

236/2010 4

Raport Badawczy

RB/31/2010

Research Report

**Modelowanie procesu wyceny
obligacji katastroficznych
przy zastosowaniu
multiplikatywno-addytywnej
funkcji użyteczności**

A. Jakubowski

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.:(+48) (22) 3810100

fax:(+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2010

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk



Andrzej Jakubowski

**Modelowanie procesu wyceny obligacji katastroficznych
przy zastosowaniu multiplikatywno-addytywnej
funkcji użyteczności**

Warszawa, grudzień 2010

Streszczenie

W pracy przedstawiono podstawy teoretyczne oraz model matematyczny procesu wyceny obligacji katastroficznych, przy założeniu, że dwuczynnikowa funkcja użyteczności inwestora ma postać multiplikatywno-addytywną. Wyprowadzono równanie wyceny obligacji dla tego przypadku oraz dokonano szczegółowej interpretacji geometrycznej analizowanego modelu wyceny (tzw. linia rozdzielająca, linia akceptacji oraz linia preferencji). Przedstawiono również wyniki obliczeń numerycznych ilustrujących omawianą tematykę.

Wskazano na zalety wprowadzonego uogólnienia modelu wyceny w porównaniu z modelem opracowanym w latach poprzednich, w którym zakładano multiplikatywną postać funkcji użyteczności inwestora; tj. postać funkcji Cobba-Douglasa. Wskazano również na pewne dodatkowe trudności dotyczące oceny parametrów analizowanego modelu.

1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań jest opracowanie pewnej nowej koncepcji modelu wyceny obligacji katastroficznych, w którym wykorzystuje się dwuczynnikową funkcję użyteczności inwestora. Model ten może być wykorzystany jako jeden z elementów Bazy Wiedzy (*knowledge base*) wchodzącej w skład systemu wspomagania decyzji na rynku dłużnych instrumentów finansowych.

Obligacje katastroficzne (*catastrophe bonds*) rozpatruje się jako pewną klasę instrumentów dłużnych obciążonych ryzykiem niewypłacalności emitenta. Są to obligacje komunalne, emitowane przez władze regionu narażonego na ryzyko wystąpienia klęsk żywiołowych takich jak powódź, trzęsienie ziemi, huragany, cyklony, susza, pożary lasów itp. Zakłada się, że w przypadku wystąpienia katastrofy, emitent obligacji zwolniony jest z obowiązku dalszej spłaty odsetek i/lub zwrotu wartości nominalnej obligacji. Dokonuje się w ten sposób pewnego transferu ryzyka strat finansowych w regionie na rzecz inwestorów nabywających obligacje katastroficzne. Inwestorzy ci są z kolei nagradzani określonym dyskontem cenowym z jakim obligacje te są sprzedawane, w stosunku do obligacji nie obciążonych w/w ryzykiem. Wynika stąd bezpośrednio, że obligacje katastroficzne charakteryzują się wyższą stopą zwrotu z inwestycji - jak i też odpowiednio wyższym ryzykiem - w stosunku do innych obligacji.

W zaproponowanym modelu wyceny wykorzystuje się koncepcję dwuczynnikowej funkcji użyteczności inwestora, w której czynnik pierwszy jest wyrażony przez wartość oczekiwaną stopy zwrotu z inwestycji, natomiast czynnik drugi - jest określony przez stopę zwrotu „w najgorszym przypadku”. Odpowiednio zdefiniowana stopa zwrotu najgorszego przypadku determinuje tzw. poziom bezpieczeństwa papieru wartościowego będący pewną miarą ryzyka inwestycyjnego. Ryzyko to jest ściśle powiązane z zadaniem (z założenia) prawdopodobieństwem wystąpienia katastrofy w regionie, zarządzanym przez emitenta obligacji.

Podstawowym problemem rozpatrywanym w pracy jest sposób wyceny obligacji katastroficznej, tj. określenie premii za ryzyko niewypłacalności emitenta (*default risk*). W tym celu zaproponowano dwuetapowy model decyzyjny wyceny, wiążący się z zastosowaniem tzw. zasady akceptacji oraz zasady preferencji. Założono, że zasada akceptacji jest dla danego papieru wartościowego spełniona, o ile poziom bezpieczeństwa określony dla tego instrumentu jest wyższy od zera. Natomiast zasada preferencji wynika z porównania wartości funkcji użyteczności wyznaczonej dla obligacji katastroficznej, z wartością tej funkcji określoną dla obligacji wolnej od ryzyka, o tych samych strumieniach finansowych.

Otrzymane wyniki zilustrowano z punktu widzenia tzw. teorii wartości zagrożonej (*Value at Risk*). W badaniach analizowano dwuczynnikową funkcję użyteczności typu Cobba-Douglasa (zależność multiplikatywna) oraz funkcję typu CES (zależność multiplikatywno-addytywna). Podano wyniki numeryczne dotyczące przykładów obliczeniowych, przeprowadzonych dla różnych parametrów tych funkcji. Przedstawiono również serię obliczeń numerycznych ukierunkowanych na zastosowanie analizowanego modelu wyceny jako elementu Bazy Wiedzy, będącej jednym z głównych modułów systemu wspomagania decyzji na rynkach kapitałowych.

Słowa kluczowe: wspomaganie decyzji, baza wiedzy, model wyceny, obligacja katastroficzna, ryzyko niewypłacalności, poziom bezpieczeństwa, wartość zagrożona (VaR), funkcja użyteczności, zasada akceptacji, zasada preferencji.

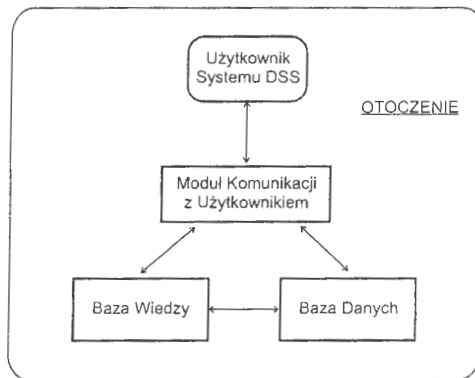
2. Model wyceny obligacji katastroficznych jako jeden z elementów systemu wspomaganie decyzji na rynku kapitałowym

Jak już wspomniano we wprowadzeniu, proponowany w pracy model wyceny obligacji katastroficznych został pomyślany jako jeden z elementów systemu wspomaganie decyzji na rynku kapitałowym. Systemy te są pewną szczególną odmianą ogólnej klasy rozwijanych intensywnie od początku lat osiemdziesiątych XX wieku – systemów wspomaganie decyzji (DSS – *decision support systems*). Ogólną charakterystykę tych systemów – jak i wyspecjalizowanych systemów wspomaganie decyzji na rynkach finansowych – można przedstawić skrótowo następująco:

Charakterystyka ogólna systemów wspomaganie decyzji. Zgodnie z ogólnymi zasadami inżynierii systemów wspomaganie decyzji (DSS), podstawą konstrukcji tych systemów są trzy elementy składowe :

- Baza Wiedzy (*knowledge base*)
- Baza Danych (*data base*)
- Moduł komunikacji z użytkownikiem (DGS – *Dialog Generation System*).

Układ wzajemnych powiązań pomiędzy wymienionymi powyżej składnikami systemu wspomaganie decyzji (DSS) – przedstawiono schematycznie na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Ogólny schemat blokowy systemu wspomaganie decyzji (DSS); por. Sage (1991)

We wcześniejszych opracowaniach, dotyczących bardziej ograniczonej wersji systemów DSS – w miejsce Bazy Wiedzy mówiono o Bazie Modeli (*model base*) oraz o systemach zarządzania bazą modeli (MBMS – *Model Base Management System*); Sprague, Carlson (1982), Sage (1991).

Obecnie osiągnięty, zaawansowany stan rozwoju systemów DSS wynika przede wszystkim z gwałtownego rozwoju systemów ekspertowych, jaki dokonał się w ostatnich

latach. W zasadzie uważa się, że obecne systemy wspomaganie decyzji bazujące na wiedzy (*knowledge-based decision support*) powstały na gruncie połączenia metodologii systemów ekspertowych z metodologią systemów wspomaganie decyzji (DSS), rozumianych w bardziej „tradycyjnym” sensie.

W poprzednich latach, niektórzy autorzy wyraźnie odróżniali pojęcia systemów ekspertowych (czy też inteligentnych baz danych) od kategorii systemów wspomaganie decyzji (DSS). A mianowicie, systemy ekspertowe projektowano jako systemy wspomagające podejmowanie decyzji bieżących, rozpatrywanych na operacyjnym szczeblu zarządzania. Systemy te w większości przypadków traktowano więc jako narzędzia wspomaganie decyzji *on line*. Natomiast „klasyczne” systemy wspomaganie decyzji (DSS), konstruowane były przede wszystkim w celu ułatwienia podejmowania decyzji na poziomie strategicznym bądź taktycznym zarządzania organizacją, programem rozwojowym czy też jakimkolwiek innym podmiotem. Tak więc to co różniło systemy eksperckie od klasycznych systemów podejmowania decyzji (DSS) – to horyzont czasowy tych decyzji oraz częstotliwość ich podejmowania; Sage (1991), s. 3. Wydaje się, że obecnie w miarę wdrażania wspomnianych powyżej *systemów wspomaganie decyzji bazujących na wiedzy* – różnice pomiędzy systemami ekspertowymi a systemami DSS ulegają stopniowemu zacieraniu.

Wyróżnia się trzy podstawowe funkcje, jakie powinny być realizowane przez efektywnie funkcjonujące systemy DSS:

- (i) Wspomaganie w sformułowaniu problemu decyzyjnego, określeniu celów i potrzeb, identyfikacji i generowaniu alternatywnych (oraz akceptowalnych) rozwiązań.
- (ii) Analiza alternatywnych rozwiązań problemu; w tym ocena wpływu poszczególnych rozwiązań na realizację sformułowanych wcześniej celów i zadań.
- (iii) Interpretacja analizy alternatywnych rozwiązań (w postaci wykresów, tablic, zestawień), wybór rozwiązania optymalnego z punktu widzenia realizacji nakreślonego celu, rozwiązania zgodnego z określonym poziomem aspiracji; itp.

Pełniejsze zrozumienie funkcji jakie stoją przed systemami DSS ułatwia wyspecyfikowanie różnic pomiędzy tymi systemami a Systemami Zarządzania Informacją (MIS – *Management Information Systems*) oraz Predykcyjnymi Systemami Zarządzania Informacją (PMIS – *Predictive Management Information Systems*). Otóż w przypadku klasycznych systemów zarządzania informacją (MIS), kluczowe znaczenie ma odpowiedź na pytania typu : „Co to jest ...?”. Udzielenie odpowiedzi na tego typu pytania wymaga (w najprostszym przypadku) przetwarzania danych oraz generowania raportów końcowych. Jednym z prostszych przykładów takiego systemu jest np. informatyczny rozkład lotów danej linii lotniczej.

Z kolei podstawowym celem funkcjonowania *predykcyjnych systemów zarządzania informacją* (PMIS) jest odpowiedź na pytania typu: „Co się stanie, gdy ...?”. Zadanie stojące przed systemami PMIS jest więc trudniejsze. W bardziej złożonych wariantach, odpowiedź na cytowaną powyżej kategorię zapytań może być uwarunkowana zastosowaniem w ramach systemu PMIS – systemu inteligentnych baz danych. W prostszych przypadkach – może

wystarczyć w tym celu zastosowanie arkuszy kalkulacyjnych, czy też (zależnie od okoliczności) – np. prognostycznych modeli makroekonomicznych.

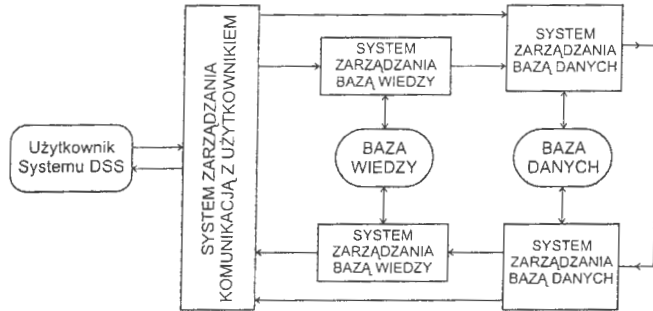
Natomiast w przypadku omawianych w niniejszym punkcie systemów wspomagania decyzji (DSS) – zadanie jakie stoi przed tymi systemami jest najbardziej złożone. A mianowicie, kluczowe znaczenie ma w rozpatrywanym przypadku odpowiedź na pytania : „Jakie są rozwiązania alternatywne ...?” oraz „Które rozwiązania alternatywne są najlepsze ?” Jeżeli jeszcze będziemy dodatkowo żądali od systemu DSS odpowiedzi na pytanie: „Co to znaczy, że dane rozwiązanie jest najlepsze...?” – to już będziemy mieli całokształt problemów, jakie są w analizowanym przypadku do rozwiązania.

Oprócz prezentowanych na rysunku 2.1 podstawowych modułów systemu wspomagania decyzji DSS, dla efektywnego funkcjonowania tych systemów niezbędne jest odpowiednie zaprojektowanie informacyjnych sprzężeń zwrotnych pomiędzy tymi modułami; a także

- systemu zarządzania bazą wiedzy (KBMS – *Knowledge Base Management System*);
- systemu zarządzania bazą danych (DBMS – *Data Base Management System*); oraz
- systemu zarządzania komunikacją z użytkownikiem (DGMS – *Dialog Generation & Management System*).

Ponadto, niezbędne jest w większości przypadków zaprojektowanie informacyjnych sprzężeń zwrotnych (oraz kanałów przesyłowych) z otoczeniem, w jakim funkcjonuje rozpatrywany system. Często również, szczególnie istotne może być w analizowanym przypadku odpowiednie zaprojektowanie komunikacji systemu DSS z rozproszonymi bazami danych (*distributed data bases*). Korzystanie z rozproszonych baz danych jest charakterystyczną cechą – będących przedmiotem naszego zainteresowania – systemów wspomagania decyzji na rynku kapitałowym. Wymagany jest tutaj bowiem dostęp *on line* do bieżących danych giełdowych takich, jak – kursy akcji, kursy obligacji, wartości kontraktów terminowych, wartości indeksów całej giełdy, wartości indeksów poszczególnych branż, wartości stóp procentowych, bieżące wartości parametrów makroekonomicznych, itp.

Ogólny schemat blokowy ilustrujący informacyjne sprzężenia zwrotne pomiędzy podstawowymi elementami systemu DSS, z wyróżnieniem systemów zarządzania bazą wiedzy i bazą danych oraz systemu zarządzania komunikacją z użytkownikiem - przedstawiono na rysunku 2.2. Schemat ten jest pewnym rozwinięciem schematu prezentowanego na rysunku 2.1.



Rys. 2.2. Ogólny schemat blokowy informacyjnych sprzężeń zwrotnych w systemie wspomagania decyzji (DSS); por. Sage (1991)

Systemy wspomagania decyzji na rynku kapitałowym. W pierwszej części niniejszego punktu podaliśmy skrótowo ogólną charakterystykę systemów wspomagania decyzji (DSS); stąd też i bardzo ogólny charakter prezentowanych na rysunkach 2.1 i 2.2 schematów blokowych. Jest oczywiste, że jakakolwiek implementacja rozpatrywanych systemów w poszczególnych dziedzinach, wymaga opracowania wyspecjalizowanych wersji tych systemów dostosowanych do określonej specyfiki problemów decyzyjnych. Prowadzi to do konieczności projektowania znacznie bardziej złożonych informacyjnych sprzężeń zwrotnych systemów DSS i tworzenia znacznie bardziej rozbudowanych schematów analizowanych systemów.

Powyższe spostrzeżenie dotyczy w szczególności *systemów wspomagania decyzji na rynkach kapitałowych*. por. Leinweber (1998), Pau (1986), Miller (1990). Na przykład, w pracy Kulikowskiego (1995) wyróżniono oprócz standardowych modułów systemu DSS – następujące bloki: Blok modeli rynku, Blok korekty parametrów modelu, Blok optymalizacji, Blok bazy wiedzy, Blok informacji o rynku i inne.

Również w jednej z prac autora niniejszej rozprawy (*et al.*) przedstawiono opis dosyć prostego systemu pt. „System Wspomagania Decyzji na Rynku Finansowym w Polsce (na podstawie danych serwisu elektronicznego BOSS - Finanse)”; por. A. Jakubowski, W. Dobrzyński (1996). Opracowany w IBS PAN prototyp systemu DSS wykorzystywał przysyłane drogą elektroniczną dane *on line* dotyczące kilkudziesięciu wskaźników charakteryzujących Warszawską Giełdę Papierów Wartościowych oraz otoczenie makroekonomiczne tej Giełdy. W celu adaptacji tych danych do bieżących potrzeb użytkowników, opracowano system komputerowy BAZFIN. System BAZFIN przetwarzał dane uzyskiwane z Serwisu BOSS – Finanse w postaci tekstowej ASCII – do formatu bazy danych, obsługiwanego przez system Zarządzania Relacyjnymi Bazami Danych MS ACCESS. System ten był umiejscowiony w pamięci głównego serwera instytucyjnej sieci komputerowej.

Omawiany system wspomagania decyzji składa się następujących bloków: Moduł Użytkownika, Moduł Komunikacji i Zarządzania, Metodologia (Baza Wiedzy),

Oprogramowanie, System BAZFIN, Serwis BOSS-Finanse (moduły: Informacje Ogólne, Rynek Pieniężny, Rynek Kapitałowy, Rynek Walutowy). Szczegółowy schemat blokowy tego systemu przedstawiono wraz z obszernym omówieniem w cytowanej już pracy *Jakubowski, Dobrzyński* (1996).

Jednym z ważniejszych modułów analizowanego systemu jest blok „**Metodologia**”. Blok ten stanowi podstawę bazy wiedzy, jaka jest niezbędna dla efektywnego funkcjonowania na danym rynku finansowym lub też dla prowadzenia prac naukowo-badawczych w tym zakresie. W takiej Bazie Wiedzy można wyróżnić kilka przekrojów. Istotny jest w tym przypadku np. podział na poszczególne dziedziny teorii finansów; tj.

- *teoria rynku pieniężnego* (modele operacji otwartego rynku, analiza struktury terminowej stóp procentowych, ocena ryzyka stopy procentowej, itp.);
- *teoria rynku kapitałowego* (analiza akcji, obligacji);
- *teoria rynku walutowego* (prognozowanie kursów walut, ocena ryzyka walutowego, wpływ ryzyka stóp procentowych);
- *teoria pochodnych instrumentów finansowych* (analiza opcji, kontraktów terminowych *futures*, kontraktów wymiany typu *swap*, itp.);
- *teoria wyceny rynkowych instrumentów finansowych* (teoria wyceny akcji, obligacji; w tym *teoria wyceny obligacji katastroficznych*).

Innym istotnym przekrojem, jaki należy wyróżnić w ramach analizowanej Bazy Wiedzy są podstawy metodologiczne różnych technik i narzędzi podejmowania decyzji na rynkach finansowych; a mianowicie:

- *ogólnogospodarcza analiza otoczenia rynku* (polityka banku centralnego i Rady Polityki Pieniężnej, poziom inflacji, poziom i efektywność produkcji, relacje import-eksport, saldo obrotów bieżących z zagranicą);
- *analiza fundamentalna spółek publicznych* (analiza branżowa, analiza wyników finansowych spółek, bilans, przepływy finansowe, wskaźnik P/E, P/BV, stopa dywidendy, prognoza sprzedaży, prognoza zysku netto, zysku operacyjnego, itp.)
- *analiza portfelowa* (konstruowanie i zarządzanie portfelami inwestycyjnymi, relacje ryzyko-oczekiwany dochód, modele Markowitza, Sharpa i inne, modele CAPM, APT, itp.);
- *analiza bieżącej koniunktury i cykli giełdowych* (zaawansowane metody analizy technicznej rynku, teoria cykli giełdowych, sieci neuronowe, teoria chaosu, fraktale, teoria katastrof, itp.).

Blok „**Oprogramowanie**” jest kolejnym elementem do którego odwołuje się użytkownik omawianego systemu wspomagania decyzji na rynku finansowym. Można wyróżnić trzy klasy takich programów komputerowych:

- *Programy przetwarzania i edycji danych*, np. MS ACCES, MS EXCEL, MS WORD, Corel Draw.
- *Oprogramowanie ogólne*, w którym wykorzystuje się zaawansowane metody z poszczególnych dziedzin statystyki oraz badań operacyjnych; np. STATGRAPHICS, STATISTICA, MINITAB, MATLAB, MATEMATICA, SIMPLEX, CPLEX.

- *Oprogramowanie specjalistyczne*; tj. wyspecjalizowane programy komputerowe przeznaczone do różnego typu analiz i podejmowania decyzji na rynkach finansowych (rynek akcji, obligacji, opcji, kontraktów terminowych, rynek walutowy). Istnieje na świecie bardzo wiele (co najmniej kilkaset) tego typu profesjonalnych programów – o bardzo różnym stopniu zaawansowania wykorzystywanych metod i technik, jak i dużej rozpiętości cenowej. Wiele z tych programów dostępnych jest bezpośrednio na rynku polskim; są to programy opracowane przez amerykańskie firmy software'owe (np. *Omega*). Ponadto, dostępne są u nas programy wytwarzane przez specjalizujące się w tym zakresie firmy krajowe (np. MOTTE, ASHER, INCARD, ATECH).

Jak już wspomniano, podstawowym celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest opracowanie modelu wyceny obligacji katastroficznych, będącego jednym z elementów scharakteryzowanej powyżej skrótkowo Bazy Wiedzy systemu wspomaganie decyzji (DSS) na rynku finansowym. W pracy, przedstawimy szczegółowy opis schematu blokowego analizowanego systemu (DSS). Schemat ten będzie uaktualnieniem i modyfikacją schematu prezentowanego przez autora w pracy *Jakubowski, Dobrzyński* (1996). Następnie, zaprezentujemy szczegółowy opis i analizę układu powiązań informacyjnych pomiędzy podstawowymi modułami podsystemu CAT-BONDS, odpowiedzialnego z wycenę analizowanych obligacji katastroficznych.

3. Podstawy teorii obligacji katastroficznych (zarys)

Jak już wspomnieliśmy we wprowadzeniu, pod pojęciem obligacji katastroficznej będziemy rozumieli ogólnie obligację komunalną, charakteryzującą się oszacowanym w określony sposób ryzykiem niewypłacalności zobowiązań ze strony emitenta takiej obligacji. W charakterze emitenta, rozpatrywać będziemy władze danego regionu (np. województwa, powiatu, itp.). Zakładamy, że zależnie od tego czy określonego rodzaju klęska żywiołowa (tj. *katastrofa*) nie wystąpi w danym regionie w zadanym horyzoncie czasowym, bądź też wystąpi - wszystkie zobowiązania finansowe emitenta będą przez niego wypełnione, bądź też - w przypadku katastrofy - emitent zawiesza obsługę takiej obligacji.

Innymi słowy, inwestor, który dokonał zakupu rozpatrywanej obligacji będzie otrzymywał odsetki od tej obligacji w kolejnych okresach (np. co rok) zadanego horyzontu inwestycyjnego, aż do momentu wystąpienia ściśle zdefiniowanej katastrofy w skali regionu. Natomiast w przypadku, gdy katastrofa taka w ogóle nie wystąpi w okresie istnienia obligacji (*term to maturity*), wszystkie zobowiązania ze strony emitenta zostaną spełnione; tj. inwestor otrzyma wszystkie płatności kuponowe, jak również - na końcu okresu inwestycyjnego - zwrot wartości nominalnej obligacji. Oczywiście, aby uniknąć możliwych wzajemnych nieporozumień - sam termin „katastrofa regionalna”, jak również wielkość wynikających stąd strat ekonomicznych - muszą być ściśle zdefiniowane w prospekcie emisyjnym analizowanej obligacji.

Z powyższego opisu bezpośrednio wynika, że aby dana obligacja katastroficzna znajdowała w ogóle nabywców, oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w taką obligację powinna dostatecznie „atrakcyjna” w porównaniu ze stopą zwrotu z istniejących na rynku obligacji wolnych od ryzyka, o tych samych strumieniach finansowych (np. obligacji skarbowych). Oczywiście, odpowiedź na pytanie o jaką wartość wymagana stopa zwrotu z obligacji katastroficznej powinna być wyższa od stopy zwrotu wolnej od ryzyka - jest dosyć złożonym problemem. Ogólnie można powiedzieć, że owa „ premia za ryzyko” (*risk premium*), mierzona różnicą pomiędzy oczekiwaną (czy też wymaganą) stopą zwrotu z obligacji katastroficznej a stopą zwrotu z „analogicznej” obligacji skarbowej, powinna zależeć od szacowanego ryzyka wystąpienia określonej katastrofy w rozpatrywanym regionie, wielkości spodziewanych strat jak i od wielu innych czynników; *Stripple* (1998). Podstawowym czynnikiem wyceny obligacji katastroficznej przez inwestora, tj. wyznaczenia określonego dyskonta cenowego tej obligacji w stosunku do obligacji wolnej od ryzyka, jest możliwość dostępu inwestora do oszacowań prawdopodobieństwa wystąpienia katastrofy w analizowanym regionie.

W pracy, jako przykład katastrofy regionalnej, rozpatrywać będziemy możliwość wystąpienia w danym regionie powodzi o charakterze klęski żywiołowej. Założymy, że zdarzenia wystąpienia bądź też niewystąpienia w kolejnych latach powodzi w analizowanym regionie, są zdarzeniami losowymi statystycznie niezależnymi, z zadanymi prawdopodobieństwami szacowanymi w skali roku. Dane takie są dla zagrożonych regionów dostarczane przez odpowiednie służby meteorologiczne; por. również *Kaczmarek* (1999).

Oznaczając przez α - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w danym roku, mamy: $\alpha = 0.002$ (p.a.) - dla „wody 500-letniej”; $\alpha = 0.01$ (p.a.) - dla wody „100-letniej”, $\alpha = 0.05$ - dla „wody 20-letniej”, $\alpha = 0.10$ - dla „wody 10-letniej”; itp.

Dla ilustracji zagadnienia wyceny obligacji katastroficznej, założymy, że jest to obligacja 3-letnia z płatnym co 1 rok kuponem odsetkowym. Tak więc przyjmując, że zdarzenia losowe dotyczące możliwości wystąpienia powodzi w kolejnych latach analizowanego okresu $T = 3$ lata - są zdarzeniami niezależnymi, mamy:

- $p_1 = \alpha$ - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w 1-szym roku,
- $p_2 = (1 - \alpha)\alpha$ - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w 2-gim roku oraz niewystąpienia powodzi w 1-szym roku,
- $p_3 = (1 - \alpha)^2 \alpha$ - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w 3-cim roku oraz niewystąpienia powodzi w pierwszych dwóch latach,
- $p_4 = (1 - \alpha)^3$ - prawdopodobieństwo niewystąpienia powodzi w pierwszych trzech latach.

Jak można łatwo sprawdzić, zachodzi

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \alpha + (1 - \alpha)\alpha + (1 - \alpha)^2 \alpha + (1 - \alpha)^3 = 1.$$

Na przykład, dla $\alpha = 0.10$ (tj. „woda 10-letnia”) mamy

$$p_1 = 0.1000, \quad p_2 = 0.0900, \quad p_3 = 0.0810, \quad p_4 = 0.7290.$$

A zatem, rozpatrywane powyżej cztery zdarzenia losowe dotyczące wystąpienia (bądź nie) powodzi w kolejnych latach $t=1,2,3$ analizowanego horyzontu inwestycyjnego wypełniają całą przestrzeń zdarzeń.

Dla rozpatrywanej obligacji katastroficznej wprowadzimy następujące oznaczenia: C - odsetki roczne, N - wartość nominalna, P_* - cena obligacji w chwili $t=0$. Wprowadzimy również następujące założenia upraszczające co do analizowanego rynku finansowego:

- (i) Struktura terminowa stóp procentowych jest scharakteryzowana przez płaską krzywą dochodowości (*flat yield curve*), tj. $r_{01} = \dots = r_{0t} = \dots = r_{0n} = r_f$; r_{0t} - stopa procentowa *spot* dla lat $t=1, \dots, n$; r_f - stopa procentowa wolna od ryzyka, określona na podstawie rentowności do wykupu (*YTM*) rocznych bonów skarbowych.
- (ii) W pracy, jako jedyne ryzyko inwestycyjne, rozpatrujemy ryzyko niewypłacalności emitenta obligacji (*default risk*). Natomiast nie bierzemy pod uwagę ryzyka stopy procentowej r_f . Zakładamy, że wartość r_f jest dana i pozostaje niezmienna przez okres $T=3$ lata. W przypadku nieoczekiwanej zmiany stopy r_f , całą prezentowaną poniżej procedurę wyceny obligacji należy powtórzyć od nowa.
- (iii) Analizowany rynek obligacji jest w stanie równowagi, tj. cena rynkowa P_0 każdej wolnej od ryzyka n -kuponowej obligacji jest równa jej wartości bieżącej *PV* (*present value*), tj.

$$P_0 = PV = \frac{C}{(1+r_f)} + \frac{C}{(1+r_f)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r_f)^{n-1}} + \frac{C+N}{(1+r_f)^n}. \quad (1)$$

Z powyższego opisu wynika, że cena P_* obligacji katastroficznej powinna być istotnie niższa od wartości bieżącej P_0 obligacji wolnej od ryzyka, mającej te same strumienie finansowe; tj. $P_* < P_0$. Innymi słowy, obligacja katastroficzna powinna być wyceniana z dyskontem

$$D_* = \frac{P_* - P_0}{P_0} \times 100 \quad [\%], \quad (D_* < 0)$$

tak, aby nastąpiła określona kompensacja ryzyka niewypłacalności, będącego cechą charakterystyczną tej obligacji.

Wartość dyskonta D_* powinna oczywiście zależeć od prawdopodobieństwa α wystąpienia powodzi (czy też ogólniej - katastrofy) w danym roku, w analizowanym regionie. Zagadnienie określenia ceny P_* obligacji katastroficznej, a tym samym i dyskonta D_* (zauważmy, że wartość P_0 jest w myśl przyjętych przez nas założeń - dana), stanowić będzie zasadniczy przedmiot rozważań prowadzonych w dalszej części pracy.

Zauważmy, że w ogólnym przypadku, obligację katastroficzną można traktować jako obligację o „niekompletnej” (czy też losowej) strukturze strumieni finansowych, w porównaniu z obligacją wolną od ryzyka, o tym samym kuponie C oraz wartości nominalnej N . Fakt ten zilustrowano na rysunku 1.

Wprowadzimy oznaczenie: R^* - stopa zwrotu (za cały okres 3-letni) z inwestycji w obligację katastroficzną. Ze struktury strumieni finansowych tej obligacji, przedstawionej na

rysunku 1, wynika, że stopa zwrotu R^* jest dyskretną zmienną losową, przybierającą z prawdopodobieństwami p_1, \dots, p_4 - wartości R_1^*, \dots, R_4^* , wyrażone następującym wzorem:

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = -1 = -100\% & ; p_1 = \alpha \\ R_2^* = \frac{C(1+r_f)^2 - P_*}{P_*} & ; p_2 = (1-\alpha)\alpha \\ R_3^* = \frac{C(1+r_f)^2 + C(1+r_f) - P_*}{P_*} & ; p_3 = (1-\alpha)^2\alpha \\ R_4^* = \frac{C(1+r_f)^2 + C(1+r_f) + C + N - P_*}{P_*} & ; p_4 = (1-\alpha)^3 \end{cases} \quad (2)$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$x = \frac{N}{P_*}, \quad i = \frac{C}{N} \text{ - oprocentowanie nominalne obligacji;}$$

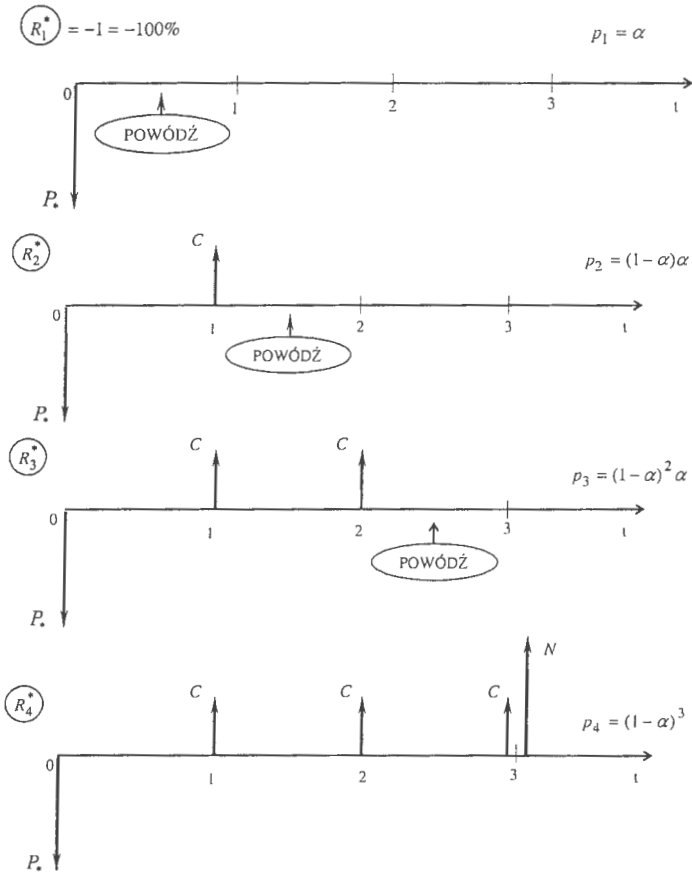
$$R_1 = r_f, \quad R_2 = (1+r_f)^2 - 1, \quad R_3 = (1+r_f)^3 - 1,$$

- stopy zwrotu wolne od ryzyka za okres 1 roku, 2 lat, 3 lat; oraz

$$\mathfrak{R}_2 = (1+R_1)i, \quad \mathfrak{R}_3 = (1+R_1)i + (1+R_2)i, \quad \mathfrak{R}_4 = (1+R_1)i + (1+R_2)i + (1+i).$$

Zakładamy, że wszystkie podane powyżej wartości są dane - za wyjątkiem ceny P_* , a tym samym i zmiennej $x = N/P_*$. Uwzględniając powyższe oznaczenia, ze wzoru (2) - po przekształceniach - otrzymamy

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = -1 & ; p_1 = \alpha \\ R_2^* = \mathfrak{R}_2 x - 1 & ; p_2 = (1-\alpha)\alpha \\ R_3^* = \mathfrak{R}_3 x - 1 & ; p_3 = (1-\alpha)^2\alpha \\ R_4^* = \mathfrak{R}_4 x - 1 & ; p_4 = (1-\alpha)^3 \end{cases} \quad (3)$$



Rys. 3.1. Strumienie finansowe obligacji katastroficznej uwarunkowane wystąpieniem bądź niewystąpieniem powodzi w kolejnych latach; α - prawdopodobieństwo powodzi (p.a.); p_1, p_2, p_3 - prawdopodobieństwa warunkowe wystąpienia powodzi w latach $t = 1, 2, 3$; p_4 - prawdopodobieństwo niewystąpienia powodzi w całym okresie 3 lat.

Oznaczmy: R_e - wartość oczekiwana stopy zwrotu R^* , σ - odchylenie standardowe stopy zwrotu R^* . Wprowadzając dodatkowo oznaczenie

$$a \triangleq p_2 \mathfrak{R}_2 + p_3 \mathfrak{R}_3 + p_4 \mathfrak{R}_4, \quad (4)$$

$$b \triangleq [p_1 a^2 + p_2 (\mathfrak{R}_2 - a)^2 + p_3 (\mathfrak{R}_3 - a)^2 + p_4 (\mathfrak{R}_4 - a)^2]^{1/2}, \quad (5)$$

ze wzoru (3), po przekształceniach, mamy

$$R_e \triangleq \sum_{i=1}^4 p_i R_i^* = [p_2 \mathfrak{R}_2 + p_3 \mathfrak{R}_3 + p_4 (\mathfrak{R}_4) x - 1 = ax - 1, \quad (6)$$

$$\sigma \triangleq \left[\sum_{i=1}^4 p_i (R_i^* - R_e)^2 \right]^{1/2} = \\ = \left[p_1 a^2 + p_2 (\mathfrak{R}_2 - a)^2 + p_3 (\mathfrak{R}_3 - a)^2 + p_4 (\mathfrak{R}_4 - a)^2 \right]^{1/2} x = bx. \quad (7)$$

Tak więc wartość oczekiwana R_e stopy zwrotu z inwestycji w obligację katastroficzną, jak również odchylenie standardowe σ tej stopy zwrotu - zostały wyrażone jako liniowe funkcje zmiennej $x = N / P$. Należy podkreślić, że wartości występujących we wzorach (4) - (7) współczynników a i b są znane z założenia. Równania (6), (7) są więc parametrycznymi równaniami zależności liniowej pomiędzy wartościami σ i R_e ; z (6) mamy bowiem

$$x = \frac{1}{a} (R_e + 1) \quad (8)$$

oraz z (7) i (8) otrzymamy

$$\mathbb{L}_{\text{CAT}}: \quad \sigma = \frac{a}{b} (R_e + 1), \quad (9)$$

gdzie przez \mathbb{L}_{CAT} oznaczono symbolicznie linię obligacji katastroficzej rozpatrywaną na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$.

Uogólnienie wyprowadzonych powyżej zależności (2) - (9) na przypadek obligacji n - kuponowej będzie przedstawione w rozprawie doktorskiej autora.

Podobnie jak w klasycznej teorii portfela (Elton, Gruber, 1995), odchylenie standardowe σ możemy traktować jako pewną miarę ryzyka obligacji katastroficzej. W następnym punkcie, przedstawimy nieco inne podejście do oceny tego ryzyka.

4. Poziom bezpieczeństwa papieru wartościowego jako miara ryzyka inwestycyjnego

W nowoczesnej teorii zarządzania portfelowego definiuje się wiele miar ryzyka inwestycyjnego, tj. odchylenie standardowe stopy zwrotu, semiodchylenie standardowe, współczynnik zmienności σ / R_e (dla dodatnich R_e), współczynnik skośności rozkładu stopu zwrotu, prawdopodobieństwo osiągnięcia określonego poziomu aspiracji i inne. Poniżej, wprowadzimy koncepcję tzw. *poziomu bezpieczeństwa* papieru wartościowego (lub portfela). Idea ta została po raz pierwszy sformułowana przez Kataoka, por. Elton, Gruber, (1995), a następnie zmodyfikowana przez Kulikowskiego (1998a,b), w ramach modelu optymalizacji portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem dwuczynnikowej funkcji użyteczności.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

R_κ - poziom bezpieczeństwa papieru wartościowego (*the safety level*), tj. stopa zwrotu z inwestycji osiągnięta w „najgorszym przypadku”;

p_κ - założone z góry prawdopodobieństwo „najgorszego przypadku”; tj. zadana (przez inwestora) mała liczba dodatnia, np. $p_\kappa = 0.05$.

Formalna definicja poziomu bezpieczeństwa R_κ jest następująca:

$$P(R^* \leq R_\kappa) \triangleq p_\kappa, \quad (10)$$

gdzie $P(\cdot)$ - prawdopodobieństwo, R^* - stopa zwrotu z inwestycji (zmienna losowa o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa).

Tak więc dla małej wartości p_κ , poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego może interpretować jako stopę zwrotu z inwestycji, która „prawie nigdy” nie zostanie przekroczona w dół. Na przykład, dla $p_\kappa = 0.05$ może się to zdarzyć tylko jeden raz na dwadzieścia możliwych przypadków. Z powyższego wynika, że im wyższy jest poziom bezpieczeństwa R_κ danego papieru wartościowego, tym mniejsze jest ryzyko inwestycyjne w analizowanym przypadku.

Przedstawioną powyżej koncepcję, zmodyfikujemy w następujący sposób. Oznaczmy:

κ - współczynnik liczbowy będący pewną subiektywną miarą stopnia „awersji do ryzyka”, charakteryzującego danego inwestora; $\kappa \geq 0$, np. $\kappa = 0.5, 1.0, 1.5$.

Poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego możemy teraz zdefiniować jako

$$R_\kappa \triangleq R_e - \kappa\sigma, \quad (11)$$

gdzie R_e - wartość oczekiwana oraz σ - odchylenie standardowe rzeczywistej (losowej) stopy zwrotu R^* z inwestycji.

Zauważmy, że im wyższy jest stopień κ awersji do ryzyka danego inwestora, tym niższy jest - z punktu widzenia tego inwestora - poziom bezpieczeństwa R_κ analizowanego papieru wartościowego. Wprowadzenie definicji (11) poziomu bezpieczeństwa R_κ , umożliwia wydzielenie z ogólnej kategorii ryzyka inwestycyjnego „części obiektywnej”, której miarą jest odchylenie standardowe σ losowej stopy zwrotu R^* oraz „części subiektywnej”, mierzonej za pomocą współczynnika κ , charakteryzującego danego inwestora. Z powyższego wynika, że ten sam papier wartościowy, tj. walor o ustalonych parametrach R_e , σ , może być postrzegany jako papier mniej lub bardziej ryzykowny, w zależności od stopnia κ awersji danego inwestora do ryzyka. Parametr κ będziemy dalej skrótowo nazywali *współczynnikiem ryzyka* inwestora.

Ze wzorów (10) i (11) otrzymamy

$$P(R^* \leq R_\kappa) = P(R^* \leq R_e - \kappa\sigma) = p_\kappa. \quad (12)$$

Załóżmy, że wszystkie analizowane papiery wartościowe, charakteryzują się tym samym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa stóp zwrotu R^* ; np. dla uproszczenia, niech to będzie rozkład normalny. Wówczas, z zależności (12) wynika, że współczynnik ryzyka inwestora κ jest ściśle zdeterminowany przez zadaną wartość prawdopodobieństwa p_κ „najgorszego przypadku”. Oznaczając

$X = (R^* - R_e) / \sigma$ - standaryzowana wartość zmiennej losowej R^* , czyli $R^* = R_e + \sigma X$, z (12) otrzymamy bowiem

$$P(R^* \leq R_e - \kappa\sigma) = P(R_e + \sigma X \leq R_e - \kappa\sigma) = P(X \leq -\kappa) = F(-\kappa) = p_\kappa, \quad (13)$$

gdzie $F(\cdot)$ - dystrybuanta zmiennej losowej.

Mając na uwadze, że dystrybuanta $F(\cdot)$ zmiennej losowej rozkładu jest z założenia funkcją ściśle rosnącą, otrzymaliśmy następujący wynik. Im niższa jest wartość przypisana przez danego inwestora do prawdopodobieństwa p_κ „najgorszego przypadku”, tym wyższy jest współczynnik ryzyka κ charakteryzujący tego inwestora. W szczególności, posługując się tablicami statystycznymi dla rozkładu normalnego, możemy wyróżnić pewne charakterystyczne wartości prawdopodobieństw p_κ i odpowiadających im współczynników κ . A mianowicie,

$$p_\kappa = 0.309 \approx 1/3, \quad \kappa = 0.5 \quad (\text{skłonność do ryzyka - } risk\ seeking) \quad (14)$$

$$p_\kappa = 0.159 \approx 1/6, \quad \kappa = 1.0 \quad (\text{tolerancja ryzyka - } risk\ tolerance) \quad (15)$$

$$p_\kappa = 0.067 \approx 1/15, \quad \kappa = 1.5 \quad (\text{awersja do ryzyka - } risk\ aversion) \quad (16)$$

Przyjęta powyżej skala, przypisująca określonym cechom inwestora konkretne wartości liczbowe prawdopodobieństw p_κ (a tym samym i wartości współczynników κ) ma w dużym stopniu charakter arbitralny. Po prostu przyjęliśmy, że inwestor charakteryzujący się „awersją do ryzyka”, wyraża zgodę na to, że rzeczywista stopa zwrotu R^* z podejmowanych przez niego inwestycji będzie niższa od poziomu bezpieczeństwa R_κ tylko w jednym na piętnaście możliwych przypadków (dla dziennych stóp zwrotu - w przybliżeniu 1 raz w okresie trzech tygodni). Natomiast dla inwestora o skłonności do ryzyka, przypadek taki może zachodzić jeden raz na każde trzy możliwości (dla dziennych stóp zwrotu - jeden raz na każde trzy sesje giełdowe).

Należy podkreślić, że założenie co do normalności rozkładu stóp zwrotu R^* nie jest niezbędne; wzory (12), (13) obowiązują bowiem w przypadku dowolnego rozkładu stóp zwrotu R^* , o znanej dystrybuancie $F(\cdot)$. W zależności od analizowanego (innego niż normalny) rozkładu R^* , wartości liczbowe parametru κ odpowiadające tym samym wartościom prawdopodobieństw p_κ , będą oczywiście różne od wartości podanych we wzorach (14) – (16). W szczególności, dla ogólnej klasy ciągłych unimodalnych rozkładów symetrycznych, z nierówności Czebyszewa można wykazać Kulikowski (1998a), że na przykład dla $p_\kappa = 1/6$, musimy nałożyć bardziej restrykcyjny (niż dla rozkładu normalnego) warunek na parametr κ ; tj. $\kappa = 1.155$.

W ogólnym przypadku, zagadnienie identyfikacji współczynników κ dla poszczególnych grup inwestorów jest zagadnieniem złożonym. Współczynniki te zależą bowiem od szeregu różnych czynników, takich jak poziom bogactwa inwestora, czy też dokładniej - zależą one od proporcji jego ogólnych zasobów, jakie są inwestowane w danym okresie w walory obciążone ryzykiem (np. w akcje). Mogą one również zależeć od horyzontu inwestycyjnego inwestora, a także – od jego wieku. Z powyższego bezpośrednio wynika, że współczynniki κ mogą się charakteryzować określoną niestabilnością wraz z upływem czasu bieżącego. Zagadnienia te są szerzej omówione w pracach Kulikowskiego (1998a,b). Problematykę tę omówimy również obszerniej w rozprawie doktorskiej.

4.1. Reguła akceptacji

Wprowadzimy teraz pojęcie *reguły akceptacji* dla analizowanego zagadnienia inwestycyjnego. A mianowicie, założymy, że inwestor akceptuje dany papier wartościowy dla swych celów inwestycyjnych tylko wówczas, gdy poziom bezpieczeństwa R_x tego waloru jest nieujemny; tj. gdy

$$R_x = R_e - \kappa\sigma \geq 0; \quad \text{gdzie } \kappa \geq 0. \quad (17)$$

$$\text{Z reguły akceptacji (17) otrzymamy } \frac{\sigma}{R_e} \leq \frac{1}{\kappa}. \quad (18)$$

Tak więc, dla zadanej wartości parametru κ inwestora, reguła akceptacji jest dla danego papieru wartościowego spełniona, gdy *współczynnik zmienności* stopy zwrotu R^* z tego papieru, tj. σ/R_e - jest ograniczony od góry przez $(1/\kappa)$. Zauważmy ponadto, że dla przypadku $\kappa = 1.0$, reguła akceptacji (17) sprowadza się do prostego warunku: $R_e \geq \sigma$.

Interpretacja geometryczna:

Z reguły akceptacji (17) mamy

$$\Omega_a : \sigma \leq \sigma_g = \frac{1}{\kappa} R_e. \quad (19)$$

Tak więc na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$ zdefiniowany mamy pewien obszar Ω_a parametrów R_e, σ papieru wartościowego, dla którego spełniona jest reguła akceptacji. Obszar ten ograniczony jest przez linię akceptacji \mathbb{L}_{ACC} o równaniu

$$\mathbb{L}_{\text{ACC}} : \sigma_g = \frac{1}{\kappa} R_e; \quad R_e \geq 0. \quad (20)$$

Zauważmy teraz, że o ile dla obligacji katastroficznej reprezentowanej w układzie współrzędnych $(0, R, \sigma)$ przez linię \mathbb{L}_{CAT} o równaniu (9), reguła akceptacji ma być spełniona – linia \mathbb{L}_{CAT} musi przecinać linię \mathbb{L}_{ACC} , będącą brzegiem obszaru akceptacji Ω_a . A zatem, współczynnik kierunkowy linii \mathbb{L}_{CAT} musi mieć niższą wartość niż współczynnik kierunkowy linii \mathbb{L}_{ACC} .

Tak więc z równań (9) i (20) mamy $\frac{a}{b} < \frac{1}{\kappa}$, a stąd

$$0 \leq \kappa < \kappa_{\max} = \frac{a}{b}. \quad (21)$$

Nierówność (21) określa *warunek konieczny* reguły akceptacji, sformułowany dla rozpatrywanego zagadnienia wyceny obligacji katastroficznej. Oznacza to, że w przypadku $\kappa \geq \kappa_{\max}$, poziom bezpieczeństwa R_x analizowanej obligacji jest ujemny (tj. $R_x < 0$); inwestycję w taką obligację z założenia odrzucamy.

Ostatnio, jako jedną z miar ryzyka inwestycyjnego wprowadza się pojęcie tzw. wartości zagrożonej *VaR* (*value at risk*); por. *Jajuga* (1999), *Kulikowski* (2000a). Otóż pojęcie to odnosi się również bezpośrednio do wprowadzonej przez nas koncepcji reguły akceptacji. A mianowicie, mnożąc obie strony nierówności (17) przez wysokość ceny P zakupu danego papieru wartościowego otrzymamy

$$P_e R_e \geq P_e \kappa \sigma \triangleq VaR.$$

Zauważmy teraz, że lewa strona powyższej nierówności oznacza oczekiwany zwrot pieniężny z danej inwestycji, tj. $VaE \triangleq P_e R_e$. Natomiast prawa strona - jest równa z definicji wartości zagrożonej VaR , przy pominięciu czynnika czasu t ; por. *Urzędńska (1999), Bałamut (2002)*.

Tak więc spełnienie reguły akceptacji (17) jest w powyższym sensie równoważne żądaniu, aby oczekiwany zwrot pieniężny $VaE = P_e R_e$ z analizowanej inwestycji był wyższy od wartości zagrożonej $VaR = P_e \kappa \sigma$; tj. $VaE \geq VaR$. Natomiast różnicę pomiędzy tymi wielkościami, tj.

$$VaS \triangleq VaE - VaR = P_e (R_e - \kappa \sigma) = P_e \times R_\kappa,$$

możemy - poprzez analogię nazwać tzw. wartością bezpieczną (VaS - *value at safety*); *Kulikowski (2000a)*. Jest to oczekiwany zwrot pieniężny w najgorszym przypadku; tj. przy stopie zwrotu określonej przez poziom bezpieczeństwa R_κ . Reguła akceptacji (17) orzeka po prostu, że oczekiwany zwrot pieniężny VaS powinien być nieujemny.

4.2. Wskaźnik bezpieczeństwa papieru wartościowego

Zakładając, że dla danego papieru wartościowego spełniona jest reguła akceptacji, tj. że $R_\kappa = R_e - \kappa \sigma \geq 0$, możemy zdefiniować następujący (nieujemny) wskaźnik bezpieczeństwa S tego waloru; tj.

$$S \triangleq \frac{R_\kappa}{R_e} = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}; \quad \text{przy czym } S \in [0,1]. \quad (22)$$

Wskaźnik bezpieczeństwa S papieru wartościowego (*the safety index*) osiąga wartość zerową „na granicy spełnienia” reguły akceptacji, tj. dla $R_\kappa = \kappa \sigma$. Natomiast maksymalna wartość tego wskaźnika jest równa 1, co zachodzi dla waloru wolnego od ryzyka; tj. dla $\sigma = 0$. Zauważmy również, że wartość wskaźnika bezpieczeństwa S analizowanego papieru wartościowego maleje, przy wzroście współczynnika zmienności σ / R_e , jak również przy wzroście współczynnika ryzyka κ , charakteryzującego danego inwestora. Tak więc wartość S maleje – przy wzroście zarówno „obiektywnej” jak i „subiektywnej” składowej całkowitego ryzyka rozpatrywanego waloru.

5. Dwuczynnikowa funkcja użyteczności inwestora

Jak już wspomniano, koncepcja dwuczynnikowej funkcji użyteczności w odniesieniu do zagadnień inwestycyjnych została wprowadzona w ciągu ostatnich lat w pracach *Kulikowskiego* (1998-2003). Podstawą tego podejścia jest przekonanie autora, że aby w właściwy sposób opisać zachowanie inwestorów funkcjonujących na analizowanym rynku finansowym, należy uwzględnić co najmniej dwa czynniki: oczekiwaną stopę zwrotu R_e z inwestycji oraz stopę zwrotu „w najgorszym przypadku” R_K . Co więcej, oba te czynniki powinny być uwzględnione bezpośrednio w funkcji użyteczności charakteryzującej określone preferencje inwestora.

Założmy, że dla analizowanego papieru wartościowego spełniona jest *reguła akceptacji* (17), a tym samym zachodzi $R_K \geq 0$ oraz $S \geq 0$. Dla celów dalszych rozważań przyjmiemy ponadto, że funkcję użyteczności inwestora $U(R_e, R_K)$ można aproksymować następującą funkcją o postaci *Cobba-Douglasa*:

$$U = U(R_e, R_K) = \gamma R_e^{1-\beta} R_K^\beta, \quad (23)$$

gdzie $\gamma > 0$, $\beta \in [0,1]$ - zadane stałe, oraz $R_K = R_e - \kappa \sigma$ *poziom bezpieczeństwo* papieru wartościowego.

Dwuczynnikowa funkcja użyteczności $U(R_e, R_K)$ może być łatwo przekształcona do postaci $U = U(R_e, S)$, gdzie *wskaźnik bezpieczeństwa* papieru wartościowego S jest określony wzorem (22). A mianowicie, z (23) mamy

$$U = \gamma R_e^{1-\beta} R_K^\beta = \gamma R_e \left(\frac{R_K}{R_e} \right)^\beta \quad \text{oraz - z (22)}$$

$$U = U(R_e, S) = \gamma R_e S^\beta, \quad \gamma > 0, \beta \in [0,1]. \quad (24)$$

Jak można łatwo sprawdzić, współczynnik β będący współczynnikiem elastyczności użyteczności U inwestora, ze względu na zmianę czynnika R_K , jest również analogicznym współczynnikiem elastyczności ε_S ze względu na zmianę czynnika S . Biorąc pod uwagę (24), mamy bowiem $\frac{\partial U}{\partial S} = \gamma \beta R_e S^{\beta-1}$; a stąd, po przekształceniach, otrzymamy

$$\varepsilon_S \triangleq \frac{dU}{U} / \frac{dS}{S} = \frac{\partial U}{\partial S} \frac{S}{U} = \beta.$$

Tak więc z powyższego równania wynika, że współczynnik β określa procentowy wzrost użyteczności inwestora spowodowany wzrostem wskaźnika bezpieczeństwa S papieru wartościowego o 1%. Możemy więc przyjąć, że parametr β określa wrażliwość inwestora na wzrost (lub spadek) wskaźnika bezpieczeństwa S . A zatem, podobnie jak wcześniej wprowadzony parametr κ , wartość liczbowa współczynnika β określa w pewien sposób stosunek inwestora do ryzyka inwestycyjnego i jest ona immanentną cechą tego inwestora.

Zauważmy, że wzrost wartości współczynnika β oznacza wzrost stopnia awersji do ryzyka charakteryzującej danego inwestora. W granicznym przypadku $\beta = 1$, ze wzorów (24) i (22) mamy

$$U = U(R_e, S) = \gamma R_e, S = \gamma R_\kappa. \quad (25)$$

Oznacza to, że dla $\beta=1$, inwestor w swych decyzjach bierze pod uwagę wyłącznie ryzyko inwestycyjne wyrażone przez poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego (lub portfela).

Natomiast dla $\beta=0$ mamy sytuację przeciwną; zerowa wartość tego współczynnika oznacza, że inwestor w ogóle nie bierze pod uwagę ryzyka inwestycyjnego, reprezentowanego w naszym modelu przez wskaźnik bezpieczeństwa S ; mamy wówczas

$$U = U(R_e, S) = \gamma R_e S^0 = \gamma R_e \quad (26)$$

Z powyższych rozważań wynika, że parametry β i κ charakteryzujące stosunek danego inwestora do ryzyka powinny być w pewien sposób w naszym modelu powiązane. Wynika to bezpośrednio stąd, że jednoczesny wzrost tych parametrów oznacza wzrost stopnia awersji inwestora do ryzyka.

Biorąc pod uwagę pewne charakterystyczne wartości parametru $\kappa=0.5, 1.0, 1.5$ analizowane w punkcie 4 (por. wzory 14-16) oraz uwzględniając dodatkowo, że parametr β może zmieniać się w przedziale $[0,1]$, można zaproponować następującą relację pomiędzy tymi parametrami:

$$\kappa = 0.5 + \beta. \quad (27)$$

Posługując się wzorem (27), dla pewnych zadanych wartości β z przedziału $[0,1]$, otrzymamy następującą - w pewnym stopniu „subiektywną” - skalę obrazującą stosunek danego inwestora do ryzyka. A mianowicie,

$$\beta = \begin{cases} 0.00; & \kappa = 0.50 & - \text{skłonność do ryzyka} & (p_\kappa \approx 1/3) \\ 0.25; & \kappa = 0.75 & - \text{umiarkowana skłonność do ryzyka} \\ 0.50; & \kappa = 1.00 & - \text{tolerancja ryzyka} & (p_\kappa \approx 1/6) \\ 0.75; & \kappa = 1.25 & - \text{umiarkowana awersja do ryzyka} \\ 1.00; & \kappa = 1.50 & - \text{awersja do ryzyka} & (p_\kappa \approx 1/15) \end{cases}$$

6. Reguła preferencji

Założmy, że reguła akceptacji (17) jest dla analizowanego papieru wartościowego spełniona; tj. $R_\kappa \geq 0$. Przyjmując, że dla zadanych egzogenicznie parametrów κ i β , funkcja użyteczności o postaci (24) stanowi odpowiednio adekwatny do rzeczywistości opis zachowań rynkowych inwestora, sformułujemy teraz tzw. *regułę preferencji*.

A mianowicie, w przypadku wyceny obligacji katastroficznej, proponowana procedura postępowania jest następująca. Rozważmy możliwość inwestycji w dwa alternatywne papiery wartościowe:

- (i) wolną od ryzyka obligację skarbową o stopie zwrotu R_f (za cały horyzont inwestycyjny) oraz o odchyleniu standardowym $\sigma=0$; zachodzi wówczas $S=1$ oraz - biorąc pod uwagę wzór (24) - $U_f = U(R_f, 1) = \gamma R_f$;

(ii) obligację katastroficzną o oczekiwanej stopie zwrotu R_e oraz odchyleniu standardowym σ wyrażonymi wzorami (6) i (7); czyli - w tym przypadku mamy

$$S = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}; \quad \text{oraz} \quad U = U(R_e, \sigma) = \gamma R_e S^\beta.$$

Zakładamy, że inwestycja (ii) w obligację katastroficzną jest bardziej preferowana przez inwestora w porównaniu z inwestycją (i) w obligację skarbową, gdy zachodzi :

$$U \geq U_f, \quad \text{tj.} \quad \gamma R_e S^\beta \geq \gamma R_f; \quad \text{a tym samym}$$

$$R_e \geq \frac{R_f}{S^\beta}. \quad (28)$$

Z nierówności (28) bezpośrednio wynika, że w przypadku, gdy wskaźnik bezpieczeństwa S obligacji katastroficzej maleje, to - aby reguła preferencji była spełniona - spadek ten powinien być kompensowany odpowiednio dużym wzrostem oczekiwanej stopy zwrotu R_e .

Zauważmy również, że biorąc pod uwagę (28) oraz fakt, że $S^\beta \leq 1$, mamy

$$R_e \geq R_f. \quad (29)$$

Tak więc warunek (29) jest warunkiem koniecznym na to, aby reguła preferencji była spełniona. Biorąc dodatkowo pod uwagę wprowadzoną wcześniej regułę akceptacji (17), **warunkiem koniecznym** reguły preferencji jest, aby

$$R_e \geq \max \{ \kappa \sigma; R_f \}. \quad (30)$$

W przypadku, gdy dla danego inwestora zachodzi $\beta = 0$ (cecha *risk seeking*) z (26) mamy $U(R_e, S) = \gamma R_e$; a zatem, warunek (30) jest równocześnie **warunkiem dostatecznym** reguły preferencji.

Podsumowując przedstawione powyżej rozważania dotyczące teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności oraz reguły preferencji, podamy teraz podstawowe wzory obowiązujące dla pewnych wyróżnionych parametrów (β, κ), charakteryzujących stosunek danego inwestora do ryzyka. A mianowicie:

Dla $\beta = 0, \kappa = 0.5$ (*risk seeking*)

$$S = 1 - 0.5 \frac{\sigma}{R_e}, \quad U = \gamma R_e S^\beta = \gamma R_e \quad \text{oraz} \quad R_e \geq \frac{R_f}{S^0} = R_f.$$

Dla $\beta = 0.5, \kappa = 1.0$ (*risk tolerance*)

$$S = 1 - \frac{\sigma}{R_e}, \quad U = \gamma R_e \sqrt{S} \quad \text{oraz} \quad R_e \geq \frac{R_f}{\sqrt{S}}.$$

Dla $\beta = 1.0, \kappa = 1.5$ (*risk aversion*)

$$S = 1 - 1.5 \frac{\sigma}{R_e}, \quad U = \gamma R_e S = \gamma R_x \quad \text{oraz} \quad R_e \geq \frac{R_f}{S}; \quad \text{czyli} \quad R_x \geq R_f.$$

Zauważmy, że w ostatnim z wymienionych przypadków (tj. dla $\beta = 1.0$), poziom bezpieczeństwa R_x papieru wartościowego powinien być wyższy od stopy zwrotu R_f wolnej

od ryzyka. Jest to w istocie dosyć silne wymaganie; przypadek ten utożsamiliśmy z *awersją do ryzyka*.

Bardziej szczegółowy wykaz postaci wskaźników bezpieczeństwa S , funkcji użyteczności $U(R_e, S)$ oraz reguł preferencji, wyznaczonych dla różnych parametrów ryzyka β i κ - przedstawiono w tablicy 6.1.

TABLCA 6.1

Parametry ryzyka inwestora, wskaźniki bezpieczeństwa, funkcje użyteczności i reguły preferencji

Parametry ryzyka inwestora β, κ	Wskaźnik bezpieczeństwa $S = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}; S \in [0,1]$	Funkcja użyteczności $U(R_e, S) = \gamma R_e S^\beta$	Reguła preferencji $R_e \geq \frac{R_f}{S^\beta}$
Sklonność do ryzyka: $\beta = 0, \kappa = 0.50$	$S = 1 - 0.5 \frac{\sigma}{R_e}$	$U = \gamma R_e S^0 = \gamma R_e$	$R_e \geq \frac{R_f}{S^0} = R_f$
Umiarkowana skłonność do ryzyka: $\beta = 0.25, \kappa = 0.75$	$S = 1 - 0.75 \frac{\sigma}{R_e}$	$U = \gamma R_e S^{0.25}$	$R_e \geq \frac{R_f}{S^{0.25}}$
Tolerancja ryzyka: $\beta = 0.50, \kappa = 1.00$	$S = 1 - \frac{\sigma}{R_e}$	$U = \gamma R_e \sqrt{S}$	$R_e \geq \frac{R_f}{S^{0.5}}$
Umiarkowana awersja do ryzyka: $\beta = 0.75, \kappa = 1.25$	$S = 1 - 1.25 \frac{\sigma}{R_e}$	$U = \gamma R_e S^{0.75}$	$R_e \geq \frac{R_f}{S^{0.75}}$
Awersja do ryzyka: $\beta = 1.00, \kappa = 1.50$	$S = 1 - 1.5 \frac{\sigma}{R_e}$	$U = \gamma R_e S = \gamma R_e$	$R_e \geq \frac{R_f}{S} \Rightarrow R_e \geq R_f$

7. Równanie wyceny obligacji

Przedstawimy teraz pojęcie linii rozdzielającej na płaszczyźnie „zysk-ryzyko” $(0, R_e, \sigma)$, umożliwiające określoną interpretację geometryczną reguły preferencji oraz wyprowadzimy równanie umożliwiające wycenę obligacji katastroficznej, tj. określenie wartości $x = N/P$, a tym samym i ceny P tej obligacji.

7.1. Linia rozdzielająca

Wprowadzimy oznaczenie: Ω_p - obszar parametrów (σ, R_e) obligacji katastroficznej, dla których reguła preferencji (28) jest spełniona; \mathbb{L}_{PREF} - linia rozdzielająca, będąca brzegiem obszaru preferencji Ω_p .

Dla $\beta = 0$ (cecha „risk seeking”): obszar preferencji Ω_p rozpatrywany na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$ jest dany nierównością (30). Biorąc pod uwagę przypadek graniczny, dla którego reguła preferencji (30) jest spełniona, określony przez minimalną dopuszczalną wartość oczekiwaną stopy zwrotu R_e^* , otrzymamy

$$R_e^* = \max\{\kappa\sigma, R_f\}, \text{ czyli}$$

\mathbb{L}_{PREF} :

$$R_e^* = \begin{cases} R_f & ; \sigma < \frac{1}{\kappa} R_f \\ \kappa\sigma & ; \sigma \geq \frac{1}{\kappa} R_f \end{cases} \quad (31)$$

Linia preferencji \mathbb{L}_{PREF} w układzie współrzędnych $(0, R_e, \sigma)$ składa się więc z pionowego odcinka $R_e = R_f$ (dla $\sigma < \frac{1}{\kappa} R_f$) oraz z części linii $\sigma = \frac{1}{\kappa} R_e$ (dla $\sigma \geq \frac{1}{\kappa} R_f$) będącej fragmentem linii akceptacji \mathbb{L}_{ACC} ; por. (20). Punkt graniczny tych dwóch fragmentów linii rozdzielającej \mathbb{L}_{PREF} ma współrzędne

$$R_e = R_f, \quad \sigma = \frac{1}{\kappa} R_f. \quad (32)$$

Wynika to bezpośrednio z podstawiania wartości granicznej $\sigma = R_f / \kappa$ do dolnej części równania (31). Podstawiając te współrzędne do równania (9) linii \mathbb{L}_{CAT} obligacji katastroficznej, wyznaczamy w ten sposób pewną graniczną wartość parametru $\kappa = \kappa_{gr}$, dla której linia \mathbb{L}_{CAT} przecina linię \mathbb{L}_{PREF} we wspomnianym punkcie granicznym. Z (9) i (32) mamy zatem

$$\frac{1}{\kappa} R_f = \frac{a}{b} (R_f + 1), \quad \text{a stąd}$$

$$\kappa_{gr} = \frac{R_f}{1 + R_f} \frac{a}{b} = \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \quad \text{gdzie } \kappa_{\max} = a/b. \quad (33)$$

Z (31), (33) otrzymamy więc warunek, jaki muszą spełniać współrzędne (R_e^*, σ^*) punktu przecięcia linii \mathbb{L}_{PREF} przez linię \mathbb{L}_{CAT} , w przypadku dowolnej wartości parametru $\kappa \in [0, \kappa_{\max}]$:

$$R_e^* = \begin{cases} R_f & ; \kappa \in \left[0, \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}\right] \\ \kappa\sigma^* & ; \kappa \in \left(\frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \kappa_{\max}\right) \end{cases} \quad (34)$$

Rozwiązując teraz układ równań (9), (34) dla ustalonego $\kappa \in [0, \kappa_{\max}]$ otrzymamy wartości liczbowe współrzędnych (R_e^*, σ^*) analizowanego punktu przecięcia. Uwzględniając następnie wzory (6), (7), wyznaczamy wartości x_* oraz $P_* = N/x_*$, stanowiące rozwiązanie zagadnienia wyceny dla przypadku $\beta = 0$.

Dla $\beta \in (0, 1]$: równanie linii preferencji \mathbb{L}_{PREF} wyznaczamy z warunku (28).

Wyrażając nierówność (28) reprezentującą *regułę preferencji* w postaci równości, możemy określić pewien warunek graniczny, przy którym inwestycje w obligację katastroficzną oraz w obligację wolną od ryzyka - są równoważne. A mianowicie, z (28) otrzymamy

$$R_e = R_f S^{-\beta}; \quad \text{gdzie } S = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}, \text{ a stąd}$$

$$R_e = R_f \left(1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e} \right)^{-\beta}. \quad (35)$$

Rozwiązując równanie (35) ze względu na σ , oraz oznaczając otrzymaną wartość przez σ^* mamy

$$\mathbb{L}_{\text{PREF}}: \quad \sigma^* = \sigma^*(R_e) = \frac{R_e}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_e} \right)^{1/\beta} \right], \quad (36)$$

gdzie $R_e \geq R_f$ (por. warunek konieczny (29)) oraz σ^* - wartość progowa odchylenia standardowego σ , jako funkcja oczekiwanej stopy zwrotu R_e .

Równanie (36) definiuje *linię rozdzielającą* \mathbb{L}_{PREF} na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$ o następującej interpretacji:

- Dla każdej wartości R_e oraz $\sigma < \sigma^*(R_e)$, inwestycja w obligację katastroficzną powinna być bardziej preferowana od inwestycji w obligację wolną od ryzyka; mamy wówczas $(R_e, \sigma) \in \Omega_p$.
- Dla każdej wartości R_e oraz $\sigma > \sigma^*(R_e)$ zachodzi przypadek przeciwny; tj. inwestycja w obligację wolną od ryzyka powinna być bardziej preferowana; mamy wówczas $(R_e, \sigma) \notin \Omega_p$.
- Dla każdej wartości R_e oraz $\sigma = \sigma^*(R_e)$ - obie inwestycje są równoważne z punktu widzenia przyjętej funkcji użyteczności inwestora.

Interesującą interpretację graficzną otrzymanego wyniku można uzyskać wprowadzając zmienne uogólnione:

$$\check{R}_e = \frac{R_e}{R_f} \quad \text{oraz} \quad \check{\sigma} = \frac{\kappa \sigma}{R_f},$$

definiujące płaszczyznę $(O, \check{R}_e, \check{\sigma})$.

Odpowiednie równania linii obligacji katastroficzej L_{CAT} , linii akceptacji L_{ACC} , linii preferencji L_{PREF} oraz obszaru akceptacji Ω_a i obszaru preferencji Ω_p - rozpatrywanych na płaszczyźnie $(O, \check{R}_e, \check{\sigma})$ są następujące:

Linia obligacji katastroficznej

Z zależności (9), po przekształceniach, otrzymamy

$$L_{CAR}: \check{\sigma} = \left(\frac{\kappa}{\kappa_{\max}} \right) \left(\check{R}_r + \frac{1}{R_r} \right); \quad \text{gdzie } \kappa_{\max} = \frac{a}{b}.$$

Linia akceptacji

Ze wzoru (20), po przekształceniach, otrzymamy:

$$L_{ACC}: \check{\sigma} = \check{R}_r \quad \text{oraz} \quad \check{R}_r \geq 1, \quad \text{czyli} \quad \check{R}_r = \max\{\check{\sigma}, 1\}.$$

$$\text{A zatem, } \check{R}_r = \begin{cases} 1, & \text{dla } \check{\sigma} \in [0, 1) \\ \check{\sigma}, & \text{dla } \check{\sigma} \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Obszar akceptacji Ω_a : $\check{\sigma} \leq \check{R}_r$ oraz $\check{R}_r \geq 1$.

Linia preferencji

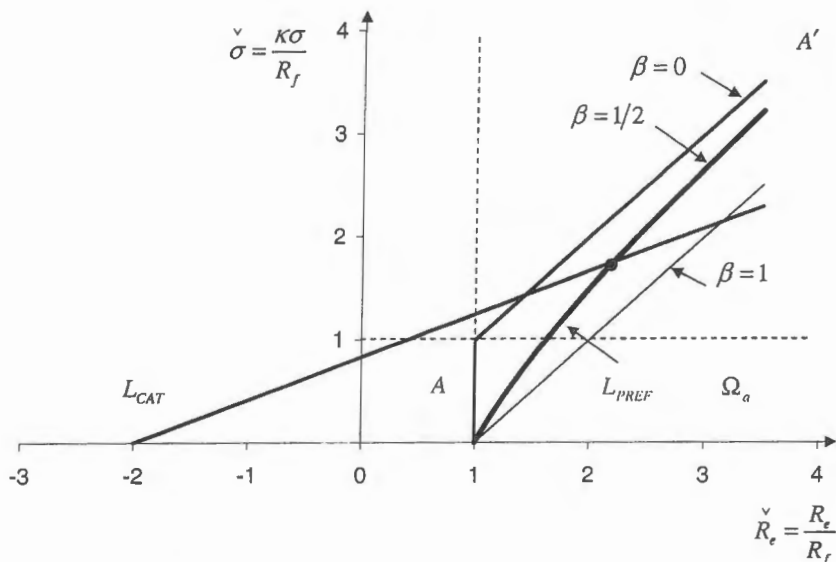
Z zależności (36), po przekształceniach, otrzymamy

$$L_{PREF}: \check{\sigma} = \check{R}_r \left[1 - \left(\check{R}_r \right)^{-\frac{1}{\beta}} \right].$$

Obszar preferencji Ω_p : $\check{\sigma} \leq \check{R}_r \left[1 - \left(\check{R}_r \right)^{-\frac{1}{\beta}} \right]$.

Na rysunku 7.1 przedstawiono ilustrację graficzną powyższych zależności. Rysunek ten ma zasadnicze znaczenie dla zrozumienia całości kształtu rozpatrywanego w niniejszej pracy zagadnienia wyceny obligacji katastroficznych.

Na prezentowanym rysunku zaznaczony szarym kolorem obszar akceptacji Ω_a jest ograniczony od góry linią akceptacji L_{ACC} oznaczoną jako linia łamana AA' . Na rysunku, przedstawiono również trzy linie preferencji L_{PREF} wykreślone dla przypadków $\beta=0$, $\beta=1/2$, $\beta=1$. Na prawo od tych linii preferencji znajdują się odpowiadające wyróżnionym parametrem β - obszary preferencji. W przypadku $\beta=0$ obszar preferencji pokrywa się z obszarem akceptacji Ω_a . W pozostałych przypadkach – obszar preferencji jest podzbiorem obszaru akceptacji, tj. zachodzi $\Omega_p \subset \Omega_a$.



Rys. 7.1. Ilustracja procesu wyceny obligacji katastroficznych.

Na rysunku 7.1 wykreślono również linię L_{CAT} obligacji katastroficznej. Punkty przecięcia linii L_{CAT} z liniami preferencji L_{PREF} odpowiadającym parametrom $\beta = 0, 1/2$ oraz 1 wyznaczają (w sposób pośredni) poszukiwaną cenę P obligacji katastroficznej. To znaczy, punkty te wyznaczają wartości R_e^*, σ^* - oczekiwanej stopy zwrotu oraz odchylenia standardowego tej stopy zwrotu – w punkcie wyceny. Mając określone te wartości, możemy następnie wyznaczyć z równania (6) lub (7) wartość parametru $x^* = N/P$; a tym samym – poszukiwaną wartość ceny P , analizowanej obligacji katastroficznej. Odnośnie obliczenia – przedstawimy dokładniej w następnym punkcie.

Na prezentowanym rysunku zaznaczono wyraźniej punkt przecięcia się linii L_{CAT} z linią L_{PREF} odpowiadający przypadkowi $\beta = 1/2$. Równanie tej linii ma – we współrzędnych uogólnionych $\check{R}_e, \check{\sigma}$ - następującą prostą postać

$$\check{\sigma} = \check{R}_e - (1/\check{R}_e).$$

Równanie to jest odpowiednikiem (dla $\beta = 1/2$) równania (36) rozpatrywanego we współrzędnych R_e, σ . Zaznaczony na rysunku 5.1 punkt przecięcia się omawianych powyżej linii, jest więc punktem wyceny analizowanej obligacji katastroficznej – dla przypadku, gdy funkcja użyteczności inwestora charakteryzuje się współczynnikiem elastyczności $\beta = 1/2$.

Na zakończenie powyższej analizy, należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że dla odpowiednio dużego parametru κ ryzyka inwestora, tj. dla $\kappa \geq \kappa_{max} = a/b$ - linia L_{CAT} obligacji katastroficznej w ogóle nie przetnie linii akceptacji L_{ACC} . Linia ta, w omawianym przypadku, nie przetnie więc również linii preferencji L_{PREF} - i to niezależnie od wartości

parametru β . Oznacza to, że z powodu dużej awersji do ryzyka danego inwestora (bowiem $\kappa \geq \kappa_{\max}$), analizowana obligacja katastroficzna powinna być odrzucona z procesu wyceny. Zauważmy, że w tym przypadku (tj. dla $\kappa \geq \kappa_{\max}$) poziom bezpieczeństwa analizowanej obligacji jest niższy od zera; tj. $R_x = R_e - \kappa \sigma < 0$; a więc nie jest spełniona wówczas reguła akceptacji (17).

W rozprawie doktorskiej, przeprowadzimy również obszerną interpretację graficzną procesu wyceny obligacji katastroficznych dotyczącą bardziej ogólnego przypadku, w którym zakłada się, że funkcja użyteczności inwestora $U(R_e, R_x)$ ma postać funkcji typu CES (*Constant Elasticity of Substitution*).

7.2. Równanie wyceny

Przedstawiony w poprzednim podpunkcie proces „graficznej wyceny” obligacji katastroficznych wyrazimy teraz za pomocą odpowiednich przekształceń analitycznych. A mianowicie, jak już wspomnieliśmy, biorąc pod uwagę warunek graniczny (36) i podstawiając wartości $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$ zdefiniowane dla obligacji katastroficznej wzorami (6) i (7), możemy rozwiązać tak przekształcone równanie (36) ze względu na zmienną $x = N / P_e$. Otrzymamy w ten sposób pewną wartość progową ceny P_e analizowanej obligacji, mającą tę cechę, że - dla każdej ceny $P < P_e$, inwestycja w obligację katastroficzną powinna być bardziej preferowana od inwestycji w obligację wolną od ryzyka. Innymi słowy, wartość progowa P_e stanowi rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia wyceny.

Wcześniej, musimy jednak sformułować warunki określające regułę akceptacji dla analizowanego zagadnienia oraz zdefiniować warunek konieczny dla spełnienia reguły preferencji. A mianowicie, biorąc pod uwagę

$R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$, z warunku (17) otrzymamy

$$(a - \kappa b)x - 1 \geq 0. \quad (37)$$

Jak można łatwo zauważyć, warunkiem koniecznym spełnienia reguły akceptacji wyrażonej (dla zmiennej x) przez nierówność (37) jest, aby

$$a - \kappa b > 0, \quad \text{czyli} \quad \kappa < \kappa_{\max} = \frac{a}{b}. \quad (38)$$

Zauważmy, że warunek konieczny (38) jest tożsamy z wyprowadzonym wcześniej warunkiem (21).

Dla $\kappa \in [0, \kappa_{\max})$, z (37) otrzymamy zatem:

Reguła akceptacji

$$x \geq \frac{1}{a - \kappa b}. \quad (39)$$

Ponadto, z warunku koniecznego (30), uwzględniając (39) - po przekształceniach - otrzymamy:

$$x \geq \max \left\{ \frac{1}{a - \kappa b} ; \frac{1 + R_f}{a} \right\}. \quad (40)$$

Biorąc pod uwagę, że nierówność

$$\frac{1}{a - \kappa b} \leq \frac{1 + R_f}{a} \quad \text{zachodzi dla } 0 \leq \kappa \leq \frac{a}{b} \frac{R_f}{1 + R_f} = \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \quad (41)$$

z (40), (41) mamy

$$x \geq x^* = \begin{cases} \frac{1 + R_f}{a} & ; \kappa \in [0, \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}] \\ \frac{1}{a - \kappa b} & ; \kappa \in (\frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \kappa_{\max}) \end{cases} \quad (42)$$

Warunek (42) jest *warunkiem koniecznym* dla spełnienia reguły preferencji dla analizowanego problemu. Warunek ten (wyrażony dla zmiennej x) jest równoważny warunkowi (30), rozpatrywanemu dla parametrów R_e, σ obligacji. Przy założeniu, że warunek ten jest spełniony, równanie wyceny obligacji katastroficznej ma następującą postać:

Przypadek $\beta = 0$: Jak to wykazaliśmy w punkcie 6, warunek konieczny (30) reguły preferencji jest, dla $\beta = 0$, jednocześnie warunkiem dostatecznym. A zatem, wartość graniczna x^* dana wzorem (42), odpowiadająca punktowi przecięcia linii obligacji katastroficznej \mathbb{L}_{CAT} z linią rozdzielającą \mathbb{L}_{PREF} określoną dla $\beta = 0$ równaniem (31) – jest jednocześnie rozwiązaniem analizowanego zagadnienia wyceny.

Biorąc pod uwagę, że $x_0 = \frac{N}{P_0}$, ze wzoru (42) otrzymamy

$$P_0 = \begin{cases} \frac{a}{1 + R_f} N & ; \kappa \in [0, \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}] \\ (a - \kappa b) N & ; \kappa \in (\frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \kappa_{\max}) \end{cases} \quad (43)$$

Wartość progową ceny P_0 możemy również wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (34), podstawiając do tego wzoru równania parametryczne (6), (7) linii \mathbb{L}_{CAT} , tj. $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$, a następnie – rozwiązując otrzymane równanie ze względu na x .

Przypadek $\beta \in (0, 1]$: W tym przypadku uwzględniając $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$, z równania (36) - po przekształceniach - otrzymamy

$$(ax - 1)^{1 - \beta} [(a - \kappa b)x - 1]^\beta = R_f. \quad (44)$$

Równanie to można również bezpośrednio wyprowadzić z zależności:

$$U(R_e, R_x) = \gamma R_e^{1 - \beta} R_x^\beta = \gamma R_e^{1 - \beta} (R_e - \kappa \sigma)^\beta, \quad (45)$$

$$U_f = U(R_f, R_f) = \gamma R_f, \quad \text{oraz} \quad (46)$$

$$U(R_e, R_k) = U_f ; \text{ tj. } R_e^{1-\beta} (R_e - \kappa\sigma)^\beta = R_f. \quad (47)$$

Równanie wyceny (44) jest ogólnym przypadkiem równaniem nieliniowym ze względu na zmienną x . W wyniku numerycznego rozwiązania tego równania w obszarze określonym przez warunek konieczny (42), otrzymujemy poszukiwaną wartość progową zmiennej x_* , w tym samym – wartość progową ceny $P_* = \frac{N}{x_*}$ obligacji katastroficznej.

Dla parametrów $\beta = 1/2$ oraz $\beta = 1$, równanie (44) można rozwiązać analitycznie; mamy wówczas

$$\underline{\beta = 0.5}: \text{ z (44) otrzymamy } (ax - 1)[(a - kb)x - 1] = R_f^2. \quad (48)$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe oraz odrzucając rozwiązanie nie spełniające warunku (42), mamy

$$x_* = \frac{(2a - kb) + [(kb)^2 + 4a(a - kb)R_f^2]^{1/2}}{2a(a - kb)} \text{ oraz } P_* = N / x_*. \quad (49)$$

A zatem,

$$P_* = \frac{2a(a - kb)}{(2a - kb) + [(kb)^2 + 4a(a - kb)R_f^2]^{1/2}} N. \quad (49')$$

$$\underline{\beta = 1.0}: \text{ z (44) otrzymamy } x_* = \frac{1 + R_f}{a - kb}, \quad (50)$$

$$\text{a zatem } P_* = \frac{N}{x_*} = \frac{a - kb}{1 + R_f} N. \quad (51)$$

8. Przykłady obliczeniowe

Założmy, że stosunek do ryzyka jest dla danego inwestora określony parametrami $\beta = 0.5$, $\kappa = 1.0$ (cecha „risk tolerance”). Inwestor ten analizuje opłacalność inwestycji w 3-letnią obligację katastroficzną o kuponie $C = 10$ zł (p.a.) oraz o wartości nominalnej $N = 100$ zł; por. rysunek 3.1.

Oprocentowanie nominalne odsetek od obligacji wynosi więc $i = C / N = 10\%$. Założymy, że oprocentowanie to jest równe rynkowej stopie procentowej r_f (wolnej od ryzyka), tj. $r_f = i = 10\%$ (p.a.).

Z równania (1), można łatwo wykazać, że w tym szczególnym przypadku (tj. dla $i = C / N = r_f$) zachodzi $P_0 = N = 100$ zł, tj. wartość bieżąca $P_0 = PV$ obligacji bez ryzyka jest równa jej wartości nominalnej N ; jest to fakt ogólnie znany w teorii obligacji, por. *Jakubowski (1995)*.

Uwzględniając oznaczenia wprowadzone w punkcie 3, mamy:

$$R_1 = r_f = 0.1000; R_2 = (1 + r_f)^2 - 1 = 0.2100; R_3 = (1 + r_f)^3 - 1 = 0.3310.$$

Stopa zwrotu wolna od ryzyka R_f za okres 3 lat wynosi więc

$$R_f \stackrel{\Delta}{=} R_3 = 0.3310 = 33.10\% .$$

Ponadto, mamy

$$\mathfrak{R}_2 = (1 + R_1)i = 0.1100; \quad \mathfrak{R}_3 = (1 + R_1)i + (1 + R_2)i = 0.2310;$$

$$\mathfrak{R}_4 = (1 + R_1)i + (1 + R_2)i + (1 + i) = 1.3310.$$

Założymy, że obligacja katastroficzna jest emitowana przez władze regionu, w którym zagrożenie powodziowe jest szacowane jako prawdopodobieństwo „wody 20-letniej”, tj. $\alpha = 0.05$ (p.a.). Mamy zatem

$$p_1 = \alpha = 0.0500, \quad p_2 = (1 - \alpha)\alpha = 0.0475,$$

$$p_3 = (1 - \alpha)^2\alpha = 0.0451, \quad p_4 = (1 - \alpha)^3 = 0.8574.$$

Uwzględniając powyższe dane, ze wzorów (4) i (5) wyznaczamy wartości współczynników a i b , tj. $a = 1.1568$, $b = 0.4285$.

Ze wzorów (6) i (7) otrzymamy zatem

$$R_e = ax - 1 = 1.1568x - 1; \quad \sigma = bx = 0.4285x, \quad (52)$$

gdzie $x = N/P_e = 100/P_e$.

Warunek (38), będący warunkiem koniecznym *reguły akceptacji* (39), ma dla analizowanego przykładu postać:

$$\kappa < \kappa_{\max} = \frac{a}{b} = \frac{1.1568}{0.4285} = 2.6996. \quad (53)$$

Warunek ten jest - wobec założonej wartości $\kappa = 1.0$ - spełniony.

Zauważmy, że dla wartości parametru κ ryzyka inwestora wyższej od $\kappa_{\max} = 2.6996$ - poziom bezpieczeństwa R_κ analizowanej obligacji katastroficznej jest ujemny; a zatem obligację taką należałoby *a priori* „odrzuć” z dalszego procesu wyceny; por. wzory (17) - (21) oraz interpretacja geometryczna podana w punkcie 4.1 oraz na rysunku 7.1.

Natomiast warunek konieczny (42) *reguły preferencji* jest w naszym przypadku następujący:

$$\text{Mamy } \kappa_{gr} = \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max} = \frac{0.331}{1.331} \times 2.6996 = 0.6714.$$

W naszym przypadku $\kappa = 1.0$; tak więc zachodzi

$$\kappa \in (\kappa_{gr}, \kappa_{\max}) = \left(\frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \kappa_{\max} \right) = (0.6714, 2.6996). \quad (54)$$

Z (54) oraz (42) mamy:

$$x \geq x^* = \frac{1}{a - \kappa b} = 1.3737, \quad \text{oraz}$$

$$P_* = \frac{N}{x^*} = 72.83 \text{ zł.} \quad (55)$$

Wartość graniczna $P_* = 72.83$ zł jest jednocześnie rozwiązaniem naszego zagadnienia wyceny, rozpatrywanym dla parametru $\beta = 0$; por. wzory (42), (43).

Warunek dostateczny *reguły preferencji* jest określony dla ($\beta = 0.5$) przez zależność (49), przy podstawieniu $a = 1.1568$, $b = 0.4285$, $\kappa = 1.0$ oraz $R_f = 0.3310$; mamy zatem

$$x = 1.5600 \quad \text{oraz} \quad P_* = \frac{N}{x_*} = \frac{100}{1.5600} = 64.10 \text{ zł.} \quad (56)$$

Tak więc otrzymana wartość progowa ceny $P_* = 64.10$ zł jest rozwiązaniem analizowanego zagadnienia wyceny obligacji katastroficznej. Ponadto, z (52) i (56) mamy:

$$R_c = ax - 1 = 0.8046 = 80.46\% \quad (\text{oczekiwana stopa zwrotu za 3 lata}), \quad (57)$$

$$\sigma = bx = 0.6685 = 66.85\% \quad (\text{odchylenie standardowe}). \quad (58)$$

Poziom bezpieczeństwa R_x obligacji jest równy:

$$R_x = R_c - \kappa\sigma = 80.46\% - 1.0 \times 66.85\% = 13.61\%; \quad (59)$$

oraz *wskaźnik bezpieczeństwa* S :

$$S = \frac{R_x}{R_c} = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_c} = 1 - 1.0 \times \frac{66.85}{80.46} = 0.1692. \quad (60)$$

Dyskonto cenowe rozpatrywanej obligacji w stosunku do ceny obligacji wolnej od ryzyka wynosi:

$$D_* = \frac{P_* - P_0}{P_0} \times 100 = \frac{64.10 - 100.00}{100.00} \times 100 = -35.90\%. \quad (61)$$

Oczekiwana *premia za ryzyko* jest natomiast równa:

$$\Pi \triangleq R_c - R_f = 80.46\% - 33.10\% = 47.36\% \quad (\text{za 3 lata}). \quad (62)$$

Mając wyznaczoną cenę progową $P_* = 64.10$ zł odpowiadającą wartości $x = 1.5600$, ze wzoru (3) możemy również określić scenariusz możliwych (tj. z zadanymi prawdopodobieństwami p_1, \dots, p_4) wyników inwestycji w rozpatrywaną obligację katastroficzną. Scenariusz ten określony jest przez realizacje R_1^*, \dots, R_4^* , losowej stopy zwrotu R^* z inwestycji.

Ze wzoru (3) mamy zatem

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = -1 \\ R_2^* = \mathfrak{R}_2 x - 1 \\ R_3^* = \mathfrak{R}_3 x - 1 \\ R_4^* = \mathfrak{R}_4 x - 1 \end{cases} = \begin{cases} -100.0\% & ; & p_1 = 0.0500 \\ -82.8\% & ; & p_2 = 0.0475 \\ -64.0\% & ; & p_3 = 0.0451 \\ +107.6\% & ; & p_4 = 0.8574 \end{cases} \quad (63)$$

Otrzymany wynik inwestycji w obligację katastroficzną jest równoważny - w sensie przyjętej funkcji użyteczności $U = U(R^*, S)$ - inwestycji w obligację wolną od ryzyka o stopie zwrotu $R_f = 33.1\%$ (za okres 3 lat).

Stosunkowo duże *dyskonto cenowe* $D_* = -35.90\%$ oraz duża oczekiwana przez inwestora *premia za ryzyko* $\Pi = 47.36\%$ (za 3 lata), jakie otrzymaliśmy w wyniku powyższych obliczeń - jest rezultatem założenia dość dużego prawdopodobieństwa powodzi, tj. $\alpha = 0.05$ (p.a.).

Zgodnie ze wzorem (63), rozkład rzeczywistej stopy zwrotu R^* z obligacji katastroficzej jest lewostronnie skośnym, czteropunktowym rozkładem dyskretnym. Musimy zatem sprawdzić, czy zachodzi jeszcze jeden warunek. A mianowicie, ze wzoru (15) wynika, że dla przyjętego powyżej parametru $\kappa = 1.0$, prawdopodobieństwo najgorszego przypadku $p_\kappa = 0.159 \approx 1/6$. Wartość tę wyznaczyliśmy przy założeniu, że rozkład stopy zwrotu R^* jest rozkładem normalnym. Należy zatem sprawdzić, czy prawdopodobieństwo p_κ^* wyliczone dla rozkładu dyskretnego (63) nie przekracza wartości prawdopodobieństwa p_κ , tj. czy zachodzi

$$P\{R^* \leq R_\kappa\} = p_\kappa^* \leq p_\kappa = 0.159. \quad (64)$$

W naszym przykładzie mamy $R_\kappa = 13.61\%$ (por. 59), a zatem z rozkładu prawdopodobieństwa (63), otrzymamy

$$p_\kappa^* = P\{R^* \leq 13.61\% \} = p_1 + p_2 + p_3 = 0.0500 + 0.0475 + 0.0451 = 0.143. \quad (65)$$

Tak więc warunek (64) jest spełniony, co oznacza, że reguła preferencji (28) prowadząca w analizowanym przykładzie do wartości $x_* = 1.5600$, dominuje w powyższym sensie nad tym warunkiem.

W przypadku przeciwnym, gdyby nierówność (64) nie była spełniona, musielibyśmy powiększać wartość $x = N/P_*$ tak długo, aż osiągniemy $p_\kappa^* \leq p_\kappa = 0.159$. Geometrycznie, równoważne jest to przesuwaniu się wzdłuż linii \mathbb{L}_{CAT} obligacji katastroficzej w prawo, tj. poruszaniu się od punktu przecięcia tej linii z linią rozdzielającą \mathbb{L}_{PREF} w kierunku - w głąb obszaru preferencji Ω_p ; por. rysunek 7.1. W tym przypadku otrzymalibyśmy $x_* > 1.5600$, co oznaczałoby, że warunek (64) dominuje nad regułą preferencji (28). Dla wyceny obligacji, przyjęlibyśmy wówczas otrzymaną w powyższy sposób wartość x_* ; a tym samym $P_* = N/x_*$. Oczywiście, określona w ten sposób wartość ceny progowej P_* obligacji byłaby niższa od wartości $P_* = 64.10$ zł, wyznaczonej w analizowanym powyżej przykładzie.

W pewnych przypadkach, dla odpowiednio wysokiego prawdopodobieństwa katastrofy α (p.a.), a tym samym dla wysokich prawdopodobieństw p_1, p_2, p_3 - może się zdarzyć, że dla danej wartości $\kappa \in (0, \kappa_{\text{max}})$ spełnienie warunku (64) w ogóle nie jest możliwe. Wówczas,

zgodnie z przyjętym modelem decyzyjnym wyceny, inwestycję w taką obligację odrzucamy; bowiem ryzyko inwestycyjne byłoby w analizowanym przypadku zbyt duże. Inwestycja taka mogłaby być atrakcyjna dla inwestora charakteryzującego się większym stopniem akceptacji ryzyka, tj. mającego niższą wartość parametru κ . Oczywiście w tym przypadku, całą proponowaną procedurę wyceny, należałoby powtórzyć od nowa.

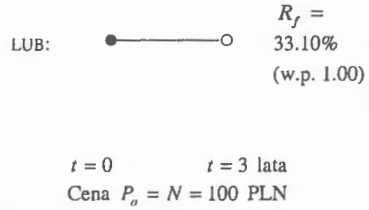
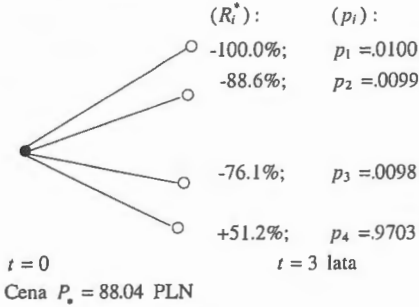
Bardziej obszerną analizę wyników numerycznych dotyczących analizowanego przykładu, otrzymanych dla parametrów $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ oraz $\kappa = 0.5, 1.0, 1.5$ przedstawimy w rozprawie doktorskiej. Na rysunku 8.1 przedstawiono ilustrację pewnego fragmentu tych obliczeń.

Prezentowane w tej tablicy wyniki dotyczą analizy trzech scenariuszy wyceny 3-letniej obligacji katastroficznej rozpatrywane dla prawdopodobieństw powodzi (w skali roku) wynoszących $\alpha = 0.01/\text{p.a.}$, $\alpha = 0.05/\text{p.a.}$ oraz $\alpha = 0.10/\text{p.a.}$ Zauważmy, że z analizowanych przypadków wynika, że im prawdopodobieństwo katastrofy jest wyższe – tym niższa jest wartość graniczna ceny P^* obligacji katastroficznej. Oznacza to, że w warunkach zwiększającego się prawdopodobieństwa katastrofy w rozpatrywanym regionie – w myśl przyjętej przez nas metodologii – inwestorzy powinni żądać odpowiednio niższej ceny P , za obligację. A tym samym, powinni oni żądać odpowiednio wyższego dyskonta cenowego – w stosunku do obligacji skarbowej, tj. obligacji wolnej od ryzyka niewypłacalności emitenta. Chodzi w tym przypadku o konieczność uzyskania odpowiedniej rekompensaty – za coraz bardziej zwiększające się ryzyko inwestycyjne. Oczywiście wyniki te są zgodne z ogólną intuicją, dotyczącą inwestycji na rynku kapitałowym w warunkach ryzyka.

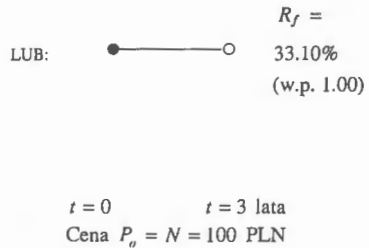
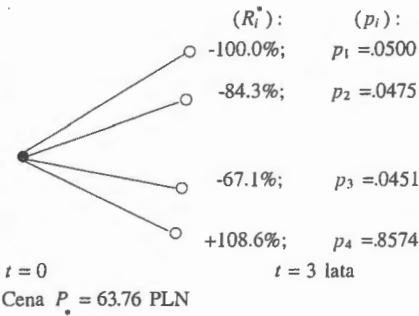
OBLIGACJA KATASTROFICZNA:

OBLIGACJA SKARBOWA:

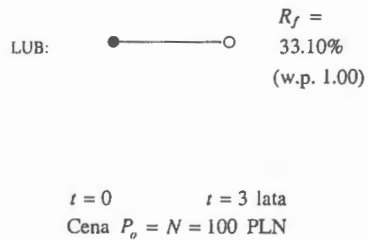
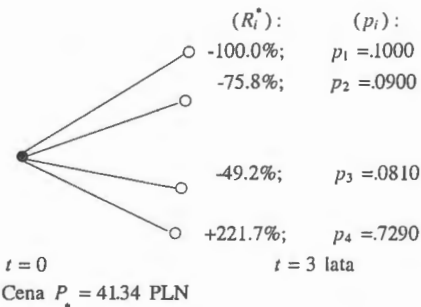
„Woda 100-letnia” ($\alpha = 0.01$ /p.a.) ($R_e = 47.0\%, \sigma = 23.7\%$)



„Woda 20-letnia” ($\alpha = 0.05$ /p.a.) ($R_e = 81.2\%, \sigma = 67.7\%$)



„Woda 10-letnia” ($\alpha = 0.10$ /p.a.) ($R_e = 141.0\%, \sigma = 133.2\%$)



Rys. 8.1. Scenariusze możliwych wyników inwestycji w obligację katastroficzną w porównaniu z równoważnymi inwestycjami w obligację skarbową – w warunkach zwiększającego się ryzyka powodzi.

9. Uogólnienie wyników dla przypadku dwuczynnikowej funkcji użyteczności typu CES

Jak już wspomnieliśmy, istotnym uogólnieniem rozpatrywanego modelu wyceny obligacji katastroficznych jest przypadek, w którym dwuczynnikowa funkcja użyteczności inwestora ma postać funkcji CES (*constant elasticity of substitution*). Jak wiadomo, funkcja użyteczności $U(R_e, R_x)$ typu *Cobba-Douglasa* jest przypadkiem szczególnym funkcji typu CES, mającej charakter zależności multiplikatywno-addytywnej; por. *Arrow, Chenery, et al.* (1961).

Postać analityczna rozpatrywanej w rozprawie funkcji użyteczności typu CES jest następująca

$$U(R_e, R_x) = A [(1-\beta)R_e^\nu + \beta R_x^\nu]^{1/\nu}, \quad (66)$$

gdzie $A > 0$, $\beta \in [0, 1]$, $\nu \in [0, 1]$.

We wzorze (66) przyjęto, że rozpatrujemy funkcję CES przy wartości tzw. *współczynnika skali jednorodności* $l = 1$; założenie to było również wcześniej przyjęte dla funkcji Cobba-Douglasa. W przeciwnym wypadku (tj. dla $l \neq 1$), zgodnie z teorią funkcji CES, należałoby podnieść nawias prostokątny – występujący po prawej stronie wyrażenia (66) – do potęgi l -tej.

Przypadki szczególne przedstawionej powyżej funkcji CES, rozpatrywane dla wybranych wartości parametru $\nu \in [0, 1]$ – są następujące:

Dla $\nu = 0$

$$U(R_e, R_x) = A R_e^{1-\beta} R_x^\beta. \quad (67)$$

Dla parametru ν dążącego do zera, funkcja CES o postaci (66) jest bowiem zbieżna do funkcji Cobba-Douglasa (67) – co jest wynikiem powszechnie znanym; por. *Arrow* (1961), *Kulikowski* (1977).

Dla $\nu = 1/2$

$$U(R_e, R_x) = A [(1-\beta)\sqrt{R_e} + \beta\sqrt{R_x}]^2. \quad (68)$$

Funkcja ta ma więc postać addytywno-multiplikatywną – co można łatwo sprawdzić rozwijając wyrażenie występujące po prawej stronie wzoru (68) – do postaci wielomianowej.

Dla $\nu = 1$

$$U(R_e, R_x) = A [(1-\beta)R_e + \beta R_x]. \quad (69)$$

Otrzymujemy w ten sposób liniową funkcję użyteczności $U(R_e, R_x)$ – a więc postać czysto addytywną.

W rozprawie doktorskiej, powtórzmy całość przedstawionych powyżej rozważań analitycznych – dla dwuczynnikowej funkcji użyteczności $U(R_e, R_x)$ o prezentowanej powyżej postaci (66). Wyprowadzimy w ten sposób szereg interesujących wniosków dotyczących uogólnienia zaproponowanego wcześniej podejścia – rozpatrywanego przy założeniu, że funkcja $U(R_e, R_x)$ ma postać funkcji Cobba-Douglasa.

Pewną wadą przedstawionego w poprzednich punktach modelu wyceny, w którym przyjęto, że funkcja $U(R_e, R_x)$ ma kształt funkcji Cobba-Douglasa jest bowiem to, że wówczas – dla poziomu bezpieczeństwa $R_x = 0$ - użyteczność U inwestora jest również zerowa; i to dla dowolnie wysokiej wartości oczekiwanej stopy zwrotu R_e . Wynika to bezpośrednio z multiplikatywnej postaci funkcji Cobba-Douglasa (67). Otóż intuicyjnie rzecz biorąc, fakt ten nie jest tak do końca oczywisty.

Ujmując to jeszcze inaczej, można stwierdzić, że funkcja Cobba-Douglasa niezbyt dokładnie odwzorowuje kształt funkcji użyteczności inwestorów dla wartości R_x bliskich zeru. Jest to szczególnie istotne w przypadku dużych wartości współczynnika elastyczności β , co powoduje, że funkcja ta jest silnie wrażliwa na zmiany R_x .

Zauważmy, że problem ten nie występuje, gdy pierwszy argument funkcji $U(R_e, R_x)$, tj. oczekiwana stopa zwrotu R_e jest równa zero. Bowiem dla $R_e = 0$ mamy

$$R_x = R_e - \kappa\sigma = -\kappa\sigma < 0. \quad (71)$$

A zatem w rozpatrywanym przypadku nie jest spełniona *reguła akceptacji* (17); tak więc w przypadku tym w ogóle nie wykorzystujemy – w zaproponowanym modelu wyceny - funkcji użyteczności $U(R_e, R_x)$. Bowiem wówczas, analizowana obligacja katastroficzna jest *a priori* odrzucana, jako walor obciążony zbyt dużym ryzykiem.

Wspomnianej powyżej niedoskonałości funkcji Cobba-Douglasa można uniknąć, dokonując modelowania przebiegu użyteczności inwestorów w zależności od zmian czynników użyteczności R_e i R_x - za pomocą funkcji typu CES o postaci (66). Zauważmy, że jest to funkcja ściśle rosnąca i ściśle wklęsła (dla $\kappa < 1$) ze względu na każdy ze swych argumentów; a ponadto zachodzi

$$U(R_e, R_x) > 0 \quad \text{dla } R_e > 0 \text{ oraz } R_x = 0. \quad (72)$$

Funkcja CES osiąga bowiem swą wartość zerową tylko wówczas, gdy oba argumenty tej funkcji są jednocześnie równe zero; tj. gdy $R_e = 0$ oraz $R_x = 0$. Przypadek ten nie jest jednak w rozpatrywanym przez nas modelu możliwy (dla wartości $\sigma > 0$).

Tym niemniej, należałoby na zakończenie tych uwag dodać, że rozpatrywanie funkcji użyteczności $U(R_e, R_x)$ inwestora jako funkcji typu CES – jest źródłem pewnej dodatkowej trudności związanej z zastosowaniem w praktyce proponowanego podejścia. A mianowicie, należałoby w tym przypadku podać sposób identyfikacji parametru $\nu \in [0, 1]$ tej funkcji, determinującego tzw. współczynnik *elastyczności substytucji* czynników użyteczności R_e i R_x , wynoszący

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1-\nu}; \quad (70)$$

por. Arrow, Chenery, et al. (1961).

Z drugiej zaś strony, należałoby stwierdzić, że zastosowanie funkcji Cobba-Douglasa dla modelowania przebiegu $U(R_e, R_x)$ użyteczności inwestorów, wiązało się z przyjęciem „milczącego” założenia, że wartość $\nu = 0$, tj. że elastyczność substytucji ε_s czynników użyteczności R_e i R_x jest równa jedności, co wynika bezpośrednio z zależności (70). Wówczas bowiem analizowana funkcja CES staje się funkcją Cobba-Douglasa; por. wzór (67). Oczywiście założenie to (tj. że $\nu = 0$ oraz $\varepsilon_s = 1$) należałoby w jakiś sposób uzasadnić.

Prezentowane powyżej zagadnienie będzie szerzej omówione w rozprawie doktorskiej.



LITERATURA

1. Adams A.T., Bloomfield D.S.F., Boot P.M., England P.D. (1993): *Investment Mathematics and Statistics*. Graham & Trotman, London.
2. Arrow W., Chenery W., Minhas B., Solow R.M. (1961): Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency. *Review of Economics and Statistics*.
3. Balagurasamy E., Howe J. (1990): *Expert Systems for Management and Engineering*. Ellis Horwood, Chichester.
4. Bałamut T. (2002) : *Metody estymacji "Value-at-Risk"*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 147, Warszawa, sierpień.
5. Baryshnikov Yu., Mayo A., Taylor D.R. (1998): *Pricing of CAT bonds*. Maszynopis.
6. Bennett J.L. (Ed.) (1983): *Building Decision Support Systems*. Addison – Wesley, Reading, MA.
7. Bolc L., Coombs M.J. (1988): *Expert Systems Applications*. Springer – Verlag.
8. Burnecki K., Kukla G. (2000): Reasekuracja ryzyk ubezpieczeniowych na rynku kapitałowym. *Rynek Terminowy*, Vol. 10, Nr 4/00, Listopad, s. 128-134.
9. Canabarro E., Finkemeier M., et al. (1998): *Analyzing Insurance-Linked Securities*. Goldman, Sachs & Co., Fixed-Income Research, October.
10. Canter M.S., Cole J.B. (1997): *The Foundation and Evolution of the Catastrophe Bond Market*. Global Reinsurance.
11. Cieślak A. (2003): *Behawioralna Ekonomia Finansowa*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 165, Warszawa, październik.
12. Cholnoky T.V., Zief J.H., et al. (1998): *Securitization of Insurance Risks*. Goldman Sachs Investment Research, Report No. 980428.
13. Doherty N. (1997): Financial Innovations in the Management of Catastrophe Risk. *Journal of Applied Corporate Finance*.
14. Dym C.L., Levitt R.E. (1991): *Knowledge Based Systems for Engineering*. McGraw Hill.
15. Elton M.J., Gruber M.J. (1995): *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. J.Wiley & Sons, New York, 5-th ed.
16. Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New York.
17. Fabozzi F.J. (2000): *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 4-th ed.
18. Fama E.F. (1984): Term premiums in bond returns. *Journal of Financial Economics*, December 1984.
19. Freeman P.K. (1999): Infrastructure, Natural Disasters and Poverty. Proceedings of IIASA Conference on *Global Change and Catastrophe Risk Management*, Laxenburg, Austria, June 6-9, 1999.
20. Freyfield W.A. (1984): *Decision Support Systems*. NCC Publications, Manchester.
21. George J.B. (1999): Alternative reinsurance: using catastrophe bonds and insurance derivatives as a mechanism for increasing capacity in the insurance markets. *CPCU Journal*, Vol 52, No. 1, Spring 1999, pp.50-54
22. ISO-Insurance Services Office, Inc. (1999): *Financing Catastrophe Risk – Capital Market Solutions*. Insurance Issues Series, New York, January.

23. Jajuga K., Jajuga T. (1996): *Inwestycje - instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. PWN, Warszawa.
24. Jajuga K. (1999): Nowe tendencje w zarządzaniu ryzykiem finansowym. *Rynek Terminowy*, Vol. 5 (Nr 3/99), sierpień, s. 62-66.
25. Jakubowski A. (1994): *Przegląd instrumentów finansowych na rynkach światowych oraz w Polsce*. Raport IBS PAN, A.20.53, Warszawa 1994.
26. Jakubowski A. (1995): Podstawowe własności obligacji i instrumentów pochodnych. Analiza rynku obligacji w kraju i za granicą. W: *Metodologia planowania rozwoju strategicznego TP – S.A. – etap II* (Praca zbiorowa), Raport IBS PAN - TP S.A., Nr 75/95/EKF/C/124, Warszawa, lipiec 1995, Rozdz. 4.1 – 4.2, s. 107-145.
27. Jakubowski A. (1996): *Modelowanie struktury czasowej stóp procentowych*. Projekt badawczy KBN Nr PB 536/HO2/96/10 - G 37, IBS PAN, Warszawa.
28. Jakubowski A., Dobrzyński W. (1996): *System wspomagania decyzji na rynku finansowym w Polsce*. Projekt badawczy KBN Nr 8T11A 00708-G26, IBS PAN, Warszawa, grudzień.
29. Jakubowski A. (1997): *Ryzyko zmian stóp procentowych – zasady tworzenia zimmunizowanych portfeli inwestycyjnych*. Projekt Badawczy KBN Nr PB 536/HO2/96/10-G37, IBS PAN, Warszawa.
30. Jakubowski A., Kulikowski R. (1999): Valuation of catastrophe bonds – Extended version. IIASA Conference on *Global Change and Catastrophe Risk Management*, Laxenburg, Austria, June 6-9, 1999 (maszynopis powielony).
31. Jakubowski A. (2000): Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: M. Krawczak, A. Miklewski, A. Jakubowski, P. Konieczny, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*, IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t. 25, Warszawa, Część II, s. 49-122.
32. Jakubowski A. (2002a): Wycena obligacji katastroficznych w ujęciu teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '02*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice 2002, s. 151-178.
33. Jakubowski A. (2002b): Ocena czynników ryzyka stopy procentowej. W: J. Studziński., L. Drelichowski, O. Hryniewicz (Red.), *Komputerowe Wspomaganie Zarządzania i Procesów Decyzyjnych w Gospodarce*, IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, Warszawa, s. 233-242.
34. Jakubowski A. (2003): Zarządzanie inwestycjami na rynku obligacji. W: M. Krawczak, A. Jakubowski, P. Konieczny, R. Kulikowski, et al., *Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi*, EXIT, Warszawa, Rozdz.6, s. 269-374.
35. Jakubowski A. (2004a): *Zarządzanie portfelem obligacji w przypadku proporcjonalnych zmian struktury terminowej stóp procentowych*. Raport Badawczy IBS PAN, RB/41/2004, Warszawa.
36. Jakubowski A. (2004b): *Zagadnienia teorii stóp procentowych a ryzyko inwestycyjne*. Raport Badawczy IBS PAN, RB/42/2004, Warszawa.
37. Jakubowski A. (2005a): A decision support procedure for pricing catastrophe bonds. *European Journal of Operational Research*, 2005 (w przygotowaniu).
38. Jakubowski A. (2005b): Two-factor utility approach to valuation of catastrophe bonds. In: F. Paris (Ed.), *Financial Modelling*, Proceedings of the XXXVI-th IFORS – EWGFM Conference, Brescia, Italy, May 5-7, 2005 (w przygotowaniu).
39. Kacprzyk J. (1995): Rozumowanie w warunkach niepewności. W: Kulikowski R., Bogdan L., (red.): *Wspomaganie decyzji – systemy eksperckie*, IBS PAN Warszawa.
40. Kaczmarek Z. (1999): The risk of flood events over time. Proceedings of IIASA Conference on *Global Change and Catastrophe Risk Management*, Laxenburg, Austria, June 6-9, 1999.

41. Kahneman D., Tversky A. (1979): Prospect theory – an analysis of decisions under risk. *Ekonometrica*, Vol.47, pp. 263-291.
42. Kindler J. (1999): 1997 flood emergency in Poland. Proceedings of IIASA Conference on *Global Change and Catastrophe Risk Management*, Laxenburg, Austria, June 6-9, 1999.
43. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000): *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, Warszawa.
44. Krawczak M., Jakubowski A., Konieczny P., Kulikowski R., Miklewski A., Szkatuła G. (2003): *Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi*, EXIT, Warszawa.
45. Kulikowski R. (1977): *Analiza systemowa i jej zastosowania*. PWN, Warszawa, s. 36.
46. Kulikowski R. (1995): Wspomaganie decyzji dotyczących inwestycji w papiery wartościowe. W: Kulikowski R., Bogdan L. (red.): *Wspomaganie decyzji – systemy eksperckie*. IBS PAN, Warszawa
47. Kulikowski R. (1998a): Two Factors Utility Approach. *Control and Cybernetics*, Vol. 27, No. 3, pp. 417-428.
48. Kulikowski R. (1998b): Portfolio Optimization - Two Rules Approach. *Control and Cybernetics*, Vol. 27, No. 3, pp. 429-446.
49. Kulikowski R. (2000a): Wspomaganie decyzji inwestora w warunkach ryzyka. *Rynek Terminowy*. Vol. 8, Nr 2/00, Maj, s. 129-133.
50. Kulikowski R. (2000b): Optimum safety/return principle and applications. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No. 2, pp. 213-229.
51. Kulikowski R. (2002): URS methodology – a tool for stimulation of economic growth by innovations. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*. Ser. Technical Sciences, Vol. 50, No. 1, pp. 79-92.
52. Kulikowski R. (2003): On general theory of risk management and support systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 51, No. 3, pp. 213-226.
53. Kulikowski R., Bogdan L., (red.) (1995): *Wspomaganie decyzji – systemy eksperckie*. IBS PAN Warszawa.
54. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995): *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce*. Raport IBS PAN, PSWD 13/95, Warszawa.
55. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996): *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*. Raport IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.
56. Kulikowski R., Jakubowski A. (2000): Valuation of Catastrophe Bonds. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No. 2, pp. 181-211.
57. Kulikowski R., Jakubowski A. (1999): Wycena obligacji w warunkach ryzyka niewypłacalności emitenta. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '99*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice, Cz. 1, s. 187-207.
58. Kulikowski R., Libura M., Stomiński L. (1998): *Wspomaganie decyzji inwestycyjnych*. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, Warszawa.
59. Kunreuther H.C., Linnerooth – Bayer J. (1999): The financial management of catastrophic flood risks in emerging economy countries. Proceedings of IIASA Conference on *Global Change and Catastrophe Risk Management*, Laxenburg, Austria, June 6-9, 1999.
60. Lane M. (1998): *Price, Risk and Ratings for Insurance-Linked Notes*. Sedgwick Lane Financial L.L.C, Trade Notes, May 5.

61. Leinweber D. (1988): Knowledge – Based Systems for Financial Applications. *IEEE, Expert Systems*, No. 3, Fall 1998.
62. Litzenberger R.H., Beaglehole D.R., et al. (1996): *Assessing Catastrophe-Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class*. Goldman, Sachs & Co., Fixed Income Research, July.
63. Lizak K. (2000): Ryzyko katastrof. *Rynek Terminowy*, Vol. 7, Nr 1/00, Luty, s.65-73.
64. Martin J., (1993): *Principles of Object – Oriented Analysis and Design*. Prentice Hall, New Jersey.
65. Miller M.R.(1990) : *Computer- Aided Financial Analysis*. Addison- Wesley, Reading.
66. Pau L.F. (1986): *Artificial Intelligence in Economics and Management*. North-Holland, New York.
67. Romaniuk M., Ermolieva T. (2004): Wycena obligacji katastroficznych metodami symulacyjnymi. W : Bubnicki Z., Hryniewicz O., Węglarz J. (red.), *Badania Operacyjne i Systemowe 2004 – Zastosowania*, EXIT, Warszawa, s. 109-120.
68. Sage A.P. (1991): *Decision Support Systems Engineering*. J.Wiley & Sons, New York.
69. Sprague Jr., R.H., Carlson E.D. (1982): *Building Effective Decision Support Systems*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs, N.J.
70. Stonebraker M. (Ed.) (1988): *Readings in Database Systems*. Morgan Kaufman, San Mateo, CA.
71. Stripple J. (1998): *Securitizing the Risks of Climate Change - Institutional Innovations in the Insurance of Catastrophic Risk*. IIASA Interim Report IR-98-098, December.
72. Szwed C. (2004): System informatyczny wspomagający decyzje inwestycyjne. W: T. Trzaskalik (red.) , *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '04*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice, s. 510-521.
73. Traczyk W., red. (1994): *Problemy Sztucznej Inteligencji*. PWN Warszawa.
74. Tversky A., Kahneman D. (1981): The Framing of decisions and the psychology of choice. *Science*, Vol. 211, pp. 453-458.
75. Tversky A., Kahneman D. (1986): Rational choice and the framing of decisions. *Journal of Business*, Vol 59, No. 4, pp. 251-278.
76. Tversky A., Kahneman D: (1992): Advances in prospect theory – cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 5. No. 4, pp. 297-323.
77. Tversky A. (1990): The psychology of risk. W: Sharpe W.F. (Ed.), *Quantifying the Market Risk Premium Phenomenon for Investment Decision Making*. The Institute of Chartered Financial Analysts, Charlottesville, Virginia, pp. 73-77.
78. Urzędzka L. (1999): *Value at Risk* portfela obligacji. *Rynek Terminowy*, Vol. 5, Nr 3/99, sierpień, s. 60-61.
79. Zapounidis C. (1999): Multicriteria decision aid in financial management. *European Journal of Operational Research*, Vol. 19, pp. 404-415.
80. Zdolnik S.B. Maiser D. (1989): *Readings in Object Oriented Databases*. Morgan Kaufman, Los Altos, CA
81. Zenios S.A. (Ed.) (1993): *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.
82. Zielonka P. (2003): *Czynią finansowe behawioralne*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 158, Warszawa, lipiec.

