241/2008

Raport Badawczy
Research Report

RB/33/2008

Wpływ wyboru metody wyznaczania oceny grupowej na wynik ekspertyzy

D. Wagner, H. Bury

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2008

Wpływ wyboru metody wyznaczania oceny grupowej na wynik ekspertyzy

Powszechnie wiadomo, że przy wyznaczaniu oceny grupowej bądź wyniku głosowania rezultat w istotny sposób zależy od zastosowanej metody. Daje to podstawę do rozważania problemu, na ile otrzymany wynik odzwierciedla opinie ekspertów (wolę wyborców) czy raczej cechy zastosowanej metody agregacji ocen ekspertów.

Jeżeli nie ma narzuconych ograniczeń odnośnie wyboru metody oceny grupowej w praktyce może okazać się, że rozwiązania uzyskane przy użyciu różnych metod są zgodne lub zbliżone albo całkowicie rozbieżne. W pierwszej sytuacji można przyjąć, że ocena grupowa wiernie odzwierciedla opinie ekspertów. W szczególnym przypadku różne metody mogą wskazywać ten sam obiekt jako zwycięzcę. Baharad i Nitzan (2003, 2006) formułują warunki, jakie powinny być spełnione, aby zapewnić zgodność wyboru najlepszego obiektu wyznaczonego za pomocą różnych metod.

Można również sformułować zadanie wyboru takiej metody wyznaczania oceny grupowej, która zapewni zgodność otrzymanego rozwiązania z założonymi wcześniej warunkami. W pracy (1992) Saari przeanalizował zagadnienie wyznaczania dla danego zestawu ocen ekspertów wszystkich możliwych rozwiązań uzyskanych w wyniku zastosowania różnych metod pozycyjnych. W omawianej pracy jest podana szczegółowa analiza przypadku trzech obiektów. W opracowaniu zostanie szczegółowo rozpatrzony przykład czterech obiektów.

1. Podstawowe definicje

1.1. Zadanie wyznaczania oceny grupowej

Zakładamy, że dany jest zbiór n obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, ..., O_n\}$ oraz zbiór K ekspertów, których zadaniem jest uporządkowanie tego zbioru zgodnie z przyjętym kryterium (zbiorem kryteriów). Zazwyczaj przyjmuje się, że obiekt uważany za najlepszy - w sensie przyjętego kryterium lub zbioru kryteriów - jest umieszczony na pierwszej pozycji, zaś obiekt uważany za najgorszy zajmuje ostatnią pozycję.

1.2. Metody pozycyjne wyznaczania oceny grupowej

Rozważania zostaną ograniczone do tzw. metod pozycyjnych, to znaczy takich, w których ocena obiektu jest wyznaczana na podstawie jego pozycji w uporządkowaniu. Z reguły przyjmuje się - dla uproszczenia rozważań - że w uporządkowaniach podanych przez ekspertów nie występują obiekty równoważne oraz, że liczba pozycji we wszystkich uporządkowaniach jest taka sama.

Wektor wag (w teorii głosowania nazywany wektor głosowania) ma następującą postać:

$$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in R_n, \tag{1}$$

przy czym waga w_j – jest to liczba przyporządkowana obiektowi zajmującemu pozycję j w uporządkowaniu. Zazwyczaj przyjmuje się, że $\underset{j}{\forall}\, w_j \geq w_{j+1}$ oraz, że $w_1 > w_n$.

Łączna liczba punktów s_i, jakie uzyskuje dany obiekt O_i dana jest zależnością

$$s_i = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} \delta_j^{ik} w_j, \qquad \delta_j^{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli obiekt } O_i \text{ zajmuje pozycję j w uporządkowaniu} \\ & \text{podanym przez eksperta k} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{2}$$

Zwycięzcą zostaje obiekt, dla którego wartość wskaźnika s_i jest największa.

Przyjęcie konkretnej postaci wektora wag prowadzi do określonej metody wyznaczania oceny grupowej, np.:

$\mathbf{w}=(1, 0, \ldots, 0)$ odpowiada metodzie większości

$\mathbf{w} = (\underbrace{1,1,\ldots 1}_{m},0,\ldots,0)$ odpowiada głosowaniu na m kandydatów

$\mathbf{w}=(1, 1, \ldots 1, 0)$ odpowiada metodzie antywiększości

$\mathbf{w}=(n-1, \ldots, n-j, \ldots, 1, 0)$ odpowiada metodzie Bordy.

Ogólnie wektor głosowania można przedstawić jako kombinację wypukłą wektorów głosowania typu „głosuj na m kandydatów" (1, 0, ..., 0), (1, 1, 0, ..., 0), ..., (1, 1, 1, ..., 1, 0), m=1, ..., n-1.

Aby zilustrować prowadzone rozważania rozpatrzymy przykład podany w pracy (Saari 2008a).

Przykład 1

Przyjmiemy, że jedenastu ekspertów podało następujące uporządkowania zbioru trzech obiektów (O_1, O_2, O_3):

liczba ekspertów	uporządkowanie
3	$O_1 \succ O_2 \succ O_3$
2	$O_1 \succ O_3 \succ O_2$
2	$O_2 \succ O_3 \succ O_1$
4	$O_3 \succ O_2 \succ O_1$

Zastosowanie trzech wybranych metod pozycyjnych prowadzi do następujących wyników:

metoda / wektor wag	liczba punktów			uporządkowanie	zwycięzca
	O_1	O_2	O_3		
większości (1, 0, 0)	5	2	4	$O_1 \succ O_3 \succ O_2$	O_1
antywiększości (1, 1, 0)	5	9	8	$O_2 \succ O_3 \succ O_1$	O_2
Bordy (2, 1, 0)	10	11	12	$O_3 \succ O_2 \succ O_1$	O_3

Każda z zastosowanych metod daje inny wynik. Uporządkowanie otrzymane przy użyciu metody większości jest przeciwne do uzyskanego za pomocą metody antywiększości. Warto również zauważyć, że zastosowanie metody Condorceta daje w tym przykładzie wynik zgodny z otrzymanym metodą Bordy.

Przykład ten pokazuje, że nawet w tak prostym przypadku każdy obiekt może zostać zwycięzcą pod warunkiem zastosowania odpowiedniej metody głosowania.

W swoich pracach (m. in. 1992, 1995, 2008a, 2008b) Saari przeanalizował to zagadnienie szczegółowo dochodząc do interesujących wniosków, sformułowanych w postaci twierdzeń.

1.3. Definicja profilu

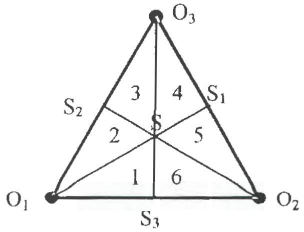
Saari zaproponował, aby oceny podawane przez ekspertów opisywać za pomocą tzw. profilu. Profil jest to pełna lista uporządkowań podanych przez każdego z ekspertów. Określenie profilu wymaga uwzględnienia wszystkich uporządkowań rozpatrywanych obiektów. W rozważanym przypadku, to znaczy przy założeniu, że w uporządkowaniach nie występują obiekty równoważne, liczba wszystkich możliwych uporządkowań n obiektów wynosi n!. Liczby uporządkowań n obiektów z równoważnościami podano w pracy (Bury, Wagner, 2008). Dla n=3 jest 13 uporządkowań: 6 uporządkowań bez równoważności oraz 7 z równoważnościami.

Załóżmy, że p_ℓ oznacza liczbę ekspertów, których opinia ma postać uporządkowania P^ℓ, ($\ell=1,\ldots n!$). Jeżeli liczba ekspertów, których opinie bierzemy pod uwagę jest równa K, to

$$\sum_{\ell=1}^{n!} p_\ell = K. \tag{3}$$

Profilem **p** będziemy nazywać wektor o n! składowych p_ℓ, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{n!})$; profil zawiera – przy przyjętych założeniach – pełny opis wyników ekspertyzy.

Interpretacja geometryczna uporządkowań, które mogą wystąpić dla n=3 jest następująca. Rozważmy trójkąt równoboczny. Każdemu wierzchołkowi trójkąta przypisujemy jeden obiekt. Każdemu punktowi trójkąta przypisujemy uporządkowanie obiektów w myśl zasady „im bliżej wierzchołka tym wyższa pozycja obiektu". Prowadzimy symetralne boków trójkąta. Otrzymujemy w ten sposób podział trójkąta na 13 części - rys.1.



Rys. 1. Interpretacja graficzna uporządkowań trzech obiektów.

Sześć małych trójkątów reprezentuje uporządkowania bez obiektów równoważnych. Pozostałe sześć odcinków, będących częścią symetralnych, reprezentuje pary obiektów równoważnych. Punkt przecięcia symetralnych S wyznacza równoważność wszystkich trzech obiektów.

Trójkąt o numerze 1 jest najbliższy wierzchołkowi O_1, następnie wierzchołkowi O_2 i jest najbardziej oddalony od wierzchołka O_3, co odpowiada uporządkowaniu $O_1 \succ O_2 \succ O_3$.

Analogiczne rozumowanie prowadzimy dla pozostałych małych trójkątów, otrzymując następujące uporządkowania

trójkąt	uporządkowanie
1	$O_1 \succ O_2 \succ O_3$
2	$O_1 \succ O_3 \succ O_2$
3	$O_3 \succ O_1 \succ O_2$
4	$O_3 \succ O_2 \succ O_1$
5	$O_2 \succ O_3 \succ O_1$
6	$O_2 \succ O_1 \succ O_3$

$S\,S_3$	$O_1 \approx O_2 \succ O_3$
$S\,S_2$	$O_1 \approx O_3 \succ O_2$
$S\,S_1$	$O_2 \approx O_3 \succ O_1$
$O_3\,S$	$O_3 \succ O_1 \approx O_2$
$O_2\,S$	$O_2 \succ O_1 \approx O_3$
$O_1\,S$	$O_1 \succ O_2 \approx O_3$
S	$O_1 \approx O_2 \approx O_3$

O_iS_i oznacza symetralną poprowadzoną z wierzchołka O_i, O_iS oznacza odcinek łączący punkt S z wierzchołkiem O_i.

W przypadku czterech obiektów należy rozpatrywać bryłę w przestrzeni trójwymiarowej mającą postać ostrosłupa foremnego o podstawie trójkątnej (czworościan foremny).

Dla uproszczenia stosujemy zapis $\mathbf{p}=\left(\overset{P^1}{\frac{5}{17}}, \overset{P^2}{\frac{2}{17}}, \overset{P^3}{\frac{4}{17}}, \overset{P^4}{\frac{6}{17}}\right)$ uwzględniający tylko niezerowe składowe profilu $\mathbf{p}$.

Następnie należy utworzyć trzy funkcje $f\left(\mathbf{p}, \mathbf{E}_s^4\right)$, s=1, 2, 3 określające wynik głosowania otrzymany przy użyciu danego wektora wag (czyli konkretnej metody pozycyjnej) do uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$.

Zasada tworzenia wyrażeń $f\left(\mathbf{p}, \mathbf{E}_s^4\right)$ jest następująca:

dla każdego uporządkowania P^ℓ, $\ell=1,.., 4$, składowe wektora $\mathbf{E}_s^4$ zależą od kolejności obiektów w uporządkowaniu. Dla $\mathbf{E}_s^4$, s=1, 2, 3 ułamek $\frac{1}{s}$ występuje na pozycjach odpowiadających obiektom zajmującym pierwszych s miejsc w uporządkowaniu.

Dla $\mathbf{E}_1^4$ jedynka występuje na pozycji odpowiadającej obiektowi zajmującemu pierwsze miejsce w uporządkowaniu.

W uporządkowaniu P^1 pierwsze miejsce zajmuje obiekt O_1, stąd mamy $\mathbf{E}_1^4 = (1, 0, 0, 0)$.

Analogicznie dla P^2 - $\mathbf{E}_1^4 = (0, 1, 0, 0)$, dla P^3 - $\mathbf{E}_1^4 = (0, 0, 1, 0)$, dla P^4 - $\mathbf{E}_1^4 = (1, 0, 0, 0)$.

Zatem dla $\mathbf{E}_1^4$ mamy

$$f\left(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2^1\right)=\frac{5}{17}\left(\underbrace{\overbrace{1, 0, 0, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^1}\right)+\frac{2}{17}\left(\underbrace{\overbrace{0, 1, 0, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^2}\right)+\frac{4}{17}\left(\underbrace{\overbrace{0, 0, 1, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^3}\right)+\frac{6}{17}\left(\underbrace{\overbrace{1, 0, 0, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^4}\right)=\left(\overset{O_1}{\frac{11}{17}}, \overset{O_2}{\frac{2}{17}}, \overset{O_3}{\frac{4}{17}}, \overset{O_4}{0}\right) \quad (23)$$

czyli uporządkowanie obiektów otrzymane przy użyciu wektora wag $\mathbf{E}_1^4$ ma postać

$$O_1 \succ O_3 \succ O_2 \succ O_4. \quad (24)$$

Dla $\mathbf{E}_2^4$ ułamek $\frac{1}{2}$ występuje na pozycjach odpowiadających obiektom zajmującym pierwsze dwa miejsca w uporządkowaniu.

W uporządkowaniu P^1 pierwsze dwa miejsca zajmują obiekty O_1 i O_3, stąd $\mathbf{E}_2^4 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Analogicznie dla P^2 - $\mathbf{E}_2^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, dla P^3 - $\mathbf{E}_2^4 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$, dla P^4 - $\mathbf{E}_2^4 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Zatem dla $\mathbf{E}_2^4$ mamy

$$
\begin{aligned}
f\left(\mathbf{p}, \mathbf{E}_2^4\right) &= \frac{5}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^1}\right) + \frac{2}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^2}\right) + \frac{4}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^3}\right) + \frac{6}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^4}\right), \\
&= \left(\frac{5+2+4+6}{34}, \frac{2}{34}, \frac{5+4}{34}, \frac{6}{34}\right) = \left(\overset{O_1}{\frac{17}{34}}, \overset{O_2}{\frac{2}{34}}, \overset{O_3}{\frac{9}{34}}, \overset{O_4}{\frac{6}{34}}\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

czyli uporządkowanie obiektów otrzymane przy użyciu wektora wag $\mathbf{E}_2^4$ ma postać

$$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2. \tag{26}$$

Dla $\mathbf{E}_3^4$ ułamek $\frac{1}{3}$ występuje na pozycjach odpowiadających obiektom zajmującym pierwsze trzy miejsca w uporządkowaniu.

W P^1 pierwsze trzy miejsca zajmują obiekty O_1, O_3 i O_4, stąd $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Analogicznie, dla P^2 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, dla P^3 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, dla P^4 - $\mathbf{E}_3^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

Zatem dla $\mathbf{E}_3^4$ mamy

$$
\begin{aligned}
f\left(\mathbf{p}, \mathbf{E}_3^4\right) &= \frac{5}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^1}\right) + \frac{2}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^2}\right) + \frac{4}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^3}\right) + \frac{6}{17}\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}}^{O_1\ O_2\ O_3\ O_4}}_{P^4}\right), \\
&= \left(\frac{5+2+4+6}{51}, \frac{2+6}{51}, \frac{5+2+4}{51}, \frac{5+4+6}{51}\right) = \left(\overset{O_1}{\frac{17}{51}}, \overset{O_2}{\frac{8}{51}}, \overset{O_3}{\frac{11}{51}}, \overset{O_4}{\frac{15}{51}}\right)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

czyli uporządkowanie obiektów otrzymane przy użyciu wektora wag $\mathbf{E}_3^4$ ma postać

$$O_1 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_2. \tag{28}$$

Aby w rozpatrywanym przykładzie wyznaczyć zbiór wszystkich możliwych uporządkowań uzyskanych przy użyciu różnych metod pozycyjnych należy - zgodnie z metodologią podaną przez Saariego - wyznaczyć funkcję $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$, gdzie wektor wag $\mathbf{w}_\lambda^4$ ma postać

$$\mathbf{w}_\lambda^4 = \lambda_1 \mathbf{E}_1^4 + \lambda_2 \mathbf{E}_2^4 + \lambda_3 \mathbf{E}_3^4 \tag{29}$$

przy czym $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, (30)

czyli $\lambda_3 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)$, (31)

skąd $\mathbf{w}_\lambda^4 = \lambda_1 \mathbf{E}_1^4 + \lambda_2 E_2^4 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{E}_3^4$. (32)

Na podstawie (27), (31) mamy

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_\lambda^4 &= \lambda_1(\overset{j=1,}{1}, \overset{2,}{0}, \overset{3,}{0}, \overset{4}{0}) + \lambda_2(\overset{j=1,}{1/2}, \overset{2,}{1/2}, \overset{3,}{0}, \overset{4}{0}) + (1-\lambda_1-\lambda_2)(\overset{j=1,}{1/3}, \overset{2,}{1/3}, \overset{3,}{1/3}, \overset{4}{0}) \\
&= \left(\overbrace{\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{3}(1-\lambda_1-\lambda_2)}^{j=1}, \overbrace{0 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{3}(1-\lambda_1-\lambda_2)}^{j=2}, \overbrace{\frac{1}{3}(1-\lambda_1-\lambda_2)}^{j=3}, \overbrace{0}^{j=4} \right) \\
&= \left(\overbrace{\frac{6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=1}, \overbrace{\frac{3\lambda_2 + 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=2}, \overbrace{\frac{2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=3}, \overbrace{0}^{j=4} \right) \\
&= \left(\overbrace{\frac{2 + 4\lambda_1 + \lambda_2}{6}}^{j=1}, \overbrace{\frac{2 + \lambda_2 - 2\lambda_1}{6}}^{j=2}, \overbrace{\frac{2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2}{6}}^{j=3}, \overbrace{0}^{j=4} \right) = \left(w_1^4, w_2^4, w_3^4, w_4^4\right)
\end{aligned} \tag{33}$$

Zapis ten pokazuje, jakie wagi są przyporządkowywane obiektom zajmującym poszczególne pozycje j=1, 2, 3, 4. Zatem, mając składowe wektora $\mathbf{w}_\lambda^4$ należy wyznaczyć $f(\mathbf{p}, \mathbf{w}_\lambda^4)$.

Biorąc pod uwagę postać uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ otrzymamy

$$f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)=\frac{5}{17}\underbrace{\left(\overset{O_1}{\underset{w_1}{\frac{2+4\lambda_1+\lambda_2}{6}}},\ \overset{O_2}{\underset{w_4}{0}},\ \overset{O_3}{\underset{w_2}{\frac{2+\lambda_2-2\lambda_1}{6}}},\ \overset{O_4}{\underset{w_3}{\frac{2-2\lambda_1-2\lambda_2}{6}}}\right)}_{p^1}+$$

$$\frac{2}{17}\underbrace{\left(\overset{O_1}{\underset{w_2}{\frac{2+\lambda_2-2\lambda_1}{6}}},\ \overset{O_2}{\underset{w_1}{\frac{2+4\lambda_1+\lambda_2}{6}}},\ \overset{O_3}{\underset{w_3}{\frac{2-2\lambda_1-2\lambda_2}{6}}},\ \overset{O_4}{\underset{w_4}{0}}\right)}_{p^2}+$$

$$\frac{4}{17}\underbrace{\left(\overset{O_1}{\underset{w_2}{\frac{2+\lambda_2-2\lambda_1}{6}}},\ \overset{O_2}{\underset{w_4}{0}},\ \overset{O_3}{\underset{w_1}{\frac{2+4\lambda_1+\lambda_2}{6}}},\ \overset{O_4}{\underset{w_3}{\frac{2-2\lambda_1-2\lambda_2}{6}}}\right)}_{p^3}+$$

$$\frac{6}{17}\underbrace{\left(\overset{O_1}{\underset{w_1}{\frac{2+4\lambda_1+\lambda_2}{6}}},\ \overset{O_2}{\underset{w_2}{\frac{2-2\lambda_1-2\lambda_2}{6}}},\ \overset{O_3}{\underset{w_4}{0}},\ \overset{O_4}{\underset{w_3}{\frac{2+\lambda_2-2\lambda_1}{6}}}\right)}_{p^4} \qquad (34)$$

Składowe wektorowego wyrażenia $f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)$ są, jak następuje:

$$\text{dla } O_1\text{: } \frac{10+5\lambda_2+20\lambda_1+4+2\lambda_2-4\lambda_1+8+4\lambda_2-8\lambda_1+12+6\lambda_2+24\lambda_1}{102}=\frac{32+17\lambda_2+32\lambda_1}{102} \qquad (35)$$

$$\text{dla } O_2\text{: } \frac{4+2\lambda_2+8\lambda_1+12-12\lambda_1-12\lambda_2}{102}=\frac{16-10\lambda_2-4\lambda_1}{102} \qquad (36)$$

$$\text{dla } O_3\text{: } \frac{10+5\lambda_2-10\lambda_1+4-4\lambda_2-4\lambda_1+8+4\lambda_2+16\lambda_1}{102}=\frac{22+5\lambda_2+2\lambda_1}{102} \qquad (37)$$

$$\text{dla } O_4\text{: } \frac{10-10\lambda_2-10\lambda_1+8-8\lambda_2-8\lambda_1+12+6\lambda_2-12\lambda_1}{102}=\frac{30-30\lambda_1-12\lambda_2}{102} \qquad (38)$$

Wyrażenie $f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)$ można również określić w inny sposób. Wiadomo, że (Saari, 1992)

$$f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)=f(\mathbf{p},\lambda_1\mathbf{E}_1^4+\lambda_2\mathbf{E}_2^4+\lambda_3\mathbf{E}_3^4)=\lambda_1 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_1^4)+\lambda_2 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_2^4)+\lambda_3 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_3^4). \qquad (39)$$

Biorąc pod uwagę, że wyrażenie $f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)$ jest liniowe oraz uwzględniając (27) i (30) mamy

$$f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)=\lambda_1 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_1^4)+\lambda_2 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_2^4)+\lambda_3 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_3^4)=\lambda_1 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_1^4)+\lambda_2 f(\mathbf{p},\mathbf{E}_2^4)+(1-\lambda_1-\lambda_2)f(\mathbf{p},\mathbf{E}_3^4). \qquad (40)$$

Uwzględniając postacie wyrażeń $f(\mathbf{p},\mathbf{E}_1^4)$ (23), $f(\mathbf{p},\mathbf{E}_2^4)$ (25), $f(\mathbf{p},\mathbf{E}_3^4)$ (27) mamy

$$f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)=\lambda_1\left(\frac{11}{17},\frac{2}{17},\frac{4}{17},0\right)+\lambda_2\left(\frac{17}{34},\frac{2}{34},\frac{9}{34},\frac{6}{34}\right)+(1-\lambda_1-\lambda_2)\left(\frac{17}{51},\frac{8}{51},\frac{11}{51},\frac{15}{51}\right). \tag{41}$$

Poszczególne składowe wektora $f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)$, mają więc postać:

$$(i=1)\ \frac{11}{17}\lambda_1+\frac{17}{34}\lambda_2+(1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{17}{51}=\frac{66\lambda_1+51\lambda_2+34-34\lambda_1-34\lambda_2}{102}=\frac{34+32\lambda_1+17\lambda_2}{102} \tag{42}$$

$$(i=2)\ \frac{2}{17}\lambda_1+\frac{2}{34}\lambda_2+(1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{8}{51}=\frac{12\lambda_1+6\lambda_2+16-16\lambda_1-16\lambda_2}{102}=\frac{16-4\lambda_1-10\lambda_2}{102} \tag{43}$$

$$(i=3)\ \frac{4}{17}\lambda_1+\frac{9}{34}\lambda_2+(1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{11}{51}=\frac{24\lambda_1+27\lambda_2+22-22\lambda_1-22\lambda_2}{102}=\frac{22+2\lambda_1+5\lambda_2}{102} \tag{44}$$

$$(i=4)\ 0\cdot\lambda_1+\frac{6}{34}\lambda_2+(1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{15}{51}=\frac{18\lambda_2+30-30\lambda_1-30\lambda_2}{102}=\frac{30-30\lambda_1-12\lambda_2}{102}. \tag{45}$$

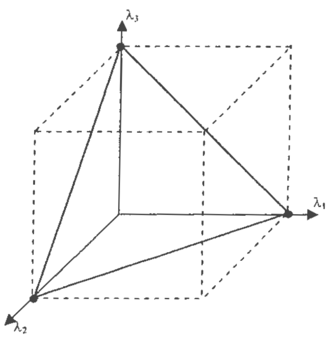
Otrzymany wynik pokrywa się z (35)÷(38). Można zatem – w zależności od postaci zadania – stosować jedno z dwu przedstawionych podejść.

Jeżeli współczynniki λ_i spełniają warunek $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=1$ to wartości tych współczynników muszą należeć obszaru wyznaczonego przez wierzchołki (1, 0, 0), (0, 1, 0) (0, 0, 1) (rys. 2).

Jeżeli $\lambda_3 = 0$, to $\lambda_1 + \lambda_2=1$, czyli $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. (46)

Jeżeli $\lambda_2 = 0$, to $\lambda_1 + \lambda_3=1$, czyli $\lambda_3 = 1 - \lambda_1$. (47)

Jeżeli $\lambda_1 = 0$, to $\lambda_2 + \lambda_3=1$, czyli $\lambda_3 = 1 - \lambda_2$. (48)



Rys. 2. Obszar dopuszczalnych wartości λ_i, i=1, 2, 3.

Aby wyznaczyć zbiór wszystkich możliwych uporządkowań uzyskanych przy użyciu różnych metod pozycyjnych należy, zgodnie z metodologią podaną przez Saariego, wyznaczyć zbiór $Co_n(\mathbf{p})$, gdzie $Co_n(\mathbf{p})$ powłoka wypukła definiowana przez (n-1) punktów $\{f(\mathbf{p},\mathbf{E}_s^n\}_{s=1}^{n-1}$.

W celu ustalenia, jakiego typu uporządkowania można uzyskać stosując różne metody pozycyjne, należy przebadać wpływ zmienności parametrów λ_1 i λ_2 na wartość składowych wektora $f(\mathbf{p},\mathbf{w}_\lambda^4)$.

1. Warunek $O_1 \succ O_2$ oznacza, że

   $34+32\lambda_1+17\lambda_2 > 16-4\lambda_1-10\lambda_2$ (49)

   czyli $18 > -36\lambda_1-10\lambda_2$. (50)

   Ponieważ $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$ warunek ten jest zawsze spełniony.

2. Warunek $O_2 \succ O_3$ oznacza, że

   $16-4\lambda_1-10\lambda_2 > 22+2\lambda_1+5\lambda_2$ (51)

   czyli $-6\lambda_1-15\lambda_2 > 6$. (52)

   Warunek ten nie może być spełniony, ponieważ $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$.

3. Warunek $O_3 \succ O_4$ oznacza, że

   $22+2\lambda_1+5\lambda_2 > 30-30\lambda_1-12\lambda_2$, (53)

   $32\lambda_1+17\lambda_2 > 8$ czyli $4\lambda_1+\frac{17}{8}\lambda_2 > 1$. (54)

   Dla $\lambda_1=0$ mamy $\lambda_2 > \frac{8}{17}$. (55)

   Dla $\lambda_1=1$ mamy $4+\frac{17}{8}\lambda_2 > 1$. (56)

   Warunek ten jest zawsze spełniony, ponieważ $\lambda_2 \geq 0$.

$$WB_1 = 3\cdot 11+2\cdot 6+1\cdot 0 = 45 \tag{69}$$

$$WB_2 = 3\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 6 = 12 \tag{70}$$

$$WB_3 = 3\cdot 4+2\cdot 5+1\cdot 2 = 24 \tag{71}$$

$$WB_4 = 3\cdot 0+2\cdot 6+1\cdot 9 = 21. \tag{72}$$

Zatem dla uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ ocena grupowa według metody Bordy ma postać

$$O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2 . \tag{73}$$

Aby wyznaczyć wartości parametrów λ_1 i λ_2 odpowiadających metodzie Bordy, należy zauważyć, że wektor $\mathbf{w}_\lambda^4$ ma postać (4) $\mathbf{w}^{B4} = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

W przykładzie 2 pokazano, że znormalizowany wektor Bordy może mieć postać (16) $\overline{\mathbf{w}}^{B4} = \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)$.

Stosując opisane podejście do wektora $\overline{\mathbf{w}}^{B4}$ oraz rozpatrywanych uporządkowań $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ otrzymamy

$$f\left(p, \overline{\mathbf{w}}^{B4}\right) = \frac{5}{17}\left(\frac{5}{9}, 0, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}\right) + \frac{2}{17}\left(\frac{3}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 0\right) + \frac{4}{17}\left(\frac{3}{9}, 0, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}\right) + \frac{6}{17}\left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 0, \frac{3}{9}\right). \tag{74}$$

Składowe tego wektora są, jak następuje

$$(i=1)\ \frac{5}{17}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{17}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{17}\cdot\frac{3}{9} + \frac{6}{17}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25+6+12+30}{153} = \frac{73}{153} \tag{75}$$

$$(i=2)\ \frac{5}{17}\cdot 0 + \frac{2}{17}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{17}\cdot 0 + \frac{6}{17}\cdot\frac{1}{9} = \frac{10+6}{153} = \frac{16}{153} \tag{76}$$

$$(i=3)\ \frac{5}{17}\cdot\frac{3}{9} + \frac{2}{17}\cdot\frac{1}{9} + \frac{4}{17}\cdot\frac{5}{9} + \frac{6}{17}\cdot 0 = \frac{15+2+20}{153} = \frac{37}{153} \tag{77}$$

$$(i=4)\ \frac{5}{17}\cdot\frac{1}{9} + \frac{2}{17}\cdot 0 + \frac{4}{17}\cdot\frac{1}{9} + \frac{6}{17}\cdot\frac{3}{9} = \frac{5+4+18}{153} = \frac{27}{153}. \tag{78}$$

Zatem uporządkowanie wyznaczone przez $f\left(p, \overline{\mathbf{w}}^{B4}\right)$ ma postać $O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$. (79)

Założymy teraz, że wektor $\overline{\mathbf{w}}^{B4}$ zapiszemy jako sumę wektorów $\mathbf{E}_1^4$, $\mathbf{E}_2^4$, $\mathbf{E}_3^4$.

Mamy więc $\left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, 0\right) = \lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + \lambda_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. (80)

Biorąc pod uwagę, że $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, łatwo wykazać, że

$$\lambda_1 = \frac{2}{9}, \qquad \lambda_2 = \frac{4}{9}, \qquad \lambda_3 = \frac{3}{9}. \tag{81}$$

Na rysunku 3 zaznaczono punkt odpowiadający tym wartościom λ_1 i λ_2. Dla tego punktu mamy $O_3 \succ O_4$ oraz $O_4 \succ O_2$. Zatem biorąc pod uwagę, że $\forall \lambda_1, \lambda_2$ mamy $O_1 \succ O_3$ można stwierdzić, że $O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_2$. (82)

Wynik ten jest zgodny z uzyskanym poprzednio.

Uwagi końcowe

Przedstawione przez Saariego geometryczne podejście do pozycyjnych metod wyznaczania oceny grupowej stwarza możliwości wyjaśnienia różnic w ocenach uzyskanych w wyniku zastosowania różnych metod oraz wytłumaczenia występujących paradoksów. Podejście to pozwala również na uwzględnienie możliwości występowania obiektów równoważnych zarówno w ocenach ekspertów, jak i w ocenie grupowej. Umożliwia ono próbę odpowiedzi na pytanie, na ile uzyskane za pomocą różnych metod wyniki odzwierciedlają opinie ekspertów a w jakim stopniu zależą od zastosowanej metody.

W pracy przeanalizowano przypadek czterech obiektów oraz podano jego interpretację geometryczną.

Literatura

Baharad E., Nitzan S., 2003, The Borda rule, Condorcet consistency and Condorcet stability, Economic Theory, 22, 685-688

Baharad E., Nitzan S., 2006, On the selection of the same winner by all scoring rules, Social Choice and Welfare, 26, 597-601

Bury H., Wagner D., 2008, Group Judgement With Ties. Distance-Based Methods. In: Aschemann H. (Ed.): New Approaches in Automation and Robotics. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, 153-172

Saari D. G., 1992, Millions of election outcomes from a single profile, Social Choice and Welfare, 9, 277-306

Saari D. G., 1995, Basic geometry of voting, Springer Verlag, Heidelberg

Saari D. G., 2008a, Mathematics and Voting, Notices of the AMS, vol.55, no 4, 448-455

Saari D. G., 2008b, Complexity and the geometry of voting, Mathematical and Computer Modelling, 48, 1335-1356