666.

SUR UN EXEMPLE DE RÉDUCTION D'INTÉGRALES ABÉLIENNES AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. LXXXV. (Juillet—Décembre, 1877), pp. 265—268; 373, 374; 426—429; 472—475.]

JE reprends l'investigation de M. Hermite par rapport aux intégrales réductibles

$$\int \frac{(1,\, x)\, dx}{\sqrt{x \,.\, 1-x \,.\, 1+ax \,.\, 1+bx \,.\, 1-abx}},$$

publiée sous ce même titre: "Sur un exemple, etc.", (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1876).

Nous avons les constantes a, b et les variables x, y, u, v; et en posant

$$X = x \,.\, 1-x \,.\, 1+ax \,.\, 1+bx \,.\, 1-abx,$$

$$Y = y \,.\, 1-y \,.\, 1+ay \,.\, 1+by \,.\, 1-aby$$

(et $c = \sqrt{1+a \,.\, 1+b}$), M. Hermite a effectué l'intégration, par fonctions elliptiques, des équations différentielles

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{2}{c}\,(du+dv),$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{2}{c\sqrt{ab}}\,(du-dv);$$

il a en effet trouvé les expressions, au moyen des fonctions elliptiques de u, v, des fonctions symétriques $x+y$, xy, et, de là, des cinq fonctions a, b, c, d, e dont je vais parler.

Au cas d'une fonction X du sixième ordre, on a dans la théorie seize fonctions, savoir six fonctions a, b, c, d, e, f, et dix fonctions abf . cde, ..., ou (avec une notation plus simple) ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de: dans le cas d'une fonction du cinquième ordre, et ainsi dans le cas actuel, l'une des six fonctions, disons f, se réduit à l'unité, et l'on a les cinq fonctions a, b, c, d, e, et les dix fonctions ab, ..., de.

Présentement, ces fonctions sont

$$\mathrm{a} = xy,$$

$$\mathrm{b} = 1 - x \,.\, 1 - y,$$

$$\mathrm{c} = 1 + ax \,.\, 1 + ay,$$

$$\mathrm{d} = 1 + bx \,.\, 1 + by,$$

$$\mathrm{e} = 1 - abx \,.\, 1 - aby.$$

$$\mathrm{ab} = (\sqrt{x \,.\, 1 - x \,.\, 1 + ay \,.\, 1 + by \,.\, 1 - aby} - \sqrt{y \,.\, 1 - y \,.\, 1 + ax \,.\, 1 + bx \,.\, 1 - abx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{ac} = (\sqrt{x \,.\, 1 + ax \,.\, 1 - y \,.\, 1 + by \,.\, 1 - aby} - \sqrt{y \,.\, 1 + ay \,.\, 1 - x \,.\, 1 + bx \,.\, 1 - abx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{ad} = (\sqrt{x \,.\, 1 + bx \,.\, 1 - y \,.\, 1 + ay \,.\, 1 - aby} - \sqrt{y \,.\, 1 + by \,.\, 1 - x \,.\, 1 + ax \,.\, 1 - abx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{ae} = (\sqrt{x \,.\, 1 - abx \,.\, 1 - y \,.\, 1 + ay \,.\, 1 + by} - \sqrt{y \,.\, 1 - aby \,.\, 1 - x \,.\, 1 + ax \,.\, 1 + bx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{bc} = (\sqrt{1 - x \,.\, 1 + ax \,.\, y \,.\, 1 + by \,.\, 1 - aby} - \sqrt{1 - y \,.\, 1 + ay \,.\, x \,.\, 1 + bx \,.\, 1 - abx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{bd} = (\sqrt{1 - x \,.\, 1 + bx \,.\, y \,.\, 1 + ay \,.\, 1 - aby} - \sqrt{1 - y \,.\, 1 + by \,.\, x \,.\, 1 + ax \,.\, 1 - abx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{be} = (\sqrt{1 - x \,.\, 1 - abx \,.\, y \,.\, 1 + ay \,.\, 1 + by} - \sqrt{1 - y \,.\, 1 - aby \,.\, x \,.\, 1 + ax \,.\, 1 - bx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{cd} = (\sqrt{1 + ax \,.\, 1 + bx \,.\, y \,.\, 1 - y \,.\, 1 - aby} - \sqrt{1 + ay \,.\, 1 + by \,.\, x \,.\, 1 - x \,.\, 1 - abx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{ce} = (\sqrt{1 + ax \,.\, 1 - abx \,.\, y \,.\, 1 - y \,.\, 1 + by} - \sqrt{1 + ay \,.\, 1 - aby \,.\, x \,.\, 1 - x \,.\, 1 + bx})^2 \div (x - y)^2,$$

$$\mathrm{de} = (\sqrt{1 + bx \,.\, 1 - abx \,.\, y \,.\, 1 - y \,.\, 1 + ay} - \sqrt{1 + by \,.\, 1 - aby \,.\, x \,.\, 1 - x \,.\, 1 + ax})^2 \div (x - y)^2,$$

et je remarque que la différence de deux quelconques des fonctions ab, ac, ... est une fonction rationnelle et entière de x, y. On a, par exemple:

$$\mathrm{ac} - \mathrm{ad} = a - b \,.\quad 1 - ab\,xy,$$

$$\mathrm{bc} - \mathrm{bd} = a - b \,.\, -1 + ab\,(x + y) - ab\,xy,$$

$$\mathrm{be} - \mathrm{cd} = 1 + a \,.\quad 1 + b - 1 + ab\,xy,$$

$$\mathrm{ce} - \mathrm{de} = a - b \,.\, -1 + (x + y) - ab\,xy.$$

En faisant, comme auparavant, $c = \sqrt{1 + a \,.\, 1 + b}$, et puis

$$ck = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \qquad cl = \sqrt{a} - \sqrt{b},$$

$$ck' = 1 - \sqrt{ab}\,, \qquad cl' = 1 + \sqrt{ab}\,;$$

$$\sigma = \mathrm{sn}\,(u, k)\,, \qquad \sigma_1 = \mathrm{sn}\,(v, l),$$

$$\gamma = \mathrm{cn}\,(u, k)\,, \qquad \gamma_1 = \mathrm{cn}\,(v, l),$$

$$\delta = \mathrm{dn}\,(u, k)\,, \qquad \delta_1 = \mathrm{dn}\,(v, l),$$

(où j'écris sn, cn, dn pour sin am, cos am, Δ am), et, pour un moment,

$$\xi = \sqrt{ab}\,(\gamma\sigma_1\delta_1 + \gamma_1\sigma\delta), \quad \eta = c\,(-k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta), \quad \zeta = \gamma\sigma_1\delta_1 - \gamma_1\sigma\delta\,*,$$

x, y sont donnés au moyen des fonctions elliptiques σ, γ, δ, σ_1, γ_1, δ_1 de u, v par les équations

$$x + y = \frac{\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2}{\xi^2}, \quad xy = \frac{\zeta^2}{\xi^2},$$

ou, ce qui est la même chose, on a identiquement

$$\xi^2 z^2 - (\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2)\,z + \zeta^2 = \xi^2 . z - x . z - y,$$

de manière que x, y sont les racines de l'équation quadrique

$$\xi^2 z^2 - (\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2)\,z + \zeta^2 = 0.$$

On a l'identité (due à M. Hermite)

$$\begin{aligned}(Pz^3 + Qz^2 + Rz + S)^2 &- c^2\delta^2\delta_1^2\,(\sigma^2 - \sigma_1^2)^2\,Z \\ &= [\sigma^2\,(1 + az)\,(1 + bz) - c^2 z]\,[\sigma_1^2\,(1 + az)\,(1 + bz) - c^2 z] \times [\xi^2 z^2 - (\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2)\,z + \zeta^2],\end{aligned}$$

ou

$$Z = z . 1 - z . 1 + az . 1 + bz . 1 - abz\,;$$

et alors les valeurs de P, Q, R, S sont

$$\begin{aligned}
P &= -ab\sqrt{ab}\,\sigma\sigma_1\,(\gamma\sigma_1\delta_1 + \gamma_1\sigma\delta),\\
Q &= \sqrt{ab}\,\sigma\sigma_1\,[-(a + b - \sqrt{ab})\,\gamma\sigma_1\delta_1 - (a + b + \sqrt{ab})\,\gamma_1\sigma\delta] + c^2\sqrt{ab}\,(\delta\sigma_1\gamma_1 + \delta_1\sigma\gamma),\\
R &= \sigma\sigma_1\,[(a + b - \sqrt{ab})\,\gamma\sigma_1\delta_1 - (a + b + \sqrt{ab})\,\gamma_1\sigma\delta] + c^2\,(\delta\sigma_1\gamma_1 - \delta_1\sigma\gamma),\\
S &= \sigma\sigma_1\,(\gamma\sigma_1\delta_1 - \gamma_1\sigma\delta),
\end{aligned}$$

lesquelles peuvent aussi s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}
P &= -ab\sigma\sigma_1\xi,\\
Q &= -ab\sigma\sigma_1\zeta - c^2\sqrt{ab}\,\sigma\sigma_1\,(l^2\gamma\sigma_1\delta_1 + k^2\gamma_1\sigma\delta) + c^2\sqrt{ab}\,(\delta\sigma_1\gamma_1 + \delta_1\sigma\gamma),\\
R &= \sigma\sigma_1\xi + c^2\sigma\sigma_1\,(l^2\gamma\sigma_1\delta_1 - k^2\gamma_1\sigma\delta) + c^2\,(\delta\sigma_1\gamma_1 - \delta_1\sigma\gamma),\\
S &= \sigma\sigma_1\zeta,
\end{aligned}$$

et je remarque l'équation

$$\begin{aligned}P + Q + R + S &= c^3\gamma\gamma_1\,(-k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta)\\ &= c^2\gamma\gamma_1\eta.\end{aligned}$$

En écrivant successivement $z = x$, $z = y$, et en choisissant convenablement les signes des radicaux, on obtient

$$\begin{aligned}Px^3 + Qx^2 + Rx + S &= c\delta\delta_1\,(\sigma^2 - \sigma_1^2)\sqrt{X},\\ Py^3 + Qy^2 + Ry + S &= c\delta\delta_1\,(\sigma^2 - \sigma_1^2)\sqrt{Y}\,;\end{aligned}$$

on conçoit sans peine que c'est à cause de ces expressions rationnelles des radicaux que l'intégration des équations différentielles réussit.

* En écrivant

$$\xi' = \gamma\sigma_1\delta_1 + \gamma_1\sigma\delta, \quad \eta' = -k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta, \quad \zeta' = \gamma\sigma_1\delta_1 - \gamma_1\sigma\delta,$$

on a

$$\xi = \sqrt{ab}\,\xi', \quad \eta = c\eta', \quad \zeta = \zeta'\,;$$

je me sers, dans la suite, de ce symbole

$$\xi_1' = \gamma\sigma_1\delta_1 + \gamma_1\sigma\delta.$$

[Pp. 373—376*; 426—429.] Les valeurs de $x+y$, xy donnent sans beaucoup de peine celles de a, b, c, d, e; mais les réductions pour obtenir les valeurs des dix fonctions ab, ..., de sont très pénibles; je donne seulement les résultats. Ces valeurs sont

$$\sqrt{\mathrm{a}} = \frac{1}{ab\xi'} \cdot \gamma\sigma_1\delta_1 - \gamma_1\sigma\delta,$$

$$\sqrt{\mathrm{b}} = \frac{c}{\sqrt{ab}\xi'} \cdot -k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta,$$

$$\sqrt{\mathrm{c}} = \frac{c}{\sqrt{b}\xi'} \cdot l\delta\sigma_1\gamma_1 - k\delta_1\sigma\gamma,$$

$$\sqrt{\mathrm{d}} = \frac{c}{\sqrt{a}\xi'} \cdot l\delta\sigma_1\gamma_1 + k\delta_1\sigma\gamma,$$

$$\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{c}{\xi'} \cdot k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta,$$

où

$$\xi' = \gamma\sigma_1\delta_1 + \gamma_1\sigma\delta;$$

et puis

$$\sqrt{\mathrm{ab}} = \frac{c}{\xi'} \cdot \gamma\gamma_1\delta\delta_1 - k'l'\sigma\sigma_1,$$

$$\sqrt{\mathrm{ac}} = \frac{c}{\xi'(l\delta\sigma_1\gamma_1 - k\delta_1\sigma\gamma)} \cdot k(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta - l(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1,$$

$$\sqrt{\mathrm{ad}} = \frac{c}{\xi'(l\delta\sigma_1\gamma_1 + k\delta_1\sigma\gamma)} \cdot k(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta + l(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1,$$

$$\sqrt{\mathrm{ae}} = \frac{c}{\xi'(k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta)} \cdot k'(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta + l'(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1,$$

$$\sqrt{\mathrm{bc}} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{\xi'} \cdot k'\delta_1^2 + l'\delta^2 - kl(k'\sigma^2\gamma_1^2 + l'\sigma_1^2\gamma^2),$$

$$\sqrt{\mathrm{bd}} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{\xi'} \cdot k'\delta_1^2 + l'\delta^2 + kl(k'\sigma^2\gamma_1^2 + l'\sigma_1^2\gamma^2),$$

$$\sqrt{\mathrm{be}} = \frac{c}{\xi'} \cdot -\sigma\sigma_1\delta\delta_1 - \gamma\gamma_1,$$

$$\sqrt{\mathrm{cd}} = \frac{c}{\xi'} \cdot -\sigma\sigma_1\delta\delta_1 + \gamma\gamma_1,$$

$$\sqrt{\mathrm{ce}} = \frac{c}{\xi'} \cdot 1 - \frac{1+a}{c\sqrt{a}}k\sigma^2 - \frac{1+a}{c\sqrt{a}}l\sigma_1^2 + kl\sigma^2\sigma_1^2,$$

$$\sqrt{\mathrm{de}} = \frac{c}{\xi'} \cdot 1 - \frac{1+b}{c\sqrt{b}}k\sigma^2 + \frac{1+b}{c\sqrt{b}}l\sigma_1^2 - kl\sigma^2\sigma_1^2.$$

* Voir la note, p. 426 du volume.—Dans la seconde Communication (p. 373), une erreur de composition a fait placer, à la suite de la treizième ligne de la page 374, deux pages et demie de texte qui ne devaient trouver place que dans la Communication suivante. Nous rétablissons intégralement cette seconde Communication: la troisième sera insérée dans le prochain numéro.

Les valeurs de a, b, c, d, e donnent

$$\sqrt{X}\sqrt{Y} = \sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{b}}\sqrt{\mathrm{c}}\sqrt{\mathrm{d}}\sqrt{\mathrm{e}}$$

$$= \frac{c^4}{(ab)^2\,\xi'^5}(\gamma\sigma_1\delta_1 - \gamma_1\sigma\delta)(-k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta)$$

$$\times (l\delta\sigma_1\gamma_1 - k\delta_1\sigma\gamma)(l\delta\sigma_1\gamma_1 + k\delta_1\sigma\gamma)(k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta),$$

$$= \frac{c^4}{(ab)^2\,\xi'^6}(\gamma^2\sigma_1^2\delta_1^2 - \gamma_1^2\sigma^2\delta^2)(-k'^2\sigma^2\gamma_1^2\delta_1^2 + l'^2\sigma_1^2\gamma^2\delta^2)(l^2\delta^2\sigma_1^2\gamma_1^2 - k^2\delta_1^2\sigma^2\gamma^2);$$

j'ai vérifié que le signe s'accorde avec celui de la valeur obtenue au moyen des expressions rationnelles de $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$.

On vérifie en partie les valeurs des fonctions $\sqrt{\mathrm{ab}}$, $\sqrt{\mathrm{ac}}, \ldots$, en considérant les différences des carrés de ces fonctions; mais ce calcul n'est pas toujours facile. Par exemple, nous avons

$$\mathrm{ac} - \mathrm{ad} = (a-b)(1 - ab\,xy)$$

$$= \frac{c^2kl}{\xi'^2}(\xi'^2 - \zeta^2)$$

$$= \frac{4c^2kl}{\xi'^2}\sigma\sigma_1\gamma\gamma_1\delta\delta_1;$$

et cette valeur doit ainsi être égale à

$$\frac{c^2}{\xi'^2}\left\{\frac{1}{(l\delta\sigma_1\gamma_1 - k\delta_1\sigma\gamma)^2}\left[k(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta - l(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1\right]^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(l\delta\sigma_1\gamma_1 + k\delta_1\sigma\gamma)^2}\left[k(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta + l(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1\right]^2\right\}.$$

Pour voir cela, j'écris pour le moment

$$A = k(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta, \qquad B = l(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1,$$

$$\alpha = l\delta\sigma_1\gamma_1, \qquad \beta = k\delta_1\sigma\gamma;$$

l'équation devient ainsi

$$4kl\sigma\sigma_1\gamma\gamma_1\delta\delta_1(\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha+\beta)^2(A-B)^2 - (\alpha-\beta)^2(A+B)^2,$$

$$= 4\left[\alpha\beta(A^2 + B^2) - AB(\alpha^2 + \beta^2)\right];$$

or, en remarquant que AB et $\alpha\beta$ contiennent chacun le facteur $kl\,\sigma\sigma_1\,\gamma\gamma_1\,\delta\delta_1$, cette équation devient

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 = k^2(l'^2 + l^2\gamma_1^4)^2\sigma^2\gamma^2\delta^2 + l^2(k'^2 + k^2\gamma^4)^2\sigma_1^2\gamma_1^2\delta_1^2$$

$$- (l'^2 + l^2\gamma_1^4)(k'^2 + k^2\gamma_1^4)(l^2\delta^2\sigma_1^2\gamma_1^2 + k^2\delta_1^2\sigma^2\gamma^2),$$

c'est-à-dire

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 = \left[k^2(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma^2\gamma^2 - l^2(k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1^2\gamma_1^2\right]\left[(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\delta^2 - (k'^2 + k^2\gamma^4)\delta_1^2\right];$$

or les deux facteurs à droite se réduisant l'un et l'autre à

$$k^2\sigma^2\gamma^2\delta_1{}^2 - l^2\sigma_1{}^2\gamma_1{}^2\delta^2,$$

c'est-à-dire à $(\alpha^2 - \beta^2)$, la vérification est ainsi complétée.

La différence be − cd donne un exemple beaucoup plus simple; on a

$$\begin{aligned} \text{be} - \text{cd} &= 1 + a\,.\,1 + b\,(-1 + ab\,xy) \\ &= \frac{c^2}{\xi'^2}(-\xi'^2 + \zeta^2) \\ &= \frac{c^2}{\xi'^2}(-4\sigma\sigma_1\gamma\gamma_1\delta\delta_1)\,; \end{aligned}$$

l'équation à vérifier est ainsi

$$-4\sigma\sigma_1\gamma\gamma_1\delta\delta_1 = (-\sigma\sigma_1\delta\delta_1 - \gamma\gamma_1)^2 - (-\sigma\sigma_1\delta\delta_1 + \gamma\gamma_1)^2,$$

ce qui est juste.

[Pp. 472—475.] Je donne quelques autres formules dont je me suis servi dans le cours de cette recherche. Partant des expressions de ξ, η, ζ, on a

$$\begin{aligned} d\xi = \lambda du + \lambda_1 dv = \sqrt{ab}\,\{ &\quad [-\sigma\delta\sigma_1\delta_1 + \gamma\gamma_1(1 - 2k^2\sigma^2)]\,du \\ &+ [\gamma\gamma_1(1 - 2l^2\sigma_1{}^2) - \sigma\sigma_1\delta\delta_1 \quad]\,dv\}, \\ d\eta = \mu du + \mu_1 dv = c\,\{ &\quad [-k'\gamma\delta\gamma_1\delta_1 + l'\sigma\sigma_1(-1 - k^2 + 2k^2\sigma^2)]\,du \\ &+ [k'\sigma\sigma_1(1 + l^2 - 2l^2\sigma_1{}^2) + l'\gamma\delta\gamma_1\delta_1 \quad]\,dv\}, \\ d\zeta = \nu du + \nu_1 dv = \quad \{ &\quad [-\sigma\delta\sigma_1\delta_1 - \gamma\gamma_1(1 - 2k^2\sigma^2)]\,du \\ &+ [\gamma\gamma_1(1 - 2l^2\sigma_1{}^2) + \sigma\delta\sigma_1\delta_1 \quad]\,dv\}\,; \end{aligned}$$

en prenant pour A, B, C des fonctions telles que

$$A\,d\xi + B\,d\eta + C\,d\zeta = du + dv,$$

on a

$$\begin{aligned} A\lambda \ + B\mu \ + C\nu \ &= 1, \\ A\lambda_1 + B\mu_1 + C\nu_1 &= 1. \end{aligned}$$

Je pose aussi

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0,$$

et au moyen de ces équations, j'obtiens pour A, B, C les valeurs

$$\begin{aligned} A\nabla &= \frac{1}{2\sqrt{ab}}(-U + W), \\ B\nabla &= \frac{1}{2c}V, \\ C\nabla &= \tfrac{1}{2}(-U - W), \end{aligned}$$

où

$$U = l'\delta^2(\delta\sigma_1\gamma_1 + \delta_1\sigma\gamma) + k'\sigma^2\gamma_1^2(l^2\delta\sigma_1\gamma_1 + k^2\delta_1\sigma\gamma),$$
$$W = k'\delta_1^2(\delta\sigma_1\gamma_1 + \delta_1\sigma\gamma) + l'\sigma_1^2\gamma^2(l^2\delta\sigma_1\gamma_1 + k^2\delta_1\sigma\gamma),$$
$$V = 2[(l'^2 + l^2\gamma_1^4)\sigma\gamma\delta + (k'^2 + k^2\gamma^4)\sigma_1\gamma_1\delta_1],$$
$$\nabla = (k'\sigma\gamma_1\delta_1 + l'\sigma_1\gamma\delta)(l\delta\sigma_1\gamma_1 - k\delta_1\sigma\gamma)(l\delta\sigma_1\gamma_1 + k\delta_1\sigma\gamma);$$

et de là aussi

$$-U + W = -\frac{2\sqrt{ab}}{c}(\delta\delta_1\gamma\gamma_1 - k'l'\sigma\sigma_1)(\gamma\sigma_1\delta_1 + \gamma_1\sigma\delta),$$

$$U + W = \frac{2}{c}(\{1 + l^2\sigma^2\sigma_1^2 - \sqrt{ab}[(1 + k'l')\sigma^2 - l^2\sigma_1^2]\}\delta\sigma_1\gamma_1$$
$$+ \{1 - k^2\sigma^2\sigma_1^2 + \sqrt{ab}[(1 + k'l')\sigma_1^2 - k^2\sigma^2]\}\delta_1\sigma\gamma).$$

En admettant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{2}{c}(du + dv),$$

on obtient sans peine les relations

$$A\xi = \frac{c}{x-y}\left(\frac{x^2-x}{\sqrt{X}} - \frac{y^2-y}{\sqrt{Y}}\right),$$
$$B\frac{\xi^2}{\eta} = \frac{c}{x-y}\left(\frac{x}{\sqrt{X}} - \frac{y}{\sqrt{Y}}\right),$$
$$C\frac{\xi^2}{\zeta} = \frac{c}{x-y}\left(\frac{-x+1}{\sqrt{X}} - \frac{-y+1}{\sqrt{Y}}\right),$$

et, en multipliant par

$$c^2\delta\delta_1(\sigma^2 - \sigma_1^2)\sqrt{XY}, \quad = \frac{c^4ab\eta\zeta\delta\delta_1(\sigma^2 - \sigma_1^2)}{\xi^5}\nabla,$$

et dans les seconds membres, au lieu de

$$c^2\delta\delta_1(\sigma^2 - \sigma_1^2)\sqrt{X}, \quad c^2\delta\delta_1(\sigma^2 - \sigma_1^2)\sqrt{Y},$$

substituant les valeurs

$$Px^3 + Qx^2 + Rx + S, \quad Py^3 + Qy^2 + Ry + S,$$

on obtient, après quelques réductions simples, les équations

$$c^4ab\delta\delta_1(\sigma^2 - \sigma_1^2)\nabla A = ab\sigma\sigma_1\xi\eta\zeta - \sigma\sigma_1\xi^2\eta + c^2\gamma\gamma_1\xi^2\zeta,$$
$$\text{,,} \qquad \nabla B = ab\sigma\sigma_1\zeta(\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2) + \sigma\sigma_1\xi^3 - Q\xi\zeta,$$
$$\text{,,} \qquad \nabla C = ab\sigma\sigma_1\eta(-2\xi^2 - \zeta^2 + \eta^2) + Q\xi\eta - c^2\gamma\gamma_1\xi^3,$$

lesquelles satisfont, comme cela doit être, à la condition

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Réciproquement, en vérifiant ces identités, ce qui est assez pénible, on obtient une démonstration de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{2}{c}(du + dv).$$

En écrivant, pour plus de simplicité,

$$A\nabla = -\frac{1}{c}\mathfrak{A}'\xi', \quad B\nabla = \frac{1}{c}\mathfrak{B}, \quad C\nabla = -\frac{1}{c}\mathfrak{C},$$

les valeurs de $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \gamma\gamma_1\delta\delta_1 - k'l'\sigma\sigma_1,\\
\mathfrak{B} &= (l'^2 + l^2\gamma^4)\,\sigma\gamma\delta + (k'^2 + k^2\gamma^4)\,\sigma_1\gamma_1\delta_1,\\
\mathfrak{C} &= \{1 - l^2\sigma^2\sigma_1{}^2 - \sqrt{ab}\,[(1 + k'l')\,\sigma^2 - l^2\sigma_1{}^2]\}\,\delta\sigma_1\gamma_1\\
&\quad + \{1 - k^2\sigma^2\sigma_1{}^2 + \sqrt{ab}\,[(1 + k'l')\,\sigma_1{}^2 - k^2\sigma^2]\}\,\delta_1\sigma\gamma\,;
\end{aligned}$$

et des trois équations pour $A\xi$, $B\dfrac{\xi^2}{\eta}$, $C\dfrac{\xi^2}{\zeta}$, on déduit

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathfrak{A}'}{\sqrt{ab}} + B\eta\zeta &= \Omega\left(\frac{x^2}{\sqrt{X}} - \frac{y^2}{\sqrt{Y}}\right),\\
B\zeta &= \Omega\left(\frac{x}{\sqrt{X}} - \frac{y}{\sqrt{Y}}\right),\\
-\mathfrak{C}\eta + B\zeta &= \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{1}{\sqrt{Y}}\right),
\end{aligned}$$

où

$$\Omega = \frac{c^2\nabla\,\eta\zeta}{ab\xi'\,(x-y)}\,;$$

et c'est au moyen de ces équations que j'ai trouvé les valeurs ci-dessus données pour $\sqrt{\mathrm{ab}}$, $\sqrt{\mathrm{ac}}, \ldots$; on a, par exemple,

$$\sqrt{\mathrm{ab}} = \frac{\sqrt{X}\sqrt{Y}}{\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{b}}\,(x-y)}\left(\frac{x - x^2}{\sqrt{X}} - \frac{y - y^2}{\sqrt{Y}}\right) = \frac{\sqrt{X}\sqrt{Y}}{\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{b}}\,(x-y)\,\Omega}\,\frac{\mathfrak{A}'\eta\zeta}{\sqrt{ab}},$$

ce qui se réduit sans peine à $\sqrt{\mathrm{ab}} = \dfrac{c}{\xi'}\mathfrak{A}'$. Les dix fonctions contiennent de cette manière les facteurs suivants:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\mathrm{ab}}, \quad \mathfrak{A}',\\
&\sqrt{\mathrm{ac}}, \quad (1 + a)\,\mathfrak{B} - \sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathfrak{A}'\eta,\\
&\sqrt{\mathrm{ad}}, \quad (1 + b)\,\mathfrak{B} - \sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathfrak{A}'\eta,\\
&\sqrt{\mathrm{ae}}, \quad (1 - ab)\,\mathfrak{B} + \sqrt{ab}\,\mathfrak{A}'\eta,\\
&\sqrt{\mathrm{bc}}, \quad -\mathfrak{C} + \sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathfrak{A}'\zeta,
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\mathrm{bd}},\quad -\mathfrak{C}+\sqrt{\frac{b}{a}}\mathfrak{A}'\zeta',$$

$$\sqrt{\mathrm{be}},\quad -\mathfrak{C}-\sqrt{ab}\,\mathfrak{A}'\zeta,$$

$$\sqrt{\mathrm{cd}},\quad \frac{1}{c}(-\sqrt{ab}\,\eta\zeta\mathfrak{A}'+c^2\mathfrak{B}\zeta-\mathfrak{C}\eta),$$

$$\sqrt{\mathrm{ce}},\quad \frac{1}{c}[a\sqrt{ab}\,\eta+\mathfrak{A}'\zeta(1+a)(1-ab)\mathfrak{B}\zeta-\mathfrak{C}\eta],$$

$$\sqrt{\mathrm{de}},\quad \frac{1}{c}[b\sqrt{ab}\,\eta\zeta\mathfrak{A}'+(1+b)(1-ab)\mathfrak{B}\zeta-\mathfrak{C}\eta]:$$

mais il y a des dénominateurs variables qui contiennent des facteurs dont quelques-uns divisent les numérateurs, et la réduction aux formes ci-dessus données m'a coûté assez de peine.