LXIV.

1891. 7. 22. Herrn Dr. H. Minkowski, Privatdoc. an d. Univ. Bonn*).

... Erst in den letzten Wochen habe ich Zeit gefunden mich eingehend mit dem höchst wichtigen Satze zu beschäftigen, welchen Sie auf der ersten Seite Ihres an Herrn Hermite gerichteten Briefes aussprechen. Der Beweis, den ich hierbei für diesen Satz gefunden habe, stimmt vermuthlich gänzlich mit dem Ihrigen überein. Er beruht wesentlich darauf, daß die Function

$$\varphi(x, y \ldots) = \left\{\text{abs.}\, \xi^p + \text{abs.}\, \eta^p + \cdots\right\}^{\frac{1}{p}}$$

die Eigenschaft

$$\varphi(x' - x'', y' - y'' \ldots) \leqq \varphi(x', y' \ldots) + \varphi(x'', y'' \ldots)$$

hat, und daß durch jede vorgeschriebene endliche obere Grenze von $\varphi(x, y \ldots)$ auch alle Variabelen $x, y \ldots$ in endliche Grenzen eingeschlossen werden; bedeutet M den Minimumwerth, welchen $\varphi(x, y \ldots)$ für irgend welche ganze rationale Zahlen $x, y \ldots$ erreichen kann, die nicht alle verschwinden, so folgt hieraus leicht, daß das über das Gebiet $\varphi(x, y \ldots) < \frac{1}{2}M$ erstreckte Integral $\iint \ldots \partial x \partial y \ldots \leqq 1$ sein muß, und die Ermittelung des Integrals giebt Ihren Satz....

Beweise zu meinem Briefe (1891. 7. 22) an H. Minkowski.

Nennt man jede Folge $\mathfrak{p}$ von n bestimmten reellen Werten $x, y, z \ldots$ einen Punkt, und jene Werte die Koordinaten von $\mathfrak{p}$, bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{p}' \pm \mathfrak{p}''$ die beiden Punkte, deren Koordinaten aus denen von $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ durch Addition und Subtraktion

*) [Die Briefe an Minkowski und Lipschitz sind ebenso wie die verschiedenen in den Erläuterungen zitierten Briefstellen eigenhändigen Abschriften von Dedekind entnommen. E. N.]

gebildet sind, so wollen wir eine reelle Punkt-Funktion $\varphi(\mathfrak{p})$ betrachten, welche durchweg der Bedingung

$$(1) \qquad \varphi(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}'') \leqq \varphi(\mathfrak{p}') + \varphi(\mathfrak{p}'')$$

genügt und außerdem die Eigenschaft (2) besitzt, daß durch jede vorgeschriebene endliche obere Grenze von $\varphi(\mathfrak{p})$ auch alle Koordinaten von $\mathfrak{p}$ in endliche Grenzen eingeschlossen werden.

Setzt man in (1) für $\mathfrak{p}''$ den Nullpunkt 0, dessen Koordinaten alle verschwinden, so folgt $\varphi(0) \geqq 0$, und wenn man für $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ einen und denselben beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ setzt, so folgt

$$\varphi(\mathfrak{p}) \geqq \tfrac{1}{2}\varphi(0) \geqq 0.$$

Aus (2) ergibt sich folgendes. Versteht man unter einem Gitterpunkt jeden Punkt $\mathfrak{g}$, dessen Koordinaten ganze rationale Zahlen sind, und wählt man nach Belieben einen von Null verschiedenen Gitterpunkt $\mathfrak{g}'$, so sind zufolge (2) die Koordinaten aller Punkte $\mathfrak{p}$, welche der Bedingung $\varphi(\mathfrak{p}) \leqq \varphi(\mathfrak{g}')$ genügen, in endliche Grenzen eingeschlossen, und folglich befindet sich unter diesen Punkten $\mathfrak{p}$ nur eine endliche Anzahl solcher Gitterpunkte $\mathfrak{g}''$, die von Null verschieden sind wie $\mathfrak{g}'$; bezeichnet man mit M den kleinsten der ihnen entsprechenden Werte $\varphi(\mathfrak{g}'')$, so ist offenbar M überhaupt der kleinste von allen Werten $\varphi(\mathfrak{g})$, die allen von Null verschiedenen Gitterpunkten $\mathfrak{g}$ entsprechen (ob $\varphi(0)$ ebenfalls $\geqq M$ ist oder nicht, möge dahingestellt bleiben).

Bedeutet nun $\mathfrak{A}$ das Gebiet aller derjenigen Punkte $\mathfrak{a}$, welche der Bedingung

$$\varphi(\mathfrak{a}) < \tfrac{1}{2} M$$

genügen, so besteht der in dem Briefe von mir ausgesprochene Satz darin, daß das über das Gebiet $\mathfrak{A}$ erstreckte n-fache Integral

$$A = \iint \ldots \partial x \partial y \ldots \leqq 1$$

ist (der Satz hat natürlich nur dann Wert, wenn das Gebiet $\mathfrak{A}$ existiert und ein von Null verschiedenes Integral A erzeugt).

Der Beweis beruht lediglich auf folgender Eigenschaft des Gebietes $\mathfrak{A}$: Bedeutet, wenn $\mathfrak{p}$ ein bestimmter Punkt ist, das Zeichen $\mathfrak{p} + \mathfrak{A}$ den Inbegriff aller Punkte $\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$, welche allen Punkten $\mathfrak{a}$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ entsprechen, so haben, wenn $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ zwei verschiedene Gitterpunkte sind, die beiden Gebiete $\mathfrak{g}' + \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{g}'' + \mathfrak{A}$ keinen gemeinschaftlichen Punkt. Dies folgt unmittelbar aus (1); wäre nämlich $\mathfrak{g}' + \mathfrak{a}' = \mathfrak{g}'' + \mathfrak{a}''$, wo $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ Punkte in $\mathfrak{A}$ bedeuten, so wäre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'' - \mathfrak{g}' = \mathfrak{a}' - \mathfrak{a}''$ ein von Null verschiedener Gitterpunkt, und da $\varphi(\mathfrak{a}')$ und $\varphi(\mathfrak{a}'') < \frac{1}{2}M$, so wäre zufolge (1)

$$\varphi(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}'') \leqq \varphi(\mathfrak{a}') + \varphi(\mathfrak{a}'') < M,$$

was im Widerspruch mit der Definition von M steht.

Aus dieser Eigenschaft des Gebietes $\mathfrak{A}$ und daraus, daß zufolge (2) die Koordinaten aller Punkte $\mathfrak{a}$ absolut kleiner als eine endliche positive Konstante a sind, ergibt sich unser Satz auf folgende einfache Weise. Es sei k eine beliebige natürliche Zahl, so konstruieren wir für jeden der $(2k+1)^n$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}$, deren Koordinaten absolut $\leqq k$ sind, das Gebiet $\mathfrak{g} + \mathfrak{A}$, dessen Inhalt das von $\mathfrak{g}$ unabhängige Integral A ist. Konstruiert man ferner das Gebiet $\mathfrak{P}$ aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten absolut $\leqq k + a$ sind, und dessen Inhalt $= (2k + 2a)^n$ ist, so bildet die Gesamtheit jener Gebiete $\mathfrak{g} + \mathfrak{A}$, von denen je zwei keinen gemeinsamen Punkt haben, einen echten Teil von $\mathfrak{P}$, und folglich ist

$$(2k+1)^n A < (2k+2a)^n, \quad A < \left(\frac{2k+2a}{2k+1}\right)^n;$$

da A und a feste Größen sind, während k beliebig groß gewählt werden darf, so folgt $A \leqq 1$, w. z. b. w. . . .

[Von hier an läuft der Beweis im wesentlichen wie bei Minkowski, Geometrie der Zahlen. Der im Vorstehenden wiedergegebene Satz ist aber allgemeiner als der bei Minkowski zugrunde liegende, da Mittelpunkts- und Homogenitätsvoraussetzung durch schwächere Voraussetzungen ersetzt sind. E. N.]