenie powyższych rozważań należy podkreślić, że rozwiązanie podstawowego równania analizy czynnikowej jest zagadnieniem złożonym; ze wzorów (70), (72) i (79) wynika bowiem, że równanie to jest nieliniowym równaniem macierzowym o skomplikowanej strukturze. Warto również zauważyć, że nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego problemu. Można bowiem łatwo sprawdzić, że jeżeli macierz  $A$  spełnia to równanie, to równanie to jest również spełnione przez każde przekształcenie ortogonalne  $AP$  tej macierzy; gdzie  $P$  - dowolna macierz ortogonalna o wymiarze  $(m \times m)$ , tj. macierz, dla której zachodzi  $P^T = P^{-1}$ ; por. Jakubowski (2007).

Z powyższego wynika, że istnieje wiele metod rozwiązywania równania analizy czynnikowej (79), w których dla wyznaczenia macierzy  $A$  (z określonej klasy rozwiązań) stosuje się pewne dodatkowe kryteria. Najpowszechniej stosowaną metodą jest w rozpatrywanym przypadku tzw. metoda głównego czynnika Hotellinga; por. (Harman, 1967).

## 6.2. Metoda głównego czynnika (zarys)

Przedstawimy teraz skróto podstawową ideę metody głównego czynnika (bardziej obszerny opis tej metody zawiera m.in. praca Jakubowski, 2007). A mianowicie, posługując się wzorem (70) na zasób zmienności wspólnej  $h_t^2$  zmiennej  $r_t$  - możemy wyznaczyć tzw. ogólną zmienność wspólną, charakteryzującą wszystkie zmienne  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ), tj.

$$V = \sum_{t=1}^T h_t^2 = \sum_{t=1}^T \left( \sum_{f=1}^m a_{t,f}^2 \right) = \sum_{f=1}^m \left( \sum_{t=1}^T a_{t,f}^2 \right) = \sum_{f=1}^m V_f \quad (83)$$

gdzie  $V_f = \sum_{t=1}^T a_{t,f}^2$ . (84)



W powyższym równaniu przez  $V_f$  oznaczono więc część ogólnej zmienności wspólnej  $V$ , jaka wyjaśniana jest przez czynnik wspólny  $F_f$  ( $f=1, \dots, m$ ).

Zauważmy, że wartość  $V_f$  jest równa sumie kwadratów współczynników kowariancji (tj. kwadratów ładunków czynnikowych) danego czynnika  $F_f$  ze wszystkimi zmiennymi  $r_t$ ;  $t=1, \dots, T$ . Wskaźnik  $V_f$  jest więc miarą udziału czynnika  $F_f$  w wyjaśnianiu wszystkich wzajemnych korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi wyjściowymi  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ).

Podstawowa idea *metody głównego czynnika* polega na takim doborze ładunków czynników wspólnych  $F_f$  ( $f=1, \dots, m$ ), aby udział  $V_f$  tych czynników w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej  $V$  był malejący. A dokładniej, postępowanie rozpoczyna się od określenia ładunków czynnika pierwszego  $F_1$ , którego udział  $V_1$  w ogólnej zmienności  $V$  powinien być maksymalny tj.  $V_1 = \hat{V}_1$ . Następnie dobiera się ładunki czynnika drugiego  $F_2$  tak, aby udział  $V_2$  tego czynnika w wyjaśnianiu pozostałej zmienności wspólnej (tj.  $V - \hat{V}_1$ ) był maksymalny, przy określonych uprzednio ładunkach czynnika pierwszego; itd.

W praktyce, metodę głównego czynnika stosuje się sposób iteracyjny. To znaczy najpierw zadaje się pewną początkową wartość  $h_t^2$  zasobów zmienności wspólnej dla każdej ze zmiennych  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ). Następnie dla zadanej w ten sposób macierzy  $R^*$  - stosuje się powyższą metodę w celu wyznaczenia ładunków dla wszystkich czynników  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , po czym dokonuje się modyfikacji wartości  $h_t^2$  według wzoru (70), tj.

$$(h_t^{i+1})^2 = \sum_{f=1}^m (a_{tf}^i)^2; \quad t=1, \dots, T, \quad (85)$$

gdzie  $i$  - numer iteracji;  $i = 1, 2, 3, \dots$ .

Można wykazać (Harman, 1967), że zastosowanie metody głównego czynnika na każdym z etapów powyższego procesu iteracyjnego jest równoważne z wyznaczaniem (dla kolejno zadawanych wartości  $h_t^2$ ) wartości własnych  $\lambda_f$  oraz wektorów własnych  $w_f$  zredukowanej macierzy kowariancji  $R^*$ ;  $f=1, \dots, m, \dots, T$ . Dowodzi się przy tym, że w punkcie zbieżności zastosowanej procedury tylko pierwszych  $m$  wartości własnych  $\lambda_f$  jest dodatnich; pozostałe zaś wartości  $\lambda_f$  są równe zeru (w przybliżeniu). Innymi słowy, zredukowana macierz kowariancji  $R^*$  jest macierzą dodatnio półokreśloną, przy czym rząd tej macierzy jest równy  $m$ .

Rozpatrując wyniki końcowe analizy czynnikowej bierze się przede wszystkim pod uwagę procentowy udział  $P_f$  poszczególnych czynników wspólnych  $F_f$  w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej  $V$  danej wzorem (83), tj.

$$P_f = \frac{V_f}{V} \times 100\%. \quad f=1, \dots, m. \quad (91)$$

Dokując analizy uzyskanych wyników, warto jest również obliczyć tzw. *zasoby globalnej zmienności*  $V_{glob}$  zbioru zmiennych wyjściowych  $r_1, r_2, \dots, r_T$ , określone przez sumę wariancji  $\sigma_t^2$  tych zmiennych; tj.

$$V_{glob} = \sum_{t=1}^T \sigma_t^2. \quad (92)$$

Następnie, możemy określić procentowy udział zasobów ogólnych zmienności wspólnej  $V$  w globalnych zasobach zmienności  $V_{glob}$ , tj.

$$Pr = \frac{V}{V_{glob}} \times 100\%. \quad (93)$$

Jak to wynika z analizowanych poprzednio wzorów (70), (71) i (83), współczynnik  $Pr$  jest zawsze mniejszy od jedności; tj. zachodzi  $V < V_{glob}$ . Dany wzorem (93) procentowy wskaźnik  $Pr$  określa więc poziom dokładności z jakim - zgodnie z wprowadzonym modelem czynnikowym - układ skorelowanych zmiennych wyjściowych  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) może być przybliżony zbiorem ortogonalnych czynników wspólnych  $F_f$  ( $f=1, \dots, m$ ). Powyższe - przy założeniu, że w analizowanym modelu czynnikowym pominiemy czynniki swoiste  $\varepsilon_t$ ; na przykład - w celu uproszczenia rozważań.

### 6.3. Metody numeryczne

Opisana metoda analizy czynnikowej jest oprogramowana w wielu komercyjnych pakietach komputerowych przeznaczonych do zaawansowanych obliczeń statystycznych; m. in. w pakiecie STATISTICA oraz w pakiecie STATGRAPHICS (funkcja FACTOR).

Jak już wspomnieliśmy, przedstawione powyżej w ogólnym zarysie zastosowanie tej metody do konstrukcji modelu dynamiki nieoczekiwanych zmian struktury terminowej  $TS(\tau)$  stóp procentowych  $spot r_t$ , z upływem czasu bieżącego  $\tau$  - zostało bardziej szczegółowo omówione (w nieco innym ujęciu) w pracy autora Jakubowski (2007). W pracy tej podano m.in. interpretację geometryczną analizowanego modelu w przestrzeni czynników wspólnych  $OF_1 \dots F_m$  rzutowanej na dwuwymiarową przestrzeń  $OF_1 F_2$ ; a także, przedstawiono zagadnienie tzw. rotacji ortogonalnych, prowadzących do określonej modyfikacji modelu, otrzymanego metodą głównego czynnika (Hotellinga).

Procedury owych rotacji ortogonalnych przestrzeni czynników wspólnych - o nazwach VARIMAX, QUARTIMAX, oraz EQUIMAX są również oprogramowane w ramach wspomnianych pakietów komputerowych.

## 7. Zastosowanie zaawansowanych metod analizy stochastycznej - czynnikowa okresowość i czynnikowa wypukłość obligacji

W poprzednim punkcie przedstawiliśmy poszczególne etapy identyfikacji modelu czynnikowego (55) rynkowych stóp procentowych  $spot r_t$ , określanych dla kolejnych dyskretnych punktów czasowych  $\tau=1, 2, 3, \dots$ , na podstawie rentowności do wykupu ( $YTM$ ) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu  $t=1, \dots, T$ .

Model ten miał postać

$$r_t = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^m \alpha_{t,f} F_f + \alpha_t \varepsilon_t, \quad \forall t=1, \dots, T. \quad (94)$$

Proces identyfikacji modelu polegał w rozpatrywanym przypadku nie tylko na określeniu współczynników  $\alpha_{t,f}$ ,  $\alpha_t$  modelu, ale również na wyznaczeniu wartości czynników wspólnych  $F_f(\tau)$  (tj. macierzy  $F$  danej wzorem (81)) oraz czynników swoistych  $\varepsilon_t(\tau)$  (tj. macierzy  $E$  o postaci (69)). Zdecydowanie wyróżnia to powyższe podejście od metodologii analizy regresyjnej, w przypadku której przedmiotem identyfikacji są tylko współczynniki  $\alpha_{t,f}$

(oraz ewentualnie  $a_t$ ) modelu liniowego, natomiast  $F_f$  ( $f=1, \dots, m$ ) traktowane są jako egzogeniczne zmienne wejściowe o określonej interpretacji ekonomicznej oraz o wartościach znanych bezpośrednio z przeszłych obserwacji. Zauważmy, że w przypadku modelu czynnikowego, wartości zmiennych  $F_f(\tau)$  wyznacza się dopiero na etapie końcowym konstrukcji modelu.

W dalszych rozważaniach założymy (podobnie jak w prezentowanym poprzednio modelu Fishera, Weila, 1971) ciągłą kapitalizację odsetek. Wówczas, wartość bieżąca obligacji wielokuponowej, jako funkcja stóp procentowych *spot*  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) - wyraża się wzorem

$$P = P(r_{01}, \dots, r_{0t}, \dots, r_{0T}) = \sum_{t=1}^T C_t e^{-r_t t}. \quad (95)$$

Podstawowa idea omawianej dalej metody czynnikowej immunizacji zawiera się w następującym spostrzeżeniu: z wyprowadzonego modelu czynnikowego (94) wynika, że zamiast rozpatrywać zmiany wartości  $dP$  obligacji danej wzorem (95) ze względu na zmiany  $dr_t$ , możemy analizować analogiczne zmiany  $dP$  ze względu na zmiany  $dF_f$  ( $f=1, \dots, m$ ) czynników wspólnych dla wszystkich stóp procentowych  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ). Ze wzorów (94) i (95) wynika bowiem, że wartość bieżącą  $P$  obligacji możemy traktować jako pewną złożoną funkcję wektora czynników wspólnych  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m]$ , tj.

$$P = P(\mathbf{F}) = P(F_1, \dots, F_m). \quad (96)$$

Zauważmy, że funkcja  $P(\mathbf{F})$  jest ciągła wraz z wszystkimi pochodnymi cząstkowymi dowolnego rzędu. Z formalnego punktu widzenia, funkcję tę możemy więc traktować jako pewne gładkie odwzorowanie wektora czynników wspólnych  $\mathbf{F}$  w przestrzeń  $R^1$ . Dynamikę nieoczekiwanych losowych zmian wzajemnie nieskorelowanych czynników wspólnych  $F_1(\tau), \dots, F_m(\tau)$  z upływem czasu bieżącego  $\tau$ , wywołujących określoną zmianę kształtu struktury terminowej  $TS(\tau)$  - można zmodelować w postaci następującego stochastycznego równania różniczkowego  $\hat{I}to$ :

$$dF_f(\tau) = \mu_f d\tau + \sigma_f dW_f(\tau), \quad \forall f=1, \dots, m, \quad (97)$$

gdzie  $\mu_f$  - współczynnik dryfu (*drift*),  $\sigma_f$  - współczynnik zmienności (*volatility*), przy czym  $\mu_f, \sigma_f$  SA danymi stałymi;  $W_f(\tau) = W_f(\omega, \tau)$  - standardowy proces stochastyczny Wienera, tj. proces gaussowski o przyrostach niezależnych oraz o parametrach  $W_f \sim N(0, \tau)$ .

Ponadto zakładamy, że procesy Wienera  $W_f(\tau), W_l(\tau)$  ( $f, l=1, \dots, m; f \neq l$ ) są wzajemnie niezależne. Z formalnego punktu widzenia, równanie (97) określa więc różniczkę stochastyczną  $d\mathbf{F}(\tau)$  wektorowego procesu  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m]$  o nieskorelowanych współrzędnych. Wykażemy prawdziwość następującego lematu.

**Lemat 1.** Załóżmy, że różniczka stochastyczna  $d\mathbf{F}(\tau)$  wektora nieskorelowanych czynników wspólnych dana jest wzorem (97). Wówczas, różniczka stochastyczna  $\hat{I}to$  wartości bieżącej  $P(\mathbf{F})$  obligacji wyraża się wzorem:

$$P(\mathbf{F}) = dP(F_1, \dots, F_m) = \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (dF_f)^2. \quad (98)$$

**Dowód.** Wykażemy, że wzór (98) wynika z najprostszej wersji Lematu  $\hat{I}to$  sformułowanego dla wektorowych procesów stochastycznych. Postać ogólną wielowymiarowego wariantu wzoru  $\hat{I}to$ , z którego korzystamy poniżej - przedstawiono w Dodatku, zamieszczonym na końcu niniejszej pracy.

Przy przyjętych przez nas założeniach co do wektorowego procesu  $F(\tau)$  oraz o różniczce stochastycznej  $dF(\tau)$  danej wzorem (97) - z Lematu  $\hat{I}to$  mamy: dla dowolnej, ciągłej wraz z drugimi pochodnymi, nielosowej funkcji  $P[F(\tau), \tau]$ , różniczka stochastyczna tej funkcji wyraża się wzorem

$$dP[F(\tau), \tau] = \left( \frac{\partial P}{\partial \tau} + \sum_{f=1}^m \mu_f \frac{\partial P}{\partial F_f} + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \sigma_f^2 \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \right) d\tau + \sum_{f=1}^m \sigma_f \frac{\partial P}{\partial F_f} dW_f, \quad (99)$$

gdzie  $\mu_f, \sigma_f$  - współczynniki równania (97).

Jak można zauważyć, różniczka  $dP$  wartości bieżącej obligacji składa się z członu deterministycznego stojącego przy  $d\tau$ , odpowiadającego za ewolucję w czasie (tzw. dryf) tej wartości oraz z członu stochastycznego, obrazującego za pomocą różniczek  $dW_f$  ( $f=1, \dots, m$ ) procesów Wienera - wpływ czynników losowych na przebieg tej ewolucji. Z równania (99), po przekształceniach, otrzymamy

$$dP[F(\tau), \tau] = \frac{\partial P}{\partial \tau} d\tau + \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f) + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \sigma_f^2 \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} d\tau.$$

Wykorzystamy teraz tzw. prawa mnożenia różniczki stochastycznej  $dW_f(\tau)$  procesu Wienera (po. Weron A., Weron R., 1998):

$$[dW(\tau)]^2 = d\tau, \quad dW(\tau)d\tau = 0, \quad (d\tau)^2 = 0. \quad (101)$$

Pierwsze dwa z powyższych wzorów są symbolicznym zapisem następujących stochastycznych zbieżności średniokwadratowych

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} [\Delta W(\tau)]^2 = d\tau \quad \text{oraz} \quad \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} [\Delta W(\tau)\Delta\tau] = 0. \quad (102)$$

Natomiast wzór  $(d\tau)^2 = 0$  jest symbolicznym zapisem oczywistego faktu, że wartość  $(\Delta\tau)^2$  jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż  $\Delta\tau$ , tj.  $(\Delta\tau)^2 = o(\Delta\tau)$ ; tak więc wartość ta zanika, dla nieskończenie małych przyrostów  $d\tau$ .

Korzystając z praw mnożenia (101), iloczyn  $\sigma_f^2 d\tau$  występujący w ostatnim członie wzoru (100) możemy przedstawić następująco:

$$\sigma_f^2 d\tau = \mu_f^2 (d\tau)^2 + 2\mu_f \sigma_f dW_f d\tau + \sigma_f^2 (dW_f)^2 = (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f)^2. \quad (103)$$

Z (100) i (103) mamy więc

$$dP[F(\tau), \tau] = \frac{\partial P}{\partial \tau} d\tau + \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f) + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f)^2 \quad (104)$$

Podstawiając teraz wyrażenie (97) do wzoru (104) otrzymamy ostatecznie

$$P(\mathbf{F}) = dP(F_1, \dots, F_m) = \frac{\partial P}{\partial \tau} d\tau + \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (dF_f)^2. \quad (105)$$

Wyprowadzony wzór (105) dotyczy ogólnego przypadku, gdy funkcja  $P(\cdot, \cdot)$  zależy w sposób jawny od czasu bieżącego  $\tau$ . Natomiast dla analizowanej w niniejszym lemacie funkcji  $P = P(\mathbf{F})$ , występująca w tym wzorze pochodna  $\frac{\partial P}{\partial \tau}$  zanika i otrzymujemy szukaną zależność (98).

c.n.d.

Zauważmy, że wyprowadzony powyżej, na gruncie analizy stochastycznej, wzór (98) jest uogólnieniem klasycznego wzoru na różniczkę zupełną funkcji wielu zmiennych, rozpatrywanego w przypadku deterministycznym. Różnica jest taka, że w przypadku różniczki stochastycznej  $\hat{I}t_0$  - występuje dodatkowo człon zawierający pochodne drugiego rzędu; porównaj Sobczyk (1996), s. 130.

Na rozpatrywane powyżej zagadnienie można również spojrzeć w inny sposób. A mianowicie, wyprowadzony powyżej wzór (98) moglibyśmy uzyskać w drodze "deterministycznej" rozwijając po prostu zależność  $P(\mathbf{F} + d\mathbf{F})$  w szereg Taylora z dokładnością do członów drugiego rzędu i pomijając wszystkie pochodne mieszane, tj.  $\frac{\partial^2 P}{\partial F_j \partial F_l}$  ( $f, l = 1, \dots, m; f \neq l$ ). Mając jednak na uwadze fakt, że pochodne te są w istocie niezerowe, przedstawiona przez nas powyżej procedura, wykorzystująca formalizm stochastycznych równań różniczkowych  $\hat{I}t_0$  - jest merytorycznie bardziej poprawna i uzasadniona. Tym bardziej, że w dalszych rozważaniach dotyczących zagadnienia immunizacji portfela, nie będziemy więcej korzystać z równania stochastycznego (97) ewolucji czasowej czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). Tak więc - dla naszych celów - Nie zaistnieje konieczność identyfikacji parametrów dryfu  $\mu_f$  oraz zmienności  $\sigma_f$ , co w praktyce mogłoby być dosyć kłopotliwe.

Dzieliąc obie strony równania (98) przez  $P$ , otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = \sum_{f=1}^m \left[ \frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} \right] dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} \right] (dF_f)^2. \quad (106)$$

W powyższym wzorze, wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie prostokątnym definiujemy jako czynnikową okresowość  $D_f$  obligacji; natomiast wyrażenie w drugim nawiasie prostokątnym - określamy jako wypukłość czynnikową  $V_f$ . Mamy więc

$$D_f \triangleq -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P}, \quad V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P}, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (107)$$

A zatem, z (106), (107) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -\sum_{f=1}^m D_f dF_f + \sum_{f=1}^m V_f (dF_f)^2, \quad (108)$$

gdzie wielkość  $\frac{dP}{P}$  nazywamy niespodziewaną stopą zwrotu z obligacji wywołaną nieoczekiwanymi zmianami  $dF_f$  czynników wspólnych ( $f=1, \dots, m$ ).

W celu wyznaczenia parametrów okresowości  $D_f$  wypukłości  $V_f$ , danych zależnościami (107), a tym samym obliczenia odnośnych pierwszych i drugich pochodnych funkcji  $P(F)$  danej wzorami (95) i (94), skorzystamy ze wzorów na pochodną zupełną funkcji złożonej. Mamy zatem

$$\frac{\partial P}{\partial F_f} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial F_f} = - \sum_{t=1}^T t \alpha_{f,t} C_t e^{-r_t}, \quad (109)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} = \frac{\partial}{\partial F_f} \left( \frac{\partial P}{\partial F_f} \right) = \sum_{t=1}^T \frac{\partial}{\partial r_t} \left( \frac{\partial P}{\partial F_f} \right) \frac{\partial r_t}{\partial F_f} = \sum_{t=1}^T t^2 \alpha_{f,t}^2 C_t e^{-r_t}. \quad (110)$$

Z (107), (109) i (110) otrzymamy więc końcową postać wzorów na parametry  $D_f$  i  $V_f$

$$D_f \triangleq - \frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^T t \alpha_{f,t} C_t e^{-r_t} / P, \quad \forall f=1, \dots, m, \quad (111)$$

$$V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 \alpha_{f,t}^2 C_t e^{-r_t} / P, \quad \forall f=1, \dots, m. \quad (112)$$

Wyprowadzone powyżej wzory (108), (111) i (112) stanowią kompletny układ zależności, za pomocą których możemy oszacować niespodziewaną stopę zwrotu  $dP/P$  z obligacji wywołaną nieoczekiwaną zmianą struktury terminowej  $TS$  stóp procentowych  $spot$   $r_t$ , przy założeniu, że zmiany te są reprezentowane przez nieskorelowane wahania  $dF_f$  ( $f=1, \dots, m$ ) ortogonalnych czynników wspólnych. Zauważmy, że wzory (111) i (112) na czynnikową okresowość  $D_f$  i czynnikową wypukłość  $V_f$  obligacji są bezpośrednimi uogólnieniami analogicznych wzorów (35) i (36) definiujących okresowość  $D_{FW}$  i wypukłość  $V_{FW}$  obligacji, w przypadku rozpatrywanego wcześniej modelu Fishera-Weila, sformułowanego przy założeniu wyłącznie równoległych przesunięć  $dr$  krzywej dochodowości. Z formalnego punktu widzenia, wzory te różnią się tylko tym, że w przypadku modelu czynnikowego występują w odnośnych zależnościach dodatkowo współczynniki (tj. ładunki czynnikowe)  $\alpha_{f,t}$ . Również wzór (108) określający niespodziewaną stopę zwrotu z obligacji jest bezpośrednim uogólnieniem analogicznego wzoru (37).

Bardziej wnikliwa analiza porównawcza powyższych podejść prowadzi jednak do dalszych wniosków. Przede wszystkim zauważmy, że współczynnik  $\alpha_{f,t}$  występujący m.in. we wzorze (111) określającym parametr  $D_f$  okresowości czynnikowej obligacji - może być dowolnego znaku. Tak więc wpływ zmiany  $dF_f$  czynników wspólnych na niespodziewaną stopę zwrotu  $dP/P$  - modelowany za pomocą równania (108) - ma o wiele bardziej złożoną naturę, w porównaniu z analogicznym wpływem nieoczekiwanego, równoległego przesunięcia  $dr$  krzywej dochodowości, rozpatrywanego w modelu Fishera-Weila za pomocą równania (37). W tym ostatnim równaniu, parametr okresowości  $D_{FW}$  przybiera bowiem zawsze wartości dodatnie.

Druga istotną różnicą pomiędzy modelem Fishera-Weila a modelem czynnikowym jest to, że wprowadzenie definicji zarówno czynnikowej okresowości (111) jak i czynnikowej wypukłości (112) wiąże się z przyjęciem po  $m$  parametrów  $D_f$  i  $V_f$  dla każdej z rozpatrywanych obligacji wielokuponowych, ponieważ rozpatrujemy łączne oddziaływanie  $m$  czynników wspólnych  $F_f$ . Natomiast w przypadku modelu Fishera-Weila (jak też i w przypadku innych podejść klasycznych) dla każdej obligacji definiujemy tylko po jednym parametrze okresowości i wypukłości. Jednak w przypadku modelu czynnikowego nie powinno to być zbyt kłopotliwe, ponieważ - jak wykazują dotychczasowe doświadczenia - w praktyce, na rozwiniętych rynkach kapitałowych, wzięcie pod uwagę  $m = 3-4$  czynników prowadziło do wyjaśnienia ok. 95-97 % *zasobów zmienności ogólnej* rynkowych stóp procentowych  $spot r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).

Biorąc dodatkowo pod uwagę, że na rynkach tych rozpatruje się struktury terminowe stóp procentowych dla terminów zapadalności od 1 roku do 30 lat - a więc w sumie dla  $T = 30$  zmiennych  $r_t$  - otrzymana w wyniku modelu czynnikowego redukcja liczby zmiennych objaśniających (przy minimalnej stracie informacji) - jest rzeczywiście bardzo znacząca. Wynika to zresztą z samej specyfiki metody analizy czynnikowej, w ramach której - jako punkt wyjściowy do rozważań rozpatrujemy na ogół silnie skorelowane stopy procentowe  $r_t$ . Zauważamy, że gdyby wszystkie współczynniki korelacji  $\rho_{it}$  pomiędzy analizowanymi zmiennymi  $r_t$ ,  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T; t \neq l$ ) były równe jedności - do analizy układu  $T$  tych zmiennych, wystarczyłby jeden czynnik wspólny  $F_1$ .

W modelu czynnikowym opracowanym dla rynku amerykańskiego zidentyfikowano  $m = 3$  istotne czynniki wspólne (Litterman, Scheinkman, 1991):

$F_1$  - czynnik wpływający na ogólny poziom stóp procentowych  $r_t$ ; tzw. czynnik poziomu (*level factor*);

$F_2$  - czynnik wpływający na nachylenie krzywej dochodowości; tzw. czynnik nachylenia (*steepness factor*);

$F_3$  - czynnik wpływający na stopień zakrzywienia krzywej dochodowości; tzw. czynnik krzywizny (*curvature factor*).

W celu bliższego wyjaśnienia takiej właśnie interpretacji tych czynników, wygodnie jest przedstawić analizowany dla czynników  $F_1, F_2$  i  $F_3$  model czynnikowy (94) tak - jak to przedstawiono w tablicy 4.

**Tablica 4.** Model czynnikowy dla trzech czynników wspólnych  $F_1, F_2, F_3$ ;

$r_t$  - stopy procentowe *spot*,  $\bar{r}_t$  - wartości oczekiwane stóp  $r_t$ ,

$\varepsilon_t$  - czynniki swoiste,  $\alpha_{1f}$ ,  $\alpha_t$  - ładunki czynnikowe

$$\begin{array}{l} r_1 = \bar{r}_1 + \alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \alpha_{13}F_3 + \alpha_1\varepsilon_1 \\ r_2 = \bar{r}_2 + \alpha_{21}F_1 + \alpha_{22}F_2 + \alpha_{23}F_3 + \alpha_2\varepsilon_2 \\ \vdots \\ r_t = \bar{r}_t + \alpha_{t1}F_1 + \alpha_{t2}F_2 + \alpha_{t3}F_3 + \alpha_t\varepsilon_t \\ \vdots \\ r_T = \bar{r}_T + \alpha_{T1}F_1 + \alpha_{T2}F_2 + \alpha_{T3}F_3 + \alpha_T\varepsilon_T \end{array}$$

Zauważmy, że gdy wszystkie ładunki czynnikowe ( $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{1T}$ ) czynnika  $F_1$  w zmiennych  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) są dodatnie - to wzrost lub spadek  $dF_1$  wartości tego czynnika (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) będzie powodował jednoczesny wzrost lub spadek poziomu wszystkich analizowanych stóp procentowych *spot*  $r_t$ . Czynniki  $F_1$  można więc nazwać - *czynnikami poziomu*.

Ponadto, gdy początkowe wartości ciągu ładunków czynnikowych ( $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{T2}$ ) stojących przy czynniku  $F_2$  są dodatnie, natomiast wartości końcowe tego ciągu są ujemne (lub na odwrót) - to wzrost lub spadek  $dF_2$  tego czynnika (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) - będzie powodował zmianę nachylenia analizowanej krzywej dochodowości. Czynniki  $F_2$  jest nazywany w tym przypadku - *czynnikami nachylenia*.

Natomiast, gdy skrajne wartości ciągu ładunków czynnikowych ( $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{T3}$ ) stojących przy czynniku  $F_3$  są tego samego znaku, natomiast środkowe wartości tego ciągu są znaku przeciwnego - to wzrost lub spadek  $dF_3$  czynnika  $F_3$  (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) stanie się przyczyną określonego odkształcenia krzywej dochodowości w górę lub w dół. Czynniki  $F_3$  można więc nazwać w tym przypadku - *czynnikami krzywizny*.

Całkowity kształt analizowanej krzywej dochodowości wynikał więc z "liniowego" nałożenia się oddziaływań rozpatrywanych czynników wspólnych, zgodnie z modelem czynnikowym prezentowanym w tablicy 4. Ilustrację graficzną tych oddziaływań można sobie wyobrazić tak, jak to przedstawiono na rysunku 3.

W lewej części tego rysunku zilustrowano dynamiczne zmiany początkowo płaskiej krzywej dochodowości; natomiast w prawej części rysunku - przedstawiono analogiczne zmiany, przy założeniu, że początkowy przebieg tej krzywej był nieliniowy.

### Zagadnienie maksymalizacji czynnikowej wypukłości portfela obligacji

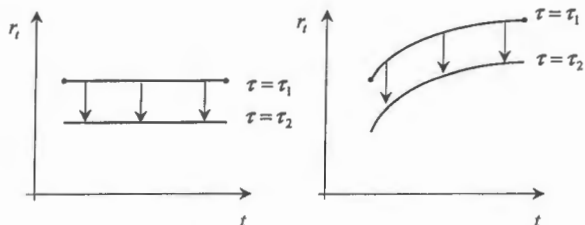
Podobnie jak to przedstawiliśmy dla przypadku klasycznych modeli zarządzania portfelem obligacji, w przypadku gdy rozpatrujemy zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem wykorzystującym model czynnikowy - niezmiernie istotnym zagadnieniem jest określenie takiej struktury koncentracji strumieni finansowych analizowanego portfela, aby portfel ten charakteryzował się maksymalną wypukłością. Jak już to podkreślono, wówczas bowiem taki portfel zapewni - przy określonych założeniach - maksymalną stopę zwrotu z dokonywanych inwestycji.

Otóż można wykazać, że dla wszystkich portfeli o tych samych parametrach czynnikowych okresowości  $D_f$  ( $f=1, \dots, 3$ ) oraz o tych samych parametrach czynnikowej wypukłości  $V_2$  i  $V_3$  (tj. względem odpowiednio czynników nachylenia i czynnika krzywizny) - portfel typu *barbell* jest portfelem o maksymalnej wypukłości  $V_1$ , względem czynnika poziomu  $F_1$ . Dowód tego faktu został zamieszczony przez autora niniejszej pracy w *Systems Research Institute Working Paper*: Jakubowski (2009) - w przygotowaniu.

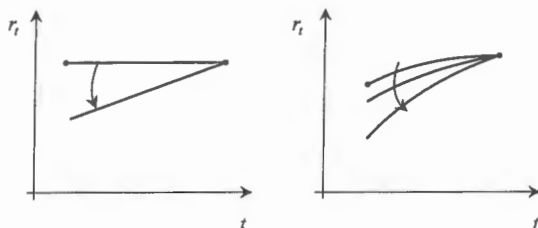
W dowodzie tym, do każdego z analizowanych strumieni finansowych  $CF_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) portfela obligacji przypisano zmienną decyzyjną  $x_t \geq 0$ ; po czym - wyznaczono parametr wypukłości  $V_1$  tego portfela ze względu na czynnik poziomu  $F_1$ . Otrzymano w ten sposób zależność czynnikowej wypukłości  $V_1$  rozpatrywanego portfela od wspomnianych zmiennych decyzyjnych. Następnie zaś - wykorzystując warunki Kuhna-Tuckera optymalności - wykazano, że zagadnienie maksymalizacji parametru wypukłości  $V_1$  sprowadza się do konstrukcji portfela typu *barbell*, dla którego tylko optymalne wartości  $\hat{x}_1$  oraz  $\hat{x}_T$  są niezerowe.



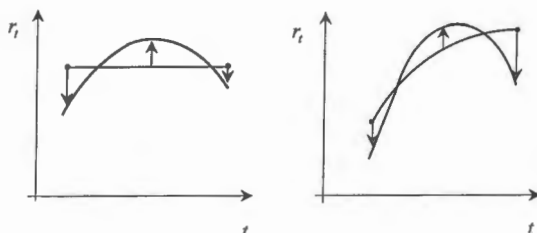
$F_1$  - czynnik poziomu



$F_2$  - czynnik nachylenia



$F_3$  - czynnik krzywizny



Rys. 3. Ilustracja oddziaływań czynników wspólnych  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  na strukturę terminową stóp procentowych;  $F_1$  – czynnik poziomu,  $F_2$  – czynnik nachylenia,  $F_3$  – czynnik krzywizny.  
Źródło: Jakubowski (2007).



## Literatura

1. Babbel D.F. (1983) Duration and the Term Structure of Interest Rates Volatility. In: G.G. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs, (Eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn., pp. 239-265.
2. Bierwag G.O. (1987) *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
3. Brennan M.J., Schwartz E. (1979) A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, pp. 133-155.
4. Brennan M.J., Schwartz E. (1983) Duration, Bond Pricing and Portfolio Management. In: G.C. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs (Eds.) *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S. (1979) Duration and the Measurement of Basic Risk. *Journal of Business*, Vol. 52, No. 1, pp. 51-61, January.
6. Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, pp. 385-407.
7. Dahl H. (1993) *A Flexible Approach to Interest Rate Risk Management*. In: Zenios S.A. (Ed.), *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.
8. Elton E.J., Gruber M.J., Brown S.J., Goetzmann W.N. (2003) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, 6-th Ed.
9. Fabozzi F.J., Fong G. (1994) *Advanced Fixed Income Portfolio Management - The State of Art*. Probus Pub. Comp., Chicago.
10. Fabozzi F.J. (1996) *Bond Portfolio Management*. F.J. Fabozzi Associates, New Hope, Penn.
11. Fabozzi F.J. (2006) *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 5-th ed.
12. Fisher L., Weil R.L. (1971) Coping with the Risk of Market Rate Fluctuations - Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business*, Vol. 4, October, pp. 408-431.
13. Garbade K. (1986) *Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, June.
14. Garbade K. (1989) *Polynomial Representations of the Yield Curve and its Modes of Fluctuations*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, No. 53, July.
15. Gałtarek D., Bachert P., Maksymiuk R. (2006) *The LIBOR Market Model in Practice*. J. Wiley & Sons, Chichester.
16. Gibson R., Lhabitant F.,-S., Talay D. (2001) *Modeling The Term Structure of Interest Rates - A Review of the Literature*. RiskLab Research Report, The Project on Interest Rate Risk Management and Model Risk, Zurich, June.
17. Gichman I.I., Skorochod A.W. (1968): *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa.
18. Harman H.H. (1967) *Modern Factors Analysis*. Chicago University Press, 2-nd ed.

19. Hawawini G.A. (1982) *Bond Duration and Immunization – Early Development and Recent Contributions*. Garland Publishing, New York.
20. Ho T.S.Y. (1990) *Strategic Fixed Income Investments*. Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill.
21. Jajuga K., Jajuga T. (1996) *Inwestycje - instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. PWN, Warszawa.
22. Jakubowski A. (1996) *Modelowanie struktury czasowej stóp procentowych*. IBS PAN, Raport Projektu badawczego KBN, Nr PB 536 /HO2/96/10 - G 37, Warszawa.
23. Jakubowski A. (1997a) *Ryzyko zmian stóp procentowych – zasady tworzenia zimmunizowanych portfeli inwestycyjnych*. IBS PAN, Raport Projektu Badawczego KBN, Nr PB 536/H02/96/10-G37, Warszawa.
24. Jakubowski A. (1997b) *Zagadnienia teorii stóp procentowych*. IBS PAN, Raport Projektu Badawczego KBN, Nr PB 536/H02/96/10-G37, Warszawa.
25. Jakubowski A. (2000) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: M. Krawczak, A. Miklewski, A. Jakubowski, P. Konieczny, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*, Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t. 25, Warszawa, Część II, s. 49-122.
26. Jakubowski (2003): Zarządzanie inwestycjami na rynku obligacji. W: Krawczak M., Jakubowski A. (et. al.), *Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi*, EXIT, Warszawa 2003, Rozdz. VI, s. 269-374.
27. Jakubowski A. (2002) Wycena obligacji katastroficznych w ujęciu teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a Ryzyko '02*. Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 151-177.
28. Jakubowski A. (2004a) *Zarządzanie portfelem obligacji w przypadku proporcjonalnych zmian struktury terminowej stop procentowych*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/41/2004, Warszawa.
29. Jakubowski A. (2004b) *Zagadnienia teorii stóp procentowych a ryzyko inwestycyjne*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/42/2004, Warszawa.
30. Jakubowski A. (2005a) Human Attitude Towards Risk in the Process of Pricing Catastrophe Bonds. In: K.A. Atanassov, J. Kacprzyk, M. Krawczak, E. Szmidt (Eds.) *Issues in the Representation and Processing of Uncertain and Imprecise Information*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa, pp. 153-180.
31. Jakubowski A. (2005b) *Two-Factor Utility Approach to Valuation of Catastrophe Bonds*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/59/2005, Warszawa.
32. Jakubowski A. (2006a) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '05*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 285-303.
33. Jakubowski A. (2006b) *Zagadnienia immunizacji portfela obligacji*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/31/2006, Warszawa.
34. Jakubowski A. (2007): *Czynnikowy model immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko stóp procentowych*. Raport Badawczy IBS PAN, RB/68/2007, Warszawa.
35. Jakubowski A. (2009): *Zagadnienie maksymalizacji parametru czynnikowej wypukłości portfela obligacji*. Systems Research Institute Working Paper, Warszawa (w przygotowaniu).
36. Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003) *Matematyka finansowa – Instrumenty pochodne*. WNT, Warszawa.

37. Jones F.J. (1991) Yield Curve Strategies. *Journal of Fixed Income*, September, pp. 41-43.
38. Kaufman G.C., Bierwag G.O., Toevs A. (Eds.) (1983) *Innovations in Bond Portfolio Management - Duration Analysis and Immunization*. JAI Press, Greenwich, Conn.
39. Klaffky T.E., Ma Y.Y., Nozari A. (1992) Managing Yield Curve Exposure – Introducing Reshaping Durations. *Journal of Fixed Income*, December 1992, pp. 5-15.
40. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000) *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*. Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t.25, Warszawa.
41. Krawczak M., Jakubowski A., Konieczny P., Kulikowski R., Miklewski A., Szkatuła G. (2003) *Aktywne zarządzanie inwestycjami finansowymi*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.
42. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995) *Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce*. Raport IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.
43. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996) *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*. Raport IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.
44. Kulikowski R., Jakubowski A. (1999) Wycena obligacji w warunkach ryzyka niewypłacalności emitenta. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko'99*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, Cz. 1, s. 187-208.
45. Kulikowski R., Jakubowski A. (2000) Valuation of Catastrophe Bonds. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No. 2, 2000, pp. 181-211.
46. Lipcer R. Sz., Szirajew A.N. (1981): *Statystyka procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa.
47. Litterman R., Scheinkman J. (1991) Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income Securities*, June, pp. 54-61.
48. Macaulay F.R. (1938) *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. Columbia University Press, National Bureau of Economic Research, New York.
49. Redington F.M. (1952) Review of the Principle of Life Office Valuations. *Journal of The Institute of Actuaries*, Vol. 18, pp. 286-340; (Reprinted in G.A. Hawawini (1982) *Bond Duration and Immunization – Early Development and Recent Contributions*, Garland Publishing, New York).
50. Sławiński A. (1996) *Krzywa dochodowości*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 62, Warszawa, październik.
51. Sobczyk K. (1996): *Stochastyczne równania różniczkowe*. WNT, Warszawa.
52. Vasicek O.A. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, pp. 177-188.
53. Utkin J. (2005): *Obligacje i ich portfele - wycena, wrażliwość, strategie*. Wyd. SGH, Warszawa.
54. Weron A., Weron R. (1998) *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa.
55. Zaremba L.S. (1995) *Solutions of Immunization Problem in Case of Proportional Spot Rate Shifts*. Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences (IBS PAN), Working Paper WP-3-1995, , Warsaw.
56. Zaremba L.S. (1998) Construction of a k-Immunization Strategy with the Highest Convexity. *Control and Cybernetics*, Vol. 27, No. 1, pp. 135-144.

57. Zaremba L.S., Smoleński W.H. (2000a) How to Find a Bond Portfolio with the Highest Convexity in a Class of Fixed Duration Portfolios. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, pp.279-286.
58. Zaremba L.S., Smoleński W.H. (2000b) Optimal Portfolio Choice under a Liability Constraint. *Annals of Operational Research*, No. 97, pp. 131-141.
59. Zenios S.A., Ed. (1993) *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.



