Aus dem Nachlaß.

LX.

Im Hause des Prof. Hoeck, in Gegenwart von Hoeck, Gauß, Weber, Waitz.

Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik.

(Gehalten am 30. Juni 1854.)

Es ist zuerst erforderlich, einige Worte über den Sinn dieser Überschrift zu sagen.

Diese Vorlesung hat nicht etwa, wie man vielleicht die Überschrift deuten könnte, die Einführung einer bestimmten Klasse neuer Funktionen in die Mathematik, sondern vielmehr allgemein die Art und Weise zum Gegenstande, wie in der fortschreitenden Entwicklung dieser Wissenschaft neue Funktionen, oder, wie man ebensowohl sagen kann, neue Operationen zu der Kette der bisherigen hinzugefügt werden. Es ist leicht zu sehen, daß in dieser Auffassung das gewählte Thema eine Eigentümlichkeit bei dem systematischen Aufbau der Mathematik betrifft, eine Eigentümlichkeit, welche in mehr oder weniger ähnlicher Weise wohl in allen Wissenschaften wiederkehren wird. Möge es mir daher vergönnt sein, einige allgemeine Bemerkungen vorauszuschicken, um dann auf die Mathematik und zuletzt auch auf sehr spezielle Teile derselben zurückzukommen.

Findet man die Hauptaufgabe einer jeden Wissenschaft in dem Streben nach Ergründung der Wahrheit, und zwar der Wahrheit, die entweder ganz außer uns, oder doch, wenn sie sich auf uns bezieht, nicht unsre willkürliche Schöpfung, sondern eine von unserm Zutun unabhängige Notwendigkeit ist, so erklärt man damit die letzten Resultate, das letzte Ziel, dem man sich allerdings meist nur annähern kann, für unwandelbar, für unveränderlich. Dagegen ist die Wissenschaft selbst, welche den Gang der menschlichen Erkenntnis bis zu diesen Resultaten hin repräsentiert, einer unendlichen Mannigfaltigkeit, unendlich verschiedener Darstellung fähig, weil sie als das Werk des Menschen seiner Willkür unterworfen und von allen Unvollkommenheiten seiner geistigen Kräfte mit getroffen ist. Für einen mit unbegrenztem Verstande begabten Menschen, dem die letzten von uns durch eine lange Kette von Schlüssen erhaltenen Konsequenzen unmittelbar evidente Wahrheiten wären, würde eigentlich keine Wissenschaft mehr existieren, wenn er auch den Objekten derselben genau ebenso gegenüberstände, wie wir es tun. Diese Verschiedenheit der Auffassung des Gegenstands einer Wissenschaft findet ihren Ausdruck in den verschiedenen Formen, den verschiedenen Systemen, in welche man sie einzurahmen sucht. Dies zeigt sich überall. So in den beschreibenden Naturwissenschaften bei der Gruppierung, der Klassifikation des Materials. Je nach der größern oder geringern Wichtigkeit, welche der Naturforscher einem Merkmal, als einem zur Unterscheidung und Klassifikation geeigneten Begriffe, beilegt, erhebt er denselben zu einem Haupteinteilungsgrunde, oder benutzt ihn nur zur Bezeichnung unwesentlicher Verschiedenheiten. So streiten in der Mineralogie die Systeme miteinander, von denen das eine sich auf die chemische Konstitution der Mineralkörper, das andre auf ihre kristallographische, morphologische, Beschaffenheit stützt, ohne daß es bis jetzt gelungen wäre, beide miteinander in vollständige Harmonie zu setzen. Jedes dieser Systeme hat ein großes Recht für sich, weil die Wissenschaft weiterhin selbst lehrt, daß die ähnlichen Körper sich so am natürlichsten zusammengruppieren. Aber es wird keinem Mineralogen einfallen, etwa die Farbenverschiedenheiten als die charakteristischsten Merkmale hervorzuheben und eine hierauf beruhende Einteilung allen andern vorzusetzen. A priori ließe sich natürlich kein Grund dagegen angeben; aber die Erfahrung lehrt in dem weitern Fortgange der Forschung, daß die Farbe für die wahre Natur der Körper nicht von ebenso hoher Bedeutung ist als die vorher angeführten Merkmale, oder um mich so auszudrücken, sie lehrt, daß man mit diesem Merkmal nicht so sicher, so wirksam operieren kann, wie mit den andern. Die Einführung eines solchen Begriffs, als eines Motivs für die Gestaltung des Systems, ist gewissermaßen eine Hypothese, welche man an die innere Natur der Wissenschaft stellt; erst im weitern Verlauf antwortet sie auf dieselbe; die größere oder geringere Wirksamkeit eines solchen Begriffs bestimmt seinen Wert oder Unwert.

Ähnliches wiederholt sich in der Rechtswissenschaft; bei dem Versuch, teils die Rechtsverhältnisse, teils die Rechte selbst zu systematisieren, d. h. einige derselben als logische Konsequenzen andrer darzustellen, bildet der Systematiker gewisse Begriffe, z. B. die der Rechtsinstitute, welche als Definitionen in die Wissenschaft eintreten, und mit deren Hilfe er imstande ist, die aus der unendlichen Mannigfaltigkeit des Einzelnen erkennbaren allgemeinen Wahrheiten auszusprechen. Diese Wahrheiten wirken aber selbst wieder auf die Bildung der Definitionen zurück. So zeigt sich wohl, daß die aus irgendeinem Motive eingeführten Begriffe, weil sie anfangs zu beschränkt oder zu weit gefaßt waren, einer Abänderung bedürfen, um ihre Wirksamkeit, ihre Tragweite auf ein größeres Gebiet erstrecken zu können. Dieses Drehen und Wenden der Definitionen, den aufgefundenen Gesetzen oder Wahrheiten zuliebe, in denen sie eine Rolle spielen, bildet die größte Kunst des Systematikers.

Es ist wohl überflüssig, analoge Verhältnisse in noch andern Wissenschaften nachzuweisen; daß die weitere Entwicklung einer jeden Wissenschaft immer wieder auf das System, durch welches man ihren Organismus aufzufassen sucht, neubildend zurückwirkt, ist nicht allein eine historische Tatsache, sondern beruht auch auf einer innern Notwendigkeit.

Auch die Mathematik, von der man behauptet, daß sie von allen Wissenschaften sich der größten Evidenz erfreue, macht keine Ausnahme von diesem allgemeinen Gesetze, wenn auch es sich in ihr auf ganz andre Weise zeigt wie in andern. Auch *ihre* Definitionen treten anfangs notwendig in beschränkter Form auf, und erst durch weitere Entwicklung ergibt sich die Verallgemeinerung derselben. Aber, und dadurch unterscheidet sich die Mathematik rücksichtlich dieses Verhältnisses von andern Wissenschaften, diese Erweiterungen der Definitionen lassen der Willkür keinen Raum mehr, sondern sie folgen mit zwingender Notwendigkeit aus den frühern beschränkten, wenn man dabei den Grundsatz anwendet, Gesetze, welche aus den anfänglichen Definitionen hervorgehen und charakteristisch für die durch sie bezeichneten Begriffe sind, als *allgemeingültig* anzusehen; dann werden umgekehrt diese Gesetze die Quelle der verallgemeinerten Definitionen, wenn man fragt: Wie muß die allgemeine Definition gefaßt werden, damit dem gefundenen charakteristischen Gesetze stets Genüge geschieht? — Dieses Prinzip der Induktion an einigen Beispielen durchzuführen, ist jetzt meine Absicht.

Die Elementararithmetik geht aus von der Bildung der Ordinal- und Kardinalzahlen; der sukzessive Fortschritt von einem Gliede der

Reihe der absoluten ganzen Zahlen zu dem nächstfolgenden ist die erste und einfachste Operation der Arithmetik; auf ihr fußen alle andern. Faßt man die mehre Male hintereinander wiederholte Ausführung dieser Elementaroperation in einen einzigen Akt zusammen, so gelangt man zum Begriffe der Addition. Aus diesem bildet sich auf ähnliche Weise der der Multiplikation, aus diesem der der Potenzierung. Aber die so gegebenen Definitionen dieser Grundoperationen genügen der weitern Entwicklung der Arithmetik nicht mehr, und zwar aus dem Grunde, weil sie die Zahlen, mit denen sie operieren lehrt, auf ein sehr kleines Gebiet beschränkt annimmt. Die Forderung der Arithmetik nämlich, durch jede dieser Operationen das gesamte vorhandene Zahlgebiet jedesmal von neuem zu erzeugen, oder mit andern Worten: die Forderung der unbedingten Ausführbarkeit der indirekten, umgekehrten Operationen, der Subtraktion, Division usw., führt auf die Notwendigkeit, neue Klassen von Zahlen zu schaffen, da mit der ursprünglichen Reihe der absoluten ganzen Zahlen dieser Forderung kein Genüge geleistet werden kann. So erhält man die negativen, gebrochenen, irrationalen und endlich auch die sog. imaginären Zahlen. Nachdem nun auf diese Weise das Zahlengebiet erweitert ist, wird es notwendig, die Operationen, deren Wirksamkeit bis dahin nur für die absolute ganze Zahlenreihe bestimmt war, von neuem zu definieren, um sie auch auf die neugeschaffenen Zahlen anwenden zu können. Und diese Erweiterungen der Definitionen sind nicht willkürlich, sobald man das oben ausgesprochene allgemeine Prinzip befolgt, nämlich die Gesetze, welchen die Operationen in ihrer beschränkten Auffassung gehorchten, für allgemeingültig erklärt, und daraus umgekehrt die Bedeutung der Operationen für die neuen Zahlengebiete ableitet.

Ein bestimmtes Beispiel liefert hier schon die Multiplikation, welche zuerst aus der Forderung hervorgeht, eine mehre Male wiederholte Ausführung derselben Operation nächst niederer Ordnung, nämlich der Addition eines bestimmten positiven oder negativen Addenden, des sog. Multiplikanden, in einem einzigen Akt zusammenzufassen. Der Multiplikator, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oft die Addition des Multiplikand wiederholt gedacht werden soll, ist daher anfangs notwendig eine absolute ganze Zahl; ein negativer Multiplikator würde nach dieser ersten Definition der Multiplikation durchaus keinen Sinn geben. Es bedarf daher einer besondern Definition, um auch negative Multiplikatoren zuzulassen, und auf diese Weise die Operation von der anfänglichen Beschränkung zu befreien; eine solche involviert aber a priori vollständige Willkürlichkeit, und es würde sich erst später entscheiden, ob denn die so beliebig gewählte Definition der Arithmetik einen wesentlichen Nutzen brächte; und glückte es auch, so könnte man dies doch immer nur ein zufälliges Erraten, ein glückliches Zutreffen nennen, von welchem eine wissenschaftliche Methode sich frei halten soll. Statt dessen wenden wir ein allgemeines Prinzip an. Man muß untersuchen, welchen Gesetzen das Produkt unterworfen ist, wenn der Multiplikator sukzessive dieselben Veränderungen erleidet, durch welche überhaupt aus der absoluten ganzen Zahlenreihe die der negativen erzeugt wurde. Dazu genügt allein schon die Bestimmung der Veränderung, welche das Produkt erleidet, wenn man mit dem Multiplikator die einfachste Zahlenoperation vornimmt, nämlich ihn in die nächstfolgende Zahl übergehen läßt; durch sukzessive Wiederholung dieser Operation erhält man das bekannte Additionstheorem für den Multiplikator: um eine Zahl mit einer Summe zu multiplizieren, hat man sie mit jedem Summanden zu multiplizieren und dann diese Partialprodukte zu addieren, und hieraus ergibt sich unmittelbar ein Subtraktionstheorem für den Fall, daß der Minuend größer als der Subtrahend ist. Erklärt man nun diese Gesetze für allgemeingültig, also auch für den Fall, wo die Differenz, welche den Multiplikator darstellt, negativ wird, so erhält man hieraus die Definition der Multiplikation mit negativen Multiplikatoren; und es ist dann natürlich kein Zufall mehr, daß das allgemeine Gesetz, dem die Multiplikation gehorcht, für beide Fälle genau dasselbe ist.

In ähnlicher Weise will ich auch noch zeigen, wie sich auf diesem Wege die Definition der Potenzierung vervollständigt. Die sukzessive Wiederholung derselben Multiplikation, also die Bildung eines Produkts aus einer bestimmten Anzahl gleicher, jetzt rationaler, Faktoren, gibt, als eine einzige Operation aufgefaßt, den Begriff der Potenzierung; wieder aber zeigt sich, daß die bestimmende Zahl, welche angibt, wieviel solcher Faktoren gesetzt werden, und welche man den Exponenten der Potenz nennt, nur eine absolute ganze Zahl sein kann, wenn die geforderte Operation Sinn haben soll. Potenzen mit andern Exponenten als absoluten ganzen Zahlen bedürfen wieder einer neuen Definition; statt eine solche aber willkürlich zu wählen, muß man vielmehr untersuchen, wie man sie zu bestimmen habe, um die aus der ursprünglichen Definition folgenden Gesetze allgemeingültig zu machen. Man muß daher dieselbe Methode anwenden, und nach den Veränderungen fragen, welche die Potenz erleidet, wenn man den Exponenten den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division unterwirft, solange der so veränderte Exponent immer noch eine absolute ganze Zahl bleibt. Sind die hierin herrschenden Gesetze erkannt, so liefern sie umgekehrt die verallgemeinerten Definitionen, wenn man die Forderung stellt, daß diese Gesetze maßgebend für den Charakter der Potenzierung überhaupt sein sollen. Dies alles erreicht man durch den einzigen aus der Definition unmittelbar einleuchtenden Satz, daß durch abermalige Hinzufügung desselben Faktors der Exponent der erhaltenen Potenz in die nächstfolgende Zahl übergeht, wodurch die Bedeutung der einfachsten mit dem Exponenten vorgenommenen Operation, welche zugleich die Quelle aller folgenden ist, für die Potenz aufgefunden ist. Durch sukzessive Wiederholung dieser Veränderung ergibt sich ein Additionstheorem für den Exponenten, welches, wenn es als allgemein gültig angenommen wird, sukzessive die Definitionen der Potenzen mit jedem beliebigen rationalen Exponenten liefert. Aus dem Satze, daß eine Potenz, deren Exponent die Summe zweier absoluten ganzen Zahlen ist, gleich dem Produkte zweier Potenzen derselben Basis ist, deren Exponenten diese beide Zahlen sind, läßt sich ein Subtraktionstheorem ableiten, in welchem die Potenz mit einem Exponenten, welcher als Differenz auftritt, auf den Quotienten der beiden Potenzen reduziert wird, deren Exponenten resp. Minuend und Subtrahend jener Differenz sind, vorausgesetzt, daß ersterer größer als letzterer ist. Behält man aber diesen Satz als einen allgemein geltenden bei, so ergibt sich daraus unmittelbar die Definition der Potenzen mit dem Exponenten Null und negativen Exponenten. Damit ist die erste Erweiterung gefunden. Um nun auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten zu kommen, muß man zuerst, was leicht geschieht, aus dem erwähnten Additionstheorem das Gesetz ableiten, daß einer Multiplikation des Exponenten eine gleichhohe Potenzierung der Potenz entspricht, woraus sogleich einleuchtet, daß jede Division eines Exponenten zuerst verlangt, die eine Umkehrung der ursprünglichen Operation der Potenzierung auszuführen, nämlich eine gegebene Zahl in eine gleichfalls gegebene Anzahl gleicher Faktoren zu zerlegen. Man wird bei dieser Aufgabe abermals auf neue Zahlengebiete geführt, indem das bisherige der Forderung der allgemeinen Ausführbarkeit der arithmetischen Operationen nicht mehr Genüge leistet; man ist dadurch gezwungen, die irrationalen Zahlen, mit welchen zugleich der Begriff der Grenze auftritt, und endlich auch die imaginären Zahlen zu schaffen. Diese Fortschritte sind so unermeßlich, daß es schwer zu entscheiden ist, welche der vielen verschiedenen Bahnen, die sich hier auftun, man zuerst betreten soll. Aber das leuchtet ein, will man die Operationen der Arithmetik, wie sie bis dahin entwickelt sind, auf diese neuen Klassen von Zahlen anwenden, so sind abermals Erweiterungen der frühern Definitionen erforderlich, und hier, wenigstens mit dem Auftreten der imaginären Zahlen, beginnen die Hauptschwierigkeiten der systematischen Arithmetik. Indessen ist wohl zu hoffen, daß man durch beharrliche Anwendung des Grundsatzes, sich auch hier keine Willkürlichkeit zu erlauben, sondern immer durch die gefundenen Gesetze selbst sich weiterleiten zu lassen, zu einem wirklich festen Gebäude der Arithmetik gelangen wird. Bis jetzt ist bekanntlich eine vorwurfsfreie Theorie der imaginären, geschweige denn der neuerdings von Hamilton erdachten Zahlen entweder nicht vorhanden, oder doch wenigstens noch nicht publiziert.

Ein dem letzten aus der Lehre von den Potenzen genommenen Beispiele durchaus verwandtes liefert ferner die geometrische Theorie der Winkelfunktionen, ich meine hier die Entwicklung der Definitionen von den mit den Namen Kosinus und Sinus belegten Begriffen. Mögen sie nun als Verhältnisse der Katheten zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks definiert werden, dessen Winkel ihre Argumente sind, oder, was im Grunde doch dasselbe ist, als Linien in einem Kreise, dessen Radius der Einheit gleich ist: immer sind auch diese Definitionen anfangs beschränkt, nämlich auf spitze Winkel, oder wenigstens erscheint die Art und Weise, wie sie bisweilen von vornherein allgemeiner gefaßt werden, durchaus willkürlich. In einigen Lehrbüchern findet sich folgendes Verfahren, um diese Funktionen zu verallgemeinern. Es wird ein Kreis mit dem Radius $= 1$ beschrieben und nach einem festen Punkt der Peripherie ein Radius gezogen. Denkt man sich nun einen beweglichen Radius, so beschreibt dieser von dem festen ausgehend nach der einen Seite hin positive, und nach der andern Richtung negative Winkel, und wir wollen wenigstens annehmen, es wäre die Berechtigung zu dieser Einführung negativer Winkel nachgewiesen. Dann ist das von dem Endpunkt des beweglichen Radius auf den festen gefällte Lot der Sinus, und das zwischen dem Fußpunkte dieses Lots und dem Mittelpunkte des Kreises liegende Stück des festen Radius der Kosinus des beschriebenen Winkels. Aus der verschiedenen Lage, welche diese beiden Linien annehmen, wird dann gefolgert, daß Sinus und Kosinus für gewisse Intervalle negativ werden. Diese Art und Weise zu folgern, muß natürlich verworfen werden, solange nicht allgemein nachgewiesen ist, daß entgegengesetzten Richtungen stets entgegengesetzte Zeichen entsprechen, was in dieser Allgemeinheit jedenfalls nicht möglich, weil es nicht richtig ist. Außerdem beruht aber diese ganze Ableitung darauf, daß jenes Lot vom Endpunkte des beweglichen Radius auf den festen gefällt wird, und sie verliert sogleich auch ihre letzte Kraft, sobald man statt dessen das Lot vom Endpunkte des festen Schenkels auf den beweglichen fällt, wogegen sich keine Erinnerung machen läßt, da das eine ebenso natürlich wie das andre ist.

Sodann wird durch eine geometrische Konstruktion ein Fundamentalsatz bewiesen, durch welchen Sinus und Kosinus einer Summe zweier Winkel auf die Sinus und Kosinus dieser Winkel selbst reduziert werden; aber diese Konstruktion wird meist nur für den Fall ausgeführt, daß alle 3 vorkommenden Winkel spitz sind, und entweder hält man es für selbstverständlich und nicht für der Mühe wert, zu beweisen, daß dieser Satz für alle Fälle gültig ist, welche Werte man auch den Winkeln beilegen mag, oder wenn dieser Mangel gefühlt wird, so fällt ein solcher Nachweis außerordentlich umständlich aus. Freilich bleibt es immer interessant zu sehen, daß bei den einmal angenommenen Definitionen der Satz zufällig auf alle Fälle paßt. Ich sage zufällig, denn anders kann man es nicht nennen; während man mit leichter Mühe einen konsequenten und natürlichen Weg entdecken kann, um zu denselben Resultaten zu gelangen. Man bedarf wirklich nur der Definitionen von Sinus und Kosinus spitzer Winkel; und wenn für diese das genannte Additionstheorem nachgewiesen ist, so liefert dasselbe, wenn es zu einem allgemeinen Gesetz erhoben wird, auf dem einfachsten Wege die erweiterten Definitionen mit zwingender Notwendigkeit. Denn läßt man den einen der beiden Winkel einem Rechten gleich werden, während der andre beliebig spitz bleibt, so erhält man die Definitionen für die goniometrischen Funktionen von stumpfen Winkeln; gibt man dann in demselben

Satze dem einen Winkel den Wert von 2 Rechten und läßt den andern das Gebiet der konkaven Winkel durchlaufen, so erhält man die Bedeutung des Sinus und Kosinus von Winkeln bis zur Größe von 4 Rechten, und wenn man so fortfährt, erhebt man sich leicht zur allgemeinen Definition für die positiven und auch auf analoge Weise durch Subtraktion zu der für negative Winkel. Das Gesetz lehrt auch hier, wie man den Begriff fassen soll, auf daß er am wirksamsten werde.

Diese Beispiele werden genügen, um die Eigentümlichkeit des Fortschritts von Begriffen, die sich nur auf ein beschränktes Gebiet beziehen, zu allgemeinern in der Mathematik nachzuweisen. In allen diesen Fällen blieb aber die ursprüngliche Definition für das beschränkte Gebiet unangetastet stehen. In einigen Teilen der Mathematik kommt es aber auch vor, daß diese ursprünglichen Definitionen durchaus aufgegeben werden müssen, um andern Platz zu machen. Ein solcher Fall tritt in der höhern Mathematik ein. Die Operation des Differentiierens lehrt auf bestimmte Weise aus gegebenen Funktionen die sogenannten derivierten Funktionen zu bilden, und die Integration wird anfänglich definiert als die Umkehrung der Differentiation, als die Operation, durch welche der Übergang von den derivierten Funktionen zu den ursprünglichen bewerkstelligt wird. Man kann aber hier nicht mit demselben Recht von vornherein die allgemeine Ausführbarkeit der Integration verlangen, wie früher die Umkehrung der Operationen der Elementararithmetik. Denn hier handelt es sich nicht direkt um numerische Resultate, um eine eigentliche Rechnung, vielmehr soll eine Form gefunden werden, welche der mechanischen Operation des Differentiierens unterworfen die gegebene Form wiedergibt. Bei dieser rein formellen Auffassung des Differentiierens und Integrierens wäre die allgemeine Ausführbarkeit der Integration durchaus problematisch. Aber bei der eigentlichen Erforschung der Beziehungen zwischen Differential und Integral stellt sich ein von diesem formellen Ausdruck völlig befreiter Zusammenhang heraus, welcher in der Art reziprok ist, daß er stets sowohl den Übergang vom Integral zum Differential wie den umgekehrten als möglich erweist. Der dabei notwendige Begriff der Grenze darf hier um so weniger einen Anstoß erregen und etwa die Meinung aufkommen lassen, daß diese Operationen als unausführbar zu verwerfen wären, als dieser, wie schon oben bemerkt, sich mit Notwendigkeit selbst in die Elementararithmetik eindrängt.

Dann aber, wenn man ihr diese Bedeutung, nämlich den Grenzwert einer Summe einer immer größer werdenden Anzahl immer kleinerer Teile zu bilden, als allgemeine Definition unterlegt, tritt die Operation des Integrierens in vollkommener Selbständigkeit und Unabhängigkeit von der Differentialrechnung auf, ohne indessen den frühern Zusammenhang mit dieser zu verlieren. Von welcher Bedeutung und Fruchtbarkeit diese Auffassung der Integralrechnung als einer selbständigen Operation gewesen ist und auch noch ferner sein wird, das lehrt die Geschichte der neuern Mathematik. Ich brauche nur an die Theorie der Eulerschen Integrale und Elliptischen Funktionen zu erinnern, die ja beide ihren ersten Keim in der Tat in der Integralrechnung gefunden haben. Aber interessant ist es zu sehen, daß auch bei diesen neu eingeführten Funktionen ein ähnlicher Entwicklungsgang sich bemerkbar gemacht hat wie in den oben angeführten Beispielen aus der Elementararithmetik. Die erstern, die sogenannten Γ-Funktionen, wurden als bestimmte Integrale definiert, und aus dieser Definition entwickelte man die Gesetze, denen sie gehorchten; allein diese Definition beschränkte sich nur auf das reelle positive Zahlengebiet, wenigstens hört die Wirksamkeit dieser Funktion schon für jeden negativen Wert des Arguments auf, da sie dann stets unendlich groß wird. Seitdem man aber gefunden hat, daß diese Funktion Γ für alle positiven Werte ihres Arguments mit einer Funktion Π, welche als unendliches Produkt definiert wird und für alle andern Werte gleichfalls eine veränderliche, wenn auch an bestimmten Stellen unendlich werdende Funktion bleibt, identisch ist, wird man natürlich die frühere Definition verlassen und in ein Theorem verwandeln, und statt dessen die Funktion Π als die Hauptfunktion definieren.

Etwas Ähnliches hat sich mit den Elliptischen Funktionen ereignet. Während man früher die Integralrechnung als die wahre Quelle der Theorie dieser Funktionen ansah — und in der Tat war sie es auch bis auf die neueste Zeit —, macht sich jetzt das Bestreben geltend, ihnen eine selbständigere Stellung zu verschaffen, dadurch, daß man entweder von unendlichen Reihen oder von unendlichen Produkten ausgeht. Es ist indessen hier unmöglich, weiter auf die sukzessiven Umgestaltungen dieser noch immer sich weiter entwickelnden Theorie einzugehen; schon erfordert es ein bedeutendes Studium, sich in Besitz dieser neuen Ideen zu setzen; viel weniger fühle ich mich der Aufgabe gewachsen, sie von einem sichern Standpunkt aus einer Kritik zu unterwerfen, und ich breche daher hiermit meinen Vortrag ab, indem ich nur noch hinzufügen will, daß durch einen merkwürdigen Zufall vor wenigen Stunden mir ein soeben erschienenes Buch von Prof. Apelt zugegangen ist, welches, nach einem flüchtigen Anblick zu urteilen, nicht nur eine allgemeine Theorie der Induktion, sondern auch spezielle Anwendungen derselben auf die Mathematik zu geben versucht.

[Dedekind erwähnt diesen Habilitationsvortrag im Vorwort zur ersten Auflage von „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (LI dieser Ausgabe), wo er über die Bedeutung der Schöpfung und Einführung neuer Begriffe spricht. E. N.]