Raport Badawczy
Research Report

RB/1/2008

Wyznaczanie uporządkowań n obiektów

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2008

WYZNACZANIE UPORZĄDKOWAŃ n OBIEKTÓW

1. Wprowadzenie

Rozpatrzymy uporządkowanie zawierające n pozycji. Jeżeli przyjmiemy, że między kolejnymi elementami tego uporządkowania mogą zachodzić tylko dwie relacje: $\succ$ lub $\approx$, to liczba możliwych struktur pozycji, jakie można utworzyć za pomocą tych relacji z obiektów znajdujących się na danych pozycjach jest równa 2^{n-1}. Liczba pozycji zajmowanych przez znaki relacji w tym uporządkowaniu wynosi (n-1). Na danej pozycji może występować tylko jedna z dwóch postaci relacji, tzn. $\succ$ lub $\approx$. Wyjaśnia to rysunek 1.

$$\underbrace{O_{i_1}}_{1\text{pozycja}} \boxed{\succ/\approx} \underbrace{O_{i_2}}_{2\text{pozycja}} \boxed{\succ/\approx} \underbrace{O_{i_3}}_{3\text{pozycja}} \boxed{\succ/\approx} \cdots \boxed{\succ/\approx} \underbrace{O_{i_{n-1}}}_{n-1\text{pozycja}} \boxed{\succ/\approx} \underbrace{O_{i_n}}_{n\text{pozycja}}$$

Rys. 1

Zatem, dla różnych n mamy następujące liczby możliwych struktur pozycji

n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
$L_2=2$	$L_3=4$	$L_4=8$	$L_5=16$	$L_6=32$

(1)

Należy podkreślić, że nie jest to liczba wszystkich możliwych uporządkowań n obiektów a jedynie liczba struktur pozycji uzyskanych przy założeniu, że na n pozycjach stoją konkretne obiekty $O_{i_1},\ldots,O_{i_n}$.

Przykład 1.

Założymy, że n=5 oraz że struktura uporządkowania jest następująca

$$O_{i_1} \approx O_{i_2} \succ O_{i_3} \approx O_{i_4} \succ O_{i_5}, \tag{2}$$

co możemy również zapisać w postaci $(O_{i_1}, O_{i_2}), (O_{i_3}, O_{i_4}), O_{i_5}$. (3)

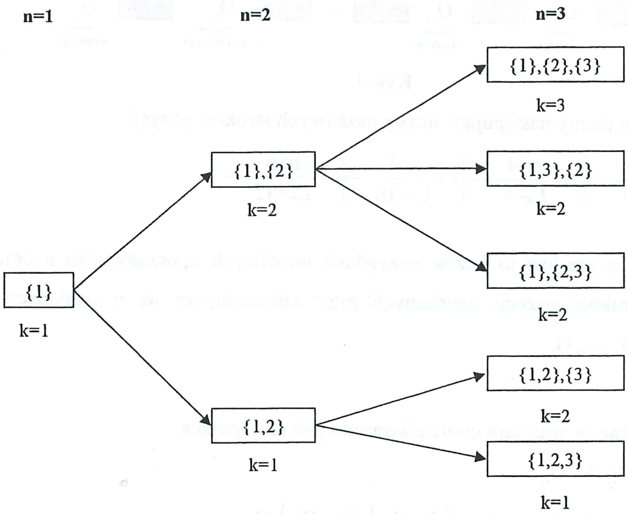
Liczba uporządkowań zachowujących strukturę (2) jest równa $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}=10\cdot 3=30$. Pierwszą parę obiektów równoważnych można bowiem wybrać na $\binom{5}{2}$ sposobów drugą zaś na $\binom{3}{2}$ sposobów. Wybranie czterech obiektów determinuje wybór piątego.

Wydaje się, że przedstawianie uporządkowań poprzez podanie pozycji i wskazanie, które obiekty są równoważne, pozwala w przejrzysty sposób wyznaczać liczbę uporządkowań danego typu. Przy zastosowaniu tego podejścia rozpatrywane uporządkowanie należy zapisać jak następuje: (1, 2), (3, 4), 5, (4) gdzie 1, 2, 3, 4, 5 oznaczają numery pozycji, zaś w nawiasach - zgodnie z zapisem (3) - ujęto pozycje, na których stoją obiekty równoważne.

W Załączniku 1 podano zapis wszystkich możliwych struktur pozycji odpowiednio dla n=3, 4, 5, 6 i 7 oraz podano liczby uporządkowań odpowiadających każdej ze struktur. Ich suma, dla ustalonego n jest równa sumie wszystkich uporządkowań obiektów.

Inne podejście do zadania wyznaczania uporządkowań n obiektów polega na generowaniu podziałów zbioru n-elementowego na k bloków, k=1, ..., n.

Sposób tworzenia podziałów zbioru n elementów na k bloków dla n=3, k=1,...,3, przedstawiono na rysunku 2 ([Lipski], [Libura, Sikorski]).



Rys. 2

Liczba wszystkich możliwych podziałów zbioru n-elementowego na k bloków, jest nazywana n-tą liczbą Bella i oznaczana B_n. Jedna z zależności definiujących liczbę Bella jest następująca [Lipski] $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$, gdzie $S(n,k)$ jest liczbą Stirlinga drugiego rodzaju.

Liczby Bella można również wyznaczać z zależności rekurencyjnej $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$, przyjmując $B_0=1$ [Lipski].

Wartości liczb Bella dla n=1,...,7 są następujące:

n	1	2	3	4	5	6	7
B_n	1	2	5	15	52	203	877

Zasada tworzenia podziałów zbioru n-elementowego na bloki k-elementowe może być przydatna przy generowaniu wszystkich możliwych uporządkowań zbioru n elementów.

W pierwszym kroku generowane są wszystkie typy uporządkowań rozumiane jako wszystkie możliwe podziały zbioru n-elementowego; jest ich B_n. Pewnym ułatwieniem jest spostrzeżenie, że element n może być dodany do danego podziału zbioru (n-1) elementów na k bloków na (k+1) sposobów.

W następnym kroku dla każdego podziału zbioru n-elementów wyznacza się wszystkie permutacje bloków.

W Załączniku 2 przedstawiono wszystkie podziały zbioru n elementów (tzn. typy uporządkowań) dla n=3, 4, 5 i 6 oraz podano liczbę permutacji dla każdego typu. Ich suma, dla ustalonego n, jest równa liczbie wszystkich możliwych uporządkowań zbioru n obiektów.

Liczbę wszystkich możliwych uporządkowań (w tym również zawierających elementy równoważne) zbioru n obiektów oznaczymy przez s_n. Można wykazać, że

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} s_{nk} \text{, gdzie } s_{nk} = k!\mathcal{S}(n,k), \tag{5}$$

symbol $\mathcal{S}(n,k)$ oznacza liczby Stirlinga drugiego rodzaju [Lipski, Marek].

Wiadomo [Lipski, Marek], że dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju zachodzą następujące zależności

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}(n,n) = 1 \qquad \text{dla } n \geq 0 \\ &\mathcal{S}(n,0) = 0 \qquad \text{dla } n > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\mathcal{S}(n,k) = \mathcal{S}(n-1,k-1) + k\mathcal{S}(n-1,k) \text{ dla } 0 < k < n \tag{7}$$

Dla zbioru (n+1) obiektów liczba wszystkich uporządkowań jest równa (5)

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k!\mathcal{S}(n+1,k). \tag{8}$$

Korzystając z wzoru (7) mamy

$$\mathcal{S}(n+1,k) = \mathcal{S}(n,k-1) + k\mathcal{S}(n,k) \tag{9}$$

skąd

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k!\,\mathcal{S}(n+1,k) = \sum_{k=1}^{n+1} k!\left[\mathcal{S}(n,k-1) + k\mathcal{S}(n,k)\right] = \sum_{k=1}^{n+1} k!\,\mathcal{S}(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n+1} k!\,k\mathcal{S}(n,k). \tag{10}$$

Na podstawie (5) i (7) mamy

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} k!\,S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} k!\left[S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} k!\,S(n-1,k-1) + \sum_{k=1}^{n} k!\,kS(n-1,k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)!\,S(n-1,k) + \sum_{k=1}^{n-1} k!\,kS(n-1,k) \end{aligned} \tag{11}$$

bowiem $S(n,k)$ jest określone dla $0 \le k \le n$. Mamy więc

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)!+k!\,k\right]S(n-1,k) = \sum_{k=1}^{n-1} k!(2k+1)S(n-1,k)\,. \tag{12}$$

Przykład 2.

Zastosujemy wzór (12) dla przypadku n=4. Mamy wtedy

$$s_4 = \sum_{k=1}^{3} k!(2k+1)S(3,k) = 1!3S(3,1) + 2!5S(3,2) + 3!7S(3,3) = 3\cdot 1 + 10\cdot 3 + 42\cdot 1 = 75\,. \tag{13}$$

Mamy również

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k!\,S(n+1,k) = \sum_{k=1}^{n} k!\,S(n+1,k) + (n+1)!\,S(n+1,n+1) \\ &= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k!\,S(n+1,k) = (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k!\left[S(n+1,k-1) + kS(n,k)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

bowiem $S(n+1,n+1) = 1$.

Zatem

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n}\left[k!\,S(n,k-1) + k!\,kS(n,k) - k!\,S(n,k)\right] \\ &= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n}\left[k!\,S(n,k-1) + k!(k-1)S(n,k)\right] \\ &= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k!\left[S(n,k-1) + (k-1)S(n,k)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Przykład 3.

Zastosujemy wzór (15) do obliczenia różnicy między liczbą uporządkowań dla zbiorów pięciu i czterech obiektów. Mamy

$$\begin{aligned} s_5 - s_4 &= 5! + \sum_{k=1}^{n} k!\left[S(4,k-1) + (k-1)S(4,k)\right] \\ &= 5! + S(4,0) + 2!\left[S(4,1) + S(4,2)\right] + 3!\left[S(4,2) + 2S(4,3)\right] + 4!\left[S(4,3) + 3S(4,4)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Wiedząc, że $S(4,0) = 0$ oraz, że $S(4,4) = 1$ otrzymujemy

$$s_5 - s_4 = 5!+2!\,\mathcal{S}(4,1) + (2!+3!)\mathcal{S}(4,2) + (3!\cdot 2 + 4!)\mathcal{S}(4,3) + 4!\cdot 3\,. \tag{17}$$

Wiadomo również, że [Lipski, Marek] $\mathcal{S}(4,1) = 1$, $\mathcal{S}(4,2) = 7$ oraz $\mathcal{S}(4,3) = 6$.

A zatem otrzymujemy

$$s_5 - s_4 = 120 + 2 + 8\cdot 7 + 36\cdot 6 + 72 = 466\,. \tag{18}$$

Wiadomo, że s_4=75 czyli s_5=541.

Stosując postępowanie przedstawione w przykładzie 3, to znaczy sumując współczynniki przy tych samych liczbach $\mathcal{S}(n,k)$ oraz uwzględniając, że $\mathcal{S}(n,n) = 1$ wzór (15) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (n+1)! + \sum_{k=1}^{n}\left[k! + (k-2)(k-1)!\right]\mathcal{S}(n,k-1) + n!(n-1) \\ &= (n+1)! + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)!(k-1)\mathcal{S}(n,k-1) + n!(n-1) \\ &= 2n!\,n + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)!(k-1)\mathcal{S}(n,k-1) \end{aligned} \tag{19}$$

Podstawiając k'=k-1 oraz uwzględniając, że $\mathcal{S}(n,0) = 0$ oraz $\mathcal{S}(n,n) = 1$ otrzymujemy

$$s_{n+1} - s_n = 2n!\,n + 2\sum_{k=1}^{n-1}k!\,k\mathcal{S}(n,k) = 2\sum_{k=1}^{n}k!\,k\mathcal{S}(n,k)\,. \tag{20}$$

Przykład 4.

Stosując wzór (20) mamy

$$\begin{aligned} s_5 - s_4 &= 2\sum_{k=1}^{4}k!\,k\mathcal{S}(n,k) = 2\left[\mathcal{S}(4,1) + 2!2\mathcal{S}(4,2) + 3!3\mathcal{S}(4,3) + 4!4\mathcal{S}(4,4)\right] \\ &= 2(1 + 4\cdot 7 + 18\cdot 6 + 96) = 2(1 + 28 + 108 + 96) = 466 \end{aligned} \tag{21}$$

Wiedząc, że s_4=75 otrzymujemy s_5=75+466=541.

Biorąc pod uwagę, że $\mathcal{S}(n,k)$ można także zapisać w postaci [Lipski, Marek])

$$\mathcal{S}(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n \tag{22}$$

mamy

$$s_{n+1} - s_n = 2\sum_{k=1}^{n}k!\,k\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n = 2\sum_{k=1}^{n}k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n\,. \tag{23}$$

Założymy, że mamy dane uporządkowanie dla n obiektów. Zgodnie z wzorem (5) liczba wszystkich uporządkowań jest równa s_n.

Jeżeli zwiększymy liczbę obiektów o 1, to liczba s_{n+1} może być wyliczona następująco.

Jeden składnik liczby s_{n+1} jest równy

$$(n+1)s_n \tag{24}$$

bowiem w s_n uporządkowaniach (n+1) obiektów będzie mogło zajmować o jedną pozycję więcej.

Drugi składnik liczby s_{n+1} można określić jak następuje.

Jeżeli na przedostatniej i ostatniej (dodanej) pozycji stoi para obiektów równoważnych, to liczba nowych uporządkowań jest równa, zgodnie ze wzorem (5)

$$\binom{n+1}{2}\sum_{k=1}^{(n+1)-2} k!\,\mathcal{S}(n-1,k) = \binom{n+1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k!\,\mathcal{S}(n-1,k)\,. \tag{25}$$

Jeżeli trzy ostatnie (wraz z dodaną) pozycje zajmuje trójka obiektów równoważnych, to liczba nowych uporządkowań jest równa

$$\binom{n+1}{3}\sum_{k=1}^{n-2} k!\,\mathcal{S}(n-2,k)\,. \tag{26}$$

Tę procedurę należy powtarzać aż do uzyskania uporządkowania zawierającego (n+1) obiektów równoważnych.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n(n+1) + \sum_{\ell=2}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}\sum_{k=0}^{n+1-\ell} k!\,\mathcal{S}(n+1-\ell,k) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n+1}{n+1-\ell}\sum_{k=0}^{\ell} k!\,\mathcal{S}(\ell,k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n+1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell} k!\,\mathcal{S}(\ell,k) \end{aligned} \tag{27}$$

Przykład 5.

Dla n=4 mamy – uwzględniając, że $\binom{5}{0}=\binom{5}{5}$ oraz $\binom{5}{1}=\binom{5}{4}$

$$\begin{aligned} s_5 &= s_4\cdot 5 + \binom{5}{0}0!\,\mathcal{S}(0,0) + \binom{5}{1}1!\,\mathcal{S}(1,1) + \binom{5}{2}[1!\,\mathcal{S}(2,1) + 2!\,\mathcal{S}(2,2)] \\ &+ \binom{5}{3}[1!\,\mathcal{S}(3,1) + 2!\,\mathcal{S}(3,2) 3!\,\mathcal{S}(3,3)] = 75\cdot 5 + 1 + 5\cdot 1 + 10\cdot 3 + 10\cdot 13 = 541 \end{aligned} \tag{28}$$

bowiem $\mathcal{S}(0,0) = \mathcal{S}(1,1) = S(2,2) = \mathcal{S}(3,3) = 1$; $\mathcal{S}(2,1) = 1$; $\mathcal{S}(3,1) = 1$; $\mathcal{S}(3,2) = 3$.

2. Oszacowanie liczby uporządkowań

W pracy [Bailey] podano oszacowanie liczby możliwych uporządkowań n obiektów przy założeniu, że w uporządkowaniach mogą występować obiekty równoważne. Liczbę tę oznaczamy jako $\bar{s}_n$. Bailey wykorzystał wyniki uzyskane przez J.P. Barthelemy'ego [Barthelemy]. Postać tego oszacowania jest jak następuje

$$\bar{s}_n = \frac{n!}{2(\log 2)^{n+1}} + o((n-1)!)\,. \tag{29}$$

W pracy tej wykazano, że dla $1 \leq n \leq 15$ s_n jest liczbą całkowitą najbliższą do podanego oszacowania.

Określimy związek między oszacowaniami dla n i (n+1) przy ograniczeniu $1 \leq n \leq 15$. Mamy

$$\bar{s}_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2(\log 2)^{n+2}} = \frac{(n+1)}{\log 2}\bar{s}_n\,. \tag{30}$$

Jeżeli przyjąć, że log2=0,693147, to wzór (30) przybiera postać

$$\bar{s}_{n+1} = \frac{(n+1)}{\log 2}\bar{s}_n = 1{,}442695(n+1)\bar{s}_n\,. \tag{31}$$

Dla n=1, …, 7 mamy następujące oszacowania

$$\begin{array}{llllll}
n=1 & \bar{s}_1 = \dfrac{1}{2\cdot(0{,}693147)^2} & & =1{,}040626 & & s_1-\bar{s}_1=-0{,}040686 \\
n=2 & \bar{s}_2 = \dfrac{2!}{2\cdot(0{,}693147)^3} & & =3{,}002686 & \approx 3 & s_2-\bar{s}_2=-0{,}002786 \\
n=3 & \bar{s}_3 = \dfrac{3!}{2\cdot(0{,}693147)^4} & = \dfrac{3}{0{,}230835} & =12{,}996296 & \approx 13 & s_3-\bar{s}_3=0{,}003704 \\
n=4 & \bar{s}_4 = \dfrac{4!}{2\cdot(0{,}693147)^5} & = \dfrac{12}{0{,}160003} & =74{,}998594 & \approx 75 & s_4-\bar{s}_4=0{,}001406 \\
n=5 & \bar{s}_5 = \dfrac{5!}{2\cdot(0{,}693147)^6} & = \dfrac{60}{0{,}110906} & =540{,}998684 & \approx 541 & s_5-\bar{s}_5=0{,}001316 \\
n=6 & \bar{s}_6 = \dfrac{6!}{2\cdot(0{,}693147)^7} & = \dfrac{360}{0{,}076874} & =4682{,}987746 & \approx 4683 & s_6-\bar{s}_6=0{,}012254 \\
n=7 & \bar{s}_7 = \dfrac{7!}{2\cdot(0{,}693147)^8} & = \dfrac{2520}{0{,}053285} & =47292{,}859154 & \approx 47293 & s_7-\bar{s}_7=0{,}140846
\end{array} \tag{32}$$

3. Dekompozycja liczb Stirlinga drugiego rodzaju

Stosując wzór (7) można dokonywać rozkładu liczby $\mathcal{S}(n,k)$ na sumy składników o zmniejszonej liczbie n i różnych wartościach k.

Mamy bowiem

$$\mathcal{S}(n,k) = \mathcal{S}(n-1,k-1) + k\mathcal{S}(n-1,k) \tag{33}$$

$$= \mathcal{S}(n-2,k-2) + [k+(k-1)]\mathcal{S}(n-2,k-1) + k^2\mathcal{S}(n-2,k) \tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{S}(n-3,k-3)+[k+(k-1)+(k-2)]\mathcal{S}(n-3,k-2)+ \\
&\quad \{[k+(k-1)](k-1)+k^2\}\mathcal{S}(n-3,k-1)+k^3\mathcal{S}(n-3,k)
\end{aligned} \tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{S}(n-4,k-4)+[k+(k-1)+(k-2)+(k-3)]\mathcal{S}(n-4,k-3)+ \\
&\quad \{[k+(k-1)](k-1)+[k+(k-1)+(k-2)](k-2)+k^2\}\mathcal{S}(n-4,k-2)+ \\
&\quad \left\{\{[k+(k-1)](k-1)+k^2\}(k-1)+k^3\right\}\mathcal{S}(n-4,k-1)+k^4\mathcal{S}(n-4,k)
\end{aligned} \tag{36}
$$

Ze wzorów (33) ÷ (36) bezpośrednio wynika, że liczbę $\mathcal{S}(n,k)$ można zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(n,k) &= a_\ell^\ell \mathcal{S}(n-\ell,k-\ell)+a_{\ell-1}^\ell \mathcal{S}[n-\ell,(k-\ell)+1]+a_{\ell-2}^\ell \mathcal{S}[n-\ell,(k-\ell)+2]+\ldots \\
&\quad +a_1^\ell \mathcal{S}[n-\ell,(k-\ell)+\ell-1]+a_0^\ell \mathcal{S}[n-\ell,(k-\ell)+\ell]
\end{aligned} \tag{37}
$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$
n' = n-\ell \qquad k' = k-\ell \tag{38}
$$

wzór (37) można zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(n,k) &= a_\ell^\ell \mathcal{S}(n',k')+a_{\ell-1}^\ell \mathcal{S}(n',k'+1)+\ldots+a_1^\ell \mathcal{S}(n',k'+\ell-1)+a_0^\ell \mathcal{S}(n',k'+\ell) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} a_{\ell-j}^\ell \mathcal{S}(n',k'+j)
\end{aligned} \tag{39}
$$

Mamy również

$$
\mathcal{S}(n'-1,k'-1) = \sum_{j=0}^{\ell+1} a_{\ell+1-j}^{\ell+1} \mathcal{S}(n'-1,k'-1+j)\,. \tag{40}
$$

Wzór (40) można uzyskać z wzoru (39) zapisując każdy z jego składników przy użyciu wzoru (7). Powstaje zatem pytanie, jaka jest zależność między współczynnikami $a_{\ell-j}^\ell$ i $a_{\ell+1-j}^{\ell+1}$.

Można wykazać, że

$$
a_{\ell+1-j}^{\ell+1} = a_{\ell+1-j}^\ell [k-(\ell+1)+j]+a_{\ell-j}^\ell, \qquad j=1,\ldots,\ell+1, \tag{41}
$$

$$
\text{gdzie} \quad a_{\ell+1-j}^\ell = 0 \qquad \text{dla } j \le 0\,. \tag{42}
$$

Można również wykazać, że współczynniki stojące przy poszczególnych składnikach wzoru (37) dają się zapisać w postaci

$$
a_{\ell-t}^\ell = \sum_{\nu_0,\ldots,\nu_{\ell-t}} k^{\nu_0}\ldots[k-(\ell-t)]^{\nu_{\ell-t}} \qquad t=0,\ldots,\ell\,, \tag{43}
$$

$$
\text{gdzie} \sum_{j=0}^{\ell-t} \nu_j = t\,. \tag{44}
$$

Przykład 6.

Zgodnie z wzorem (41)

$$
a_3^4 = a_{3+1-1}^3[k-4+1]+a_2^3 = 1(k-3)+(k-2)+(k-1)+k\,;
$$

Z wzoru (35) mamy bowiem

$$a_3^3 = 1; \quad a_2^3 = [k+(k-1)+(k-2)]; \quad a_1^3 = \{[k+(k-1)](k-1)+k^2\}; \quad a_0^3 = k^3. \tag{45}$$

Stosując wzór (41) możemy wyznaczyć współczynniki stojące przy składowych odpowiadających (n-4). Są one jak następuje:

$$a_0^4 = a_{3+1-4}^{3+1} = a_0^3 k = k^4$$

$$a_1^4 = a_{3+1-3}^{3+1} = a_{3+1-3}^3[k-(3+1)+3] + a_{3-3}^3 = \{[k+(k-1)](k-1)+k^2\}(k-1)+k^3 \tag{46}$$

$$a_2^4 = a_{3+1-2}^{3+1} = a_2^3(k-4+2) + a_1^3 = [k+(k-1)+(k-2)](k-2) + \{[k+(k-1)](k-1)+k^2\}$$

Przykład 7.

Załóżmy, że chcemy wyznaczyć współczynnik a_2^4. Zgodnie z wzorem (43) mamy ℓ=4, t=2.

Zatem $a_{4-2}^4 = \sum\limits_{v_0, v_1, v_2} k^{v_0}(k-1)^{v_1}(k-2)^{v_2}$ (47)

pod warunkiem $\sum\limits_{j=0}^{2} v_j = 2$. (48)

Warunek (48) można przedstawić w postaci tablicy

v_0	v_1	v_2
2	0	0
0	2	0
0	0	2
1	1	0
1	0	1
0	1	1

Uwzględniając ten warunek we wzorze (47) otrzymujemy

$$a_2^4 = k^2 + (k-1)^2 + (k-2)^2 + k(k-1) + k(k-2) + (k-1)(k-2). \tag{49}$$

Literatura

Bailey R.W. The number of weak orderings of a finite set. Social Choice and Welfare, vol.15, 1998, pp.559-562

Barthelemy J.P. An asymptotic equivalent for the number of total preorders on a finite set, Discrete Mathematics, vol.29, 1980, pp.311-313

Libura M., Sikorski J. Wykłady z matematyki dyskretnej, cz. I Kombinatoryka, WSISiZ, Warszawa, 2005

Lipski W., Kombinatoryka dla programistów, WNT, 2007

Lipski W., Marek W. Analiza kombinatoryczna, PWN, 1986

Załącznik 1

Zastosowano zapis uproszczony, tzn. (1,2), 3 oznacza uporządkowanie {(1,2), 3}, gdzie w nawiasach okrągłych ujęto pozycje równoważne. Liczba możliwych uporządkowań obiektów wyznaczana jest, jak w przykładzie 1. Ich suma, dla danego n, określa liczbę wszystkich możliwych uporządkowań zbioru n obiektów i wynosi s_n, gdzie s_n jest dane wzorem (5). Struktury tego samego typu zaznaczono wspólnym kolorem (szarym lub białym).

Struktury pozycji i liczby uporządkowań

n=3

1°	1, 2, 3	6=3!
2°	(1, 2), 3	$3=\binom{3}{2}$
3°	1, (2, 3)	3
4°	(1, 2, 3)	1
		13

n=4

1°	1, 2, 3, 4	24=4!
2°	(1, 2), 3, 4	$12=\binom{4}{2}2!$
3°	1, (2, 3), 4	12
4°	1, 2, (3, 4)	12
5°	(1, 2), (3, 4)	$6=\binom{4}{2}$
6°	1, (2, 3, 4)	$4=\binom{4}{3}$
7°	(1, 2, 3), 4	4
8°	(1, 2, 3, 4)	1
		75

n=5

1°	1, 2, 3, 4, 5	120=5!
2°	(1, 2), 3, 4, 5	$60=\binom{5}{2}3!$
3°	1, (2, 3), 4, 5	60
4°	1, 2, (3, 4), 5	60
5°	1, 2, 3, (4, 5)	60
6°	(1, 2), (3, 4), 5	$30=\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}$
7°	(1, 2), 3, (4, 5)	30
8°	1, (2, 3), (4, 5)	30
9°	(1, 2, 3), 4, 5	$20=\binom{5}{2}2!$
10°	1, (2, 3, 4), 5	20
11°	1, 2, (3, 4, 5)	20
12°	(1, 2, 3), (4, 5)	$10=\binom{5}{2}$
13°	(1, 2), (3, 4, 5)	10
14°	1, (2, 3, 4, 5)	$5=\binom{5}{4}$
15°	(1, 2, 3, 4), 5	5
16°	(1, 2, 3, 4, 5)	1
		541

Struktury pozycji dla n=6 i liczby uporządkowań

1°	1, 2, 3, 4, 5, 6	720=6!
2°	(1, 2), 3, 4, 5, 6	$360=\binom{6}{2}5!$
3°	1, (2, 3), 4, 5, 6	360
4°	1, 2, (3, 4), 5, 6	360
5°	1, 2, 3, (4, 5), 6	360
6°	1, 2, 3, 4, (5, 6)	360
7°	(1, 2), (3, 4), 5, 6	$180=\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}2!$
8°	(1, 2), 3, (4, 5), 6	180
9°	(1, 2), 3, 4, (5, 6)	180
10°	1, (2, 3), (4, 5), 6	180
11°	1, (2, 3), 4, (5, 6)	180
12°	1, 2, (3, 4), (5, 6)	180
13°	(1, 2), (3, 4), (5, 6)	$90=\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$
14°	(1, 2, 3), 4, 5, 6	$120=\binom{6}{3}3!$
15°	1, (2, 3, 4), 5, 6	120
16°	1, 2, (3, 4, 5), 6	120
17°	1, 2, 3, (4, 5, 6)	120
18°	(1, 2, 3), (4, 5), 6	$60=\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}$
19°	(1, 2, 3), 4, (5, 6)	60
20°	1, (2, 3, 4), (5, 6)	60
21°	(1, 2), (3, 4, 5) 6	60
22°	(1, 2), 3, (4, 5, 6)	60
23°	1, (2, 3), (4, 5, 6)	60
24°	(1, 2, 3), (4, 5, 6)	$20=\binom{6}{3}$
25°	(1, 2, 3, 4), 5, 6	$30=\binom{6}{4}2!$
26°	1, (2, 3, 4, 5), 6	30
27°	1, 2, (3, 4, 5, 6)	30
28°	(1, 2, 3, 4), (5, 6)	$15=\binom{6}{4}$
29°	(1, 2), (3, 4, 5, 6)	15
30°	1, (2, 3, 4, 5, 6)	$6=\binom{6}{5}$
31°	(1, 2, 3, 4, 5), 6	6
32°	(1, 2, 3, 4, 5, 6)	1
		4683

Struktury pozycji dla n=7 i liczby uporządkowań

1°	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	5040=7!
2°	(1, 2), 3, 4, 5, 6, 7	$2520=\binom{7}{2}5!$
3°	1, (2, 3), 4, 5, 6, 7	2520
4°	1, 2, (3, 4), 5, 6, 7	2520
5°	1, 2, 3, (4, 5), 6, 7	2520
6°	1, 2, 3, 4, (5, 6), 7	2520
7°	1, 2, 3, 4, 5, (6, 7)	2520
8°	(1, 2), (3, 4), 5, 6, 7	$1260=\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}3!$
9°	1, (2, 3), (4, 5), 6, 7	1260
10°	1, 2, (3, 4), (5, 6), 7	1260
11°	(1, 2), 3, (4, 5), 6, 7	1260
12°	(1, 2), 3, 4, (5, 6), 7	1260
13°	(1, 2), 3, 4, 5, (6, 7)	1260
14°	1, 2, (3, 4), 5, (6, 7)	1260
15°	1, 2, 3, (4, 5), (6, 7)	1260
16°	1, (2, 3), 4, 5, (6, 7)	1260
17°	1, (2, 3), 4, (5, 6), 7	1260
18°	(1, 2), (3, 4), (5, 6), 7	$630=\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}$
19°	1, (2, 3), (4, 5), (6, 7)	630
20°	(1, 2), 3, (4, 5), (6, 7)	630
21°	(1, 2), (3, 4), 5, (6, 7)	630
22°	(1, 2, 3), 4, 5, 6, 7	$840=\binom{7}{3}4!$
23°	1, (2, 3, 4), 5, 6, 7	840
24°	1, 2, (3, 4, 5), 6, 7	840
25°	1, 2, 3, (4, 5, 6), 7	840
26°	1, 2, 3, 4, (5, 6, 7)	840
27°	(1, 2, 3), (4, 5), 6, 7	$420=\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}2!$
28°	(1, 2, 3), 4, (5, 6), 7	420
29°	(1, 2, 3), 4, 5, (6, 7)	420
30°	1, (2, 3, 4), (5, 6), 7	420
31°	1, (2, 3, 4), 5, (6, 7)	420
32°	(1, 2), (3, 4, 5), 6, 7	420
33°	1, 2, (3, 4, 5), (6, 7)	420
34°	(1, 2), 3, (4, 5, 6), 7	420
35°	(1, 2), 3, 4, (5, 6, 7)	420
36°	1, (2, 3), (4, 5, 6), 7	420
37°	1, (2, 3), 4, (5, 6, 7)	420
38°	1, 2, (3, 4), (5, 6, 7)	420

Struktury pozycji dla n=7 *dok.*

39°	(1, 2), (3, 4), (5, 6, 7)	$210=\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}$
40°	(1, 2), (3, 4, 5), (6, 7)	210
41°	(1, 2, 3), (4, 5), (6, 7)	210
42°	(1, 2, 3), (4, 5, 6), 7	$140=\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{3}$
43°	1, (2, 3, 4), (5, 6, 7)	140
44°	(1, 2, 3), 4, (5, 6, 7)	140
45°	(1, 2, 3, 4), 5, 6, 7	$210=\binom{7}{4}3!$
46°	1, (2, 3, 4, 5), 6, 7	210
47°	1, 2, (3, 4, 5, 6), 7	210
48°	1, 2, 3, (4, 5, 6, 7)	210
49°	(1, 2), (3, 4, 5, 6), 7	$105=\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{4}$
50°	(1, 2), 3, (4, 5, 6, 7)	105
51°	1, (2, 3), (4, 5, 6, 7)	105
52°	(1, 2, 3, 4), (5, 6), 7	105
53°	(1, 2, 3, 4), 5, (6, 7)	105
54°	1, (2, 3, 4, 5), (6, 7)	105
55°	(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7)	$35=\binom{7}{4}$
56°	(1, 2, 3), (4, 5, 6, 7)	35
57°	(1, 2, 3, 4, 5), 6, 7	$42=\binom{7}{5}2!$
58°	1, (2, 3, 4, 5, 6), 7	42
59°	1, 2, (3, 4, 5, 6, 7)	42
60°	(1, 2, 3, 4, 5), (6, 7)	$21=\binom{7}{5}$
61°	(1, 2), (3, 4, 5, 6, 7)	21
62°	1, (2, 3, 4, 5, 6, 7)	$7=\binom{7}{6}$
63°	(1, 2, 3, 4, 5, 6) 7	7
64°	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)	1
		47293

Załącznik 2.

Generowanie podziałów zbioru ([Lipski], [Libura, Sikorski]).

W tabelach przedstawiono możliwe podziały zbioru n elementów (tzn. typy uporządkowań) dla n=3, 4, 5 i 6 na bloki k-elementowe, k=1, ..., n oraz podano liczby możliwych uporządkowań dla każdego typu. Liczba ta jest równa liczbie permutacji bloków, z jakich składa się dany typ uporządkowania (podział zbioru) n obiektów. Suma tych permutacji, dla danego n, określa liczbę wszystkich możliwych uporządkowań zbioru n obiektów i wynosi s_n, gdzie s_n jest dane wzorem (5). Zastosowano zapis uproszczony: (1,2), 3 oznacza $\{\{O_1,O_2\}, O_3\}$, w nawiasach okrągłych (1,2) - odpowiednio $\{O_1,O_2\}$ - ujęto obiekty równoważne.

Typy uporządkowań (podziały) oraz liczba możliwych uporządkowań (kolumny zacieniowane) każdego typu (podziału) dla n=3, n=4 oraz n=5

n=3				n=4				n=5			
		k	k!			k	k!			k	k!
1°	1, 2, 3	3	6	1°	1, 2, 3, 4	4	24	1°	1, 2, 3, 4, 5	5	120
								2°	(1,5),2,3,4	4	24
								3°	1,(2,5),3,4	4	24
								4°	1,2,(3,5),4	4	24
								5°	1,2,3,(4,5)	4	24
				2°	(1,4),2,3	3	6	6°	(1,4),2,3,5	4	24
								7°	(1,4,5),2,3	3	6
								8°	(1,4),(2,5),3	3	6
								9°	(1,4),2,(3,5)	3	6
				3°	1,(2,4),3	3	6	10°	1,(2,4),3,5	4	24
								11°	(1,5),(2,4),3	3	6
								12°	1,(2,4,5),3	3	6
								13°	1,(2,4),(3,5)	3	6
				4°	1,2,(3,4)	3	6	14°	1,2,(3,4),5	4	24
								15°	(1,5),2,(3,4)	3	6
								16°	1,(2,5),(3,4)	3	6
								17°	1,2,(3,4,5)	3	6
2°	(1,3),2	2	2	5°	(1,3),2,4	3	6	18°	(1,3),2,4,5		24
								19°	(1,3,5),2,4	3	6
								20°	(1,3),(2,5),4	3	6
								21°	(1,3),2,(4,5)	3	6
				6°	(1,3,4),2	2	2	22°	(1,3,4),2,5	3	6
								23°	(1,3,4,5),2	2	2
								24°	(1,3,4),(2,5)	2	2
				7°	(1,3),(2,4)	2	2	25°	(1,3),(2,4),5	3	6
								26°	(1,3,5),(2,4)	2	2
								27°	(1,3),(2,4,5)	2	2

dokończenie

n=3	k	k!	n=4	k	k!	n=5	k	k!
3° 1,(2,3)	2	2	8° 1,(2,3),4	3	6	28° 1,(2,3),4,5	4	24
						29° (1,5),(2,3),4	3	6
						30° 1,(2,3,5),4	3	6
						31° 1,(2,3),(4,5)	3	6
			9° (1,4),(2,3)	2	2	32° (1,4),(2,3),5	3	6
						33° (1,4,5),(2,3)	2	2
						34° (1,4),(2,3,5)	2	2
			10° 1,(2,3,4)	2	2	35° 1,(2,3,4),5	3	6
						36° (1,5),(2,3,4)	2	2
						37° 1,(2,3,4,5)	2	2
4° (1,2),3	2	2	11° (1,2),3,4	3	6	38° (1,2),3,4,5	4	24
						39° (1,2,5),3,4	3	6
						40° (1,2),(3,5),4	3	6
						41° (1,2),3,(4,5)	3	6
			12° (1,2,4),3	2	2	42° (1,2,4),3,5	3	6
						43° (1,2,4,5),3	2	2
						44° (1,2,4),(3,5)	2	2
			13° (1,2),(3,4)	2	2	45° (1,2),(3,4),5	3	6
						46° (1,2,5),(3,4)	2	2
						47° (1,2),(3,4,5)	2	2
5° (1,2,3)	1	1	14° (1,2,3),4	2	2	48° (1,2,3),4,5	3	6
						49° (1,2,3,5),4	2	2
						50° (1,2,3),(4,5)	2	2
			15° (1,2,3,4)	1	1	51° (1,2,3,4),5	2	2
						52° (1,2,3,4,5)	1	1
$B_3=5$		$s_3=13$	$B_4=15$		$s_4=75$	$B_5=52$		$s_5=541$

Typy uporządkowań (podziały) oraz liczba możliwych uporządkowań (kolumny zacieniowane) każdego typu (podziału) dla n=5 oraz n=6

n=5				n=6			
		k	k!			k	k!
1°	1,2,3,4,5	5	120	1°	1,2,3,4,5,6	6	720
				2°	(1,6),2,3,4,5	5	120
				3°	1,(2,6),3,4,5	5	120
				4°	1,2,(3,6),4,5	5	120
				5°	1,2,3,(4,6),5	5	120
				6°	1,2,3,4,(5,6)	5	120
2°	(1,5),2,3,4	4	24	7°	(1,5),2,3,4,6	5	120
				8°	(1,5,6),2,3,4	4	24
				9°	(1,5),(2,6),3,4	4	24
				10°	(1,5),2,(3,6),4	4	24
				11°	(1,5),2,3,(4,6)	4	24
3°	1,(2,5),3,4	4	24	12°	1,(2,5),3,4,6	5	120
				13°	(1,6),(2,5),3,4	4	24
				14°	1,(2,5,6),3,4	4	24
				15°	1,(2,5),(3,6),4	4	24
				16°	1,(2,5),3,(4,6)	4	24
4°	1,2,(3,5),4	4	24	17°	1,2,(3,5),4,6	5	120
				18°	(1,6),2,(3,5),4	4	24
				19°	1,(2,6),(3,5),4	4	24
				20°	1,2,(3,5,6),4	4	24
				21°	1,2,(3,5),(4,6)	4	24
5°	1,2,3,(4,5)	4	24	22°	1,2,3,(4,5),6	5	120
				23°	(1,6),2,3,(4,5)	4	24
				24°	1,(2,6),3,(4,5)	4	24
				25°	1,2,(3,6),(4,5)	4	24
				26°	1,2,3,(4,5,6)	4	24
6°	(1,4),2,3,5	4	24	27°	(1,4),2,3,5,6	5	120
				28°	(1,4,6),2,3,5	4	24
				29°	(1,4),(2,4),3,5	4	24
				30°	(1,4),2,(3,6),5	4	24
				31°	(1,4),2,3,(5,6)	4	24
7°	(1,4,5),2,3	3	6	32°	(1,4,5),2,3,6	4	24
				33°	(1,4,5,6),2,3	3	6
				34°	(1,4,5),(2,6),3	3	6
				35°	(1,4,5),2,(3,6)	3	6
8°	(1,4),(2,5),3	3	6	36°	(1,4),(2,5),3,6	4	24
				37°	(1,4,6),(2,5),3	3	6
				38°	(1,4),(2,5,6),3	3	6
				39°	(1,4),(2,5),(3,6)	3	6

ciąg dalszy

	n=5	k	k!		n=6	k	k!
9°	(1,4),2,(3,5)	3	6	40°	(1,4),2,(3,5),6	4	24
				41°	(1,4,6),2,(3,5)	3	6
				42°	(1,4),(2,6),(3,5)	3	6
				43°	(1,4),2,(3,5,6)	3	6
10°	1,(2,4),3,5	4	24	44°	1,(2,4),3,5,6	5	120
				45°	(1,6),(2,4),3,5	4	24
				46°	1,(2,4,6),3,5	4	24
				47°	1,(2,4),(3,6),5	4	24
				48°	1,(2,4),3,(5,6)	4	24
11°	(1,5),(2,4),3	3	6	49°	(1,5),(2,4),3,6	4	24
				50°	(1,5,6),(2,4),3	3	6
				51°	(1,5),(2,4,6),3	3	6
				52°	(1,5),(2,4),(3,6)	3	6
12°	1,(2,4,5),3	3	6	53°	1,(2,4,5),3,6	4	24
				54°	(1,6),(2,4,5),3	3	6
				55°	1,(2,4,5,6),3	3	6
				56°	1,(2,4,5),(3,6)	3	6
13°	1,(2,4),(3,5)	3	6	57°	1,(2,4),(3,5),6	4	24
				58°	(1,6),(2,4),(3,5)	3	6
				59°	1,(2,4,6),(3,5)	3	6
				60°	1,(2,4),(3,5,6)	3	6
14°	1,2,(3,4),5	4	24	61°	1,2,(3,4),5,6	5	120
				62°	(1,6),2,(3,4),5	4	24
				63°	1,(2,6),(3,4),5	4	24
				64°	1,2,(3,4,6),5	4	24
				65°	1,2,(3,4),(5,6)	4	24
15°	(1,5),2,(3,4)	3	6	66°	(1,5),2,(3,4),6	4	24
				67°	(1,5,6),2,(3,4)	3	6
				68°	(1,5),(2,6),(3,4)	3	6
				69°	(1,5),2,(3,4,6)	3	6
16°	1,(2,5),(3,4)	3	6	70°	1,(2,5),(3,4),6	4	24
				71°	(1,6),(2,5),(3,4)	3	6
				72°	1,(2,5,6),(3,4)	3	6
				73°	1,(2,5),(3,4,6)	3	6
17°	1,2,(3,4,5)	3	6	74°	1,2,(3,4,5),6	4	24
				75°	(1,6),2,(3,4,5)	3	6
				76°	1,(2,6),(3,4,5)	3	6
				77°	1,2,(3,4,5,6)	3	6
18°	(1,3),2,4,5	4	24	78°	(1,3),2,4,5,6	5	120
				79°	(1,3,6),2,4,5	4	24
				80°	(1,3),(2,6),4,5	4	24
				81°	(1,3),2,(4,6),5	4	24
				82°	(1,3),2,4,(5,6)	4	24

ciąg dalszy

n=5				n=6			
		k	k!			k	k!
19°	(1,3,5),2,4	3	6	83°	(1,3,5),2,4,6	4	24
				84°	(1,3,5,6),2,4	3	6
				85°	(1,3,5),(2,6),4	3	6
				86°	(1,3,5),2,(4,6)	3	6
20°	(1,3),(2,5),4		6	87°	(1,3),(2,5),4,6	4	24
				88°	(1,3,6),(2,5),4	3	6
				89°	(1,3),(2,5,6),4	3	6
				90°	(1,3),(2,5),(4,6)	3	6
21°	(1,3),2,(4,5)	3	6	91°	(1,3),2,(4,5),6	4	24
				92°	(1,3,6),2,(4,5)	3	6
				93°	(1,3),(2,6),(4,5)	3	6
				94°	(1,3),2,(4,5,6)	3	6
22°	(1,3,4),2,5	3	6	95°	(1,3,4),2,5,6	4	24
				96°	(1,3,4,6),2,5	3	6
				97°	(1,3,4),(2,6),5	3	6
				98°	(1,3,4),2,(5,6)	3	6
23°	(1,3,4,5),2	2	2	99°	(1,3,4,5),2,6	3	6
				100°	(1,3,4,5,6),2	2	2
				101°	(1,3,4,5),(2,6)	2	2
24°	(1,3,4),(2,5)	2	2	102°	(1,3,4),(2,5),6	3	6
				103°	(1,3,4,6),(2,5)	2	2
				104°	(1,3,4),(2,5,6)	2	2
25°	(1,3),(2,4),5	3	6	105°	(1,3),(2,4),5,6	4	24
				106°	(1,3,6),(2,4),5	3	6
				107°	(1,3),(2,4,6),5	3	6
				108°	(1,3),(2,4),(5,6)	3	6
26°	(1,3,5),(2,4)	2	2	109°	(1,3,5),(2,4),6	3	6
				110°	(1,3,5,6),(2,4)	2	2
				111°	(1,3,5),(2,4,6)	2	2
27°	(1,3),(2,4,5)	2	2	112°	(1,3),(2,4,5),6	3	6
				113°	(1,3,6),(2,4,5)	2	2
				114°	(1,3),(2,4,5,6)	2	2
28°	1,(2,3),4,5	4	24	115°	1,(2,3),4,5,6	5	120
				116°	(1,6),(2,3),4,5	4	24
				117°	1,(2,3,6),4,5	4	24
				118°	1,(2,3),(4,6),5	4	24
				119°	1,(2,3),4,(5,6)	4	24
29°	(1,5),(2,3),4	3	6	120°	(1,5),(2,3),4,6	4	24
				121°	(1,5,6),(2,3),4	3	6
				122°	(1,5),(2,3,6),4	3	6
				123°	(1,5),(2,3),(4,6)	3	6

ciąg dalszy

n=5				n=6			
		k	k!			k	k!
30°	1,(2,3,5),4	3	6	124°	1,(2,3,5),4,6	4	24
				125°	(1,6),(2,3,5),4	3	6
				126°	1,(2,3,5,6),4	3	6
				127°	1,(2,3,5),(4,6)	3	6
31°	1,(2,3),(4,5)	3	6	128°	1,(2,3),(4,5),6	4	24
				129°	(1,6),(2,3),(4,5)	3	6
				130°	1,(2,3,6),(4,5)	3	6
				131°	1,(2,3),(4,5,6)	3	6
32°	(1,4),(2,3),5	3	6	132°	(1,4),(2,3),5,6	4	24
				133°	(1,4,6),(2,3),5	3	6
				134°	(1,4),(2,3,6),5	3	6
				135°	(1,4),(2,3),(5,6)	3	6
33°	(1,4,5),(2,3)	2	2	136°	(1,4,5),(2,3),6	3	6
				137°	(1,4,5,6),(2,3)	2	2
				138°	(1,4,5),(2,3,6)	2	2
34°	(1,4),(2,3,5)	2	2	139°	(1,4),(2,3,5),6	3	6
				140°	(1,4,6),(2,3,5)	2	2
				141°	(1,4),(2,3,5,6)	2	2
35°	1,(2,3,4),5	3	6	142°	1,(2,3,4),5,6	4	24
				143°	(1,6),(2,3,4),5	3	6
				144°	1,(2,3,4,6),5	3	6
				145°	1,(2,3,4),(5,6)	3	6
36°	(1,5),(2,3,4)	2	2	146°	(1,5),(2,3,4),6	3	6
				147°	(1,5,6),(2,3,4)	2	2
				148°	(1,5),(2,3,4,6)	2	2
37°	1,(2,3,4,5)	2	2	149°	1,(2,3,4,5),6	3	6
				150°	(1,6),(2,3,4,5)	2	2
				151°	1,(2,3,4,5,6)	2	2
38°	(1,2),3,4,5	4	24	152°	(1,2),3,4,5,6	5	120
				153°	(1,2,6),3,4,5	4	24
				154°	(1,2),(3,6),4,5	4	24
				155°	(1,2),3,(4,6),5	4	24
				156°	(1,2),3,4,(5,6)	4	24
39°	(1,2,5),3,4	3	6	157°	(1,2,5),3,4,6	4	24
				158°	(1,2,5,6),3,4	3	6
				159°	(1,2,5),(3,6),4	3	6
				160°	(1,2,5),3,(4,6)	3	6
40°	(1,2),(3,5),4	3	6	161°	(1,2),(3,5),4,6	4	24
				162°	(1,2,6),(3,5),4	3	6
				163°	(1,2),(3,5,6),4	3	6
				164°	(1,2),(3,5),(4,6)	3	6

dokończenie

n=5				n=6			
		k	k!			k	k!
41°	(1,2),3,(4,5)	3	6	165°	(1,2),3,(4,5),6	4	24
				166°	(1,2,6),3,(4,5)	3	6
				167°	(1,2),(3,6),(4,5)	3	6
				168°	(1,2),3,(4,5,6)	3	6
42°	(1,2,4),3,5		6	169°	(1,2,4),3,5,6	4	24
				170°	(1,2,4,6),3,5	3	6
				171°	(1,2,4),(3,6),5	3	6
				172°	(1,2,4),3,(5,6)	3	6
43°	(1,2,4,5),3	2	2	173°	(1,2,4,5),3,6	3	6
				174°	(1,2,4,5,6),3	2	2
				175°	(1,2,4,5),(3,6)	2	2
44°	(1,2,4),(3,5)	2	2	176°	(1,2,4),(3,5),6	3	6
				177°	(1,2,4,6),(3,5)	2	2
				178°	(1,2,4),(3,5,6)	2	2
45°	(1,2),(3,4),5	3	6	179°	(1,2),(3,4),5,6	4	24
				180°	(1,2,6),(3,4),5	3	6
				181°	(1,2),(3,4,6),5	3	6
				182°	(1,2),(3,4),(5,6)	3	6
46°	(1,2,5),(3,4)	2	2	183°	(1,2,5),(3,4),6	3	6
				184°	(1,2,5,6),(3,4)	2	2
				185°	(1,2,5),(3,4,6)	2	2
47°	(1,2),(3,4,5)	2	2	186°	(1,2),(3,4,5),6	3	6
				187°	(1,2,6),(3,4,5)	2	2
				188°	(1,2),(3,4,5,6)	2	2
48°	(1,2,3),4,5	3	6	189°	(1,2,3),4,5,6	4	24
				190°	(1,2,3,6),4,5	3	6
				191°	(1,2,3),(4,6),5	3	6
				192°	(1,2,3),4,(5,6)	3	6
49°	(1,2,3,5),4	2	2	193°	(1,2,3,5),4,6	3	6
				194°	(1,2,3,5,6),4	2	2
				195°	(1,2,3,5),(4,6)	2	2
50°	(1,2,3),(4,5)	2	2	196°	(1,2,3),(4,5),6	3	6
				197°	(1,2,3,6),(4,5)	2	2
				198°	(1,2,3),(4,56)	2	2
51°	(1,2,3,4),5	2	2	199°	(1,2,3,4),5,6	3	6
				200°	(1,2,3,4,6),5	2	2
				201°	(1,2,3,4),(5,6)	2	2
52°	(1,2,3,4,5)	1	1	202°	(1,2,3,4,5),6	2	2
				203°	(1,2,3,4,5,6)	1	1
	$B_5=52$		$s_5=541$		$B_6=203$		$s_6=4683$