DÉMONSTRATION

DU

THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI

PAR

P. MANSION

Professeur à l'Université de Gand

THÉORÈME. *La somme* P *des valeurs de* $T_m = C_\mu^m p^m q^m$, *où* m *est compris entre* $\mu p - \mu l$, $\mu p + \mu l$, μ *étant égal à* $m + n$ *et au moins égal à dix,* p *et* q *des quantités positives telles que* $p + q = 1$, $p \leqq q$, *l'inférieur ou égal à* $\frac{1}{2} q$, $\mu \leqq \frac{1}{q^2}$, *est supérieure à*

l inférieur

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2}\, dt - \frac{3}{\sqrt{2\pi\mu pq}}, \qquad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

et a l'unité pour limite quand μ *croît indéfiniment* (*).

(*) Nous avons publié une esquisse de la présente démonstration dans les AKTEN DES FÜNFTEN INTERNATIONALEN KONGRESSES KATHOLISCHER GELEHRTEN ZU München von 24. bis 28. september 1900 (München, 1901, Herder und Co.) pp. 427 et 428. Laplace (*Théorie analytique des probabilités,* Livre II, n° 16, pp. 275-284 de la troisième édition) donne des limites plus rapprochées que les nôtres, mais il n'a pas vraiment évalué les termes qu'il néglige. Il se contente de dire (p. 279) : „ Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$ et des ordres supérieurs „. En réalité, ce n'est pas du tout facile.

1. *Formules analytiques employées dans la démonstration.* I. Si α est une quantité positive inférieure à l'unité, on a

$$(1) \qquad \log(1+\alpha) = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \cdots,$$

$$(2) \qquad -\log(1-\alpha) = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^4}{4} + \cdots,$$

On déduit de (1), (2),

$$(3) \qquad \log(1+\alpha) > \alpha - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha) > \frac{\alpha}{2},$$

$$(4) \qquad -\log(1-\alpha) < \alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1+\alpha+\alpha^2+\ldots) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Enfin, quel que soit α, θ étant compris entre 0 et 1,

$$(5) \qquad e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2} e^{-\theta\alpha} > 1 - \alpha.$$

II. Si N est un nombre entier, on a, d'après la formule de Stirling, sous sa forme élémentaire,

$$(6) \qquad 1.2.3\ldots N > \sqrt{2\pi N}\; N^N e^{-N},$$

$$(7) \qquad 1.2.3\ldots N < \sqrt{2\pi N}\; N^N e^{-N+\frac{1}{12N}}.$$

III. En faisant $t^2 = z$, on trouve aisément que

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2} t^4\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^z z^{\frac{3}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

IV. Si z_x est une fonction de x décroissante depuis $x = 0$ jusque $x = N + 1$, N étant entier, on a évidemment

$$(9) \qquad z_0 + z_1 + \cdots + z_N > \int_0^{N+1} z_x\, dx.$$

V. Enfin, puisque $q \gtreqless \frac{1}{2}$, $\mu \gtreqless \frac{1}{q^2}$, $p \gtreqless q$, on a

(10) $$\mu q \gtreqless \frac{1}{q} \gtreqless 2, \qquad \mu p \gtreqless \mu q \gtreqless 2,$$

même sans supposer μ au moins égal à 10.

2. *On a*

$$\mathrm{T}_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left[1 - \frac{1}{6\mu\, pq}\right] t_m, \quad \text{si} \quad t_m = \left(\frac{m}{\mu p}\right)^{-m-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu q}\right)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

En effet, d'après les inégalités (6) et (7),

$$C_\mu^m = \frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} > \frac{\sqrt{2\pi\mu}\,\mu^\mu\,e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi\,m}\,m^m\,e^{-m}\sqrt{2\pi\,n}\,n^n\,e^{-n}\,.\,e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}},$$

ou

$$C_\mu^m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu}}\,\frac{1}{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^{n+\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\mu}{12mn}}}.$$

Par suite,

$$\mathrm{T}_m = C_\mu^m p^m q^n > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\,\frac{1}{\left(\frac{m}{\mu p}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{\mu q}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{\mu}{12mn}}.$$

Mais, d'après (5), on a

$$e^{-\frac{\mu}{12mn}} > 1 - \frac{\mu}{12mn}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{T}_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left(1 - \frac{\mu}{12mn}\right) t_m.$$

Le produit mn des deux quantités m et n, dont la somme est la constante μ, est d'autant plus petit que $m - n$ ou $n - m$ est plus grand. La valeur la plus petite de mn correspondra donc à l'une ou l'autre des valeurs extrêmes que peuvent prendre m et n, savoir, au plus, $\mu p + \mu l$, $\mu p - \mu l$ pour m, $\mu q - \mu l$, $\mu q + \mu l$ pour n. Or

$$(\mu p + \mu l)(\mu q - \mu l) = \mu^2 [pq - (p - q) l - l^2],$$

$$(\mu p - \mu l)(\mu q + \mu l) = \mu^2 [pq + (p - q) l - l^2].$$

Le produit $12mn$ est donc égal ou supérieur à

$$12 (\mu p + \mu l)(\mu q - \mu l) = 12\mu^2 (p + l)(q - l).$$

Le produit $12 (p + l)(q - l)$ est aussi d'autant plus petit que la différence $p - q + 2l$ entre les deux facteurs $p + l$, $q - l$ est plus grande. Or, la plus grande valeur que puisse prendre l est $\frac{1}{2} q$. Par suite,

$$12 (p + l)(q - l) \geqq 12\left(p + \frac{1}{2} q\right)\left(q - \frac{1}{2} q\right)$$
$$= 3 (1 + p) q > 3 . 2p . q = 6pq.$$

On a donc

$$1 - \frac{\mu}{12mn} > 1 - \frac{\mu}{12\mu^2 (p + l)(q - l)} > 1 - \frac{1}{6\mu pq},$$

et enfin

$$T_m > \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu pq}} \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right) t_m.$$

3. *On a* $t_{\mu p + 1} < t_{\mu p}$ *ou* 1. En effet, posons, en général,

$$t_m = e^{-u},$$

$$u = \left(m + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{m}{\mu p}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{n}{\mu q}\right).$$

Si l'on fait

$$m = \mu p + x, \qquad n = \mu q - x,$$

on a

$$u = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right).$$

Pour $x = 1$, on trouve

$$u_1 = \left(\mu p + \frac{3}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{\mu p}\right) + \left(\mu q - \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{1}{\mu q}\right),$$

et, d'après les inégalités (3) et (4),

$$u_1 > \left(\mu p + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu p} - \frac{1}{2\mu^2 p^2}\right) - \left(\mu q - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\mu q} + \frac{1}{2\mu^2 q^2\left(1 - \frac{1}{\mu q}\right)}\right]$$

$$= 1 + \frac{3}{2\mu p} - \frac{1}{2\mu p} - \frac{3}{4}\frac{1}{\mu^2 p^2} - 1 + \frac{1}{2\mu q} - \frac{1}{2(\mu q - 1)} + \frac{1}{4\mu q(\mu q - 1)}$$

$$= \frac{1}{\mu p} - \frac{3}{4}\frac{1}{\mu^2 p^2} - \frac{1}{4\mu q(\mu q - 1)}$$

$$= \frac{3}{4\mu p}\left(1 - \frac{1}{\mu p}\right) + \frac{1}{4\mu}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q(\mu q - 1)}\right].$$

D'après (10), μp est supérieur à 1, et $1 - \dfrac{1}{\mu p}$ est positif. On a aussi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q(\mu q - 1)} \geqq 0.$$

En effet, d'après (10) encore, $\mu q - 1$ est positif. La précédente inégalité peut donc s'écrire successivement

$$q(\mu q - 1) - p \geqq 0, \qquad \mu q^2 - p - q \geqq 0,$$

$$\mu q^2 \geqq 1,$$

ce qui est conforme à l'une des hypothèses de l'énoncé du théorème.

On a donc

$$u_1 > 0, \quad e^{-u_1} < 1, \quad \text{ou} \quad t_{\mu p+1} < t_{\mu p}.$$

4. *La fonction $t_{\mu p+x}$ a un seul maximum, soit pour $x = 0$, soit pour une valeur comprise entre $x = 0$ et $x = p$.* De l'égalité

$$u = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right),$$

on déduit, par dérivation,

$$u' = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + x} - \frac{1}{\mu q - x}\right),$$

$$u'' = \frac{1}{\mu p + x}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu p + x}\right) + \frac{1}{\mu q - x}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu q - x}\right).$$

Si x est positif, même pour $x = \mu l$ et $l = \frac{1}{2}q$, $2\,(\mu q - x) = 2\mu q - \mu q = \mu q$ est égal ou supérieur à 2; donc u'' est une quantité positive. Si x est négatif, même pour sa valeur extrême, $x = -\mu l = -\frac{1}{2}\mu q$, $2\,(\mu p + x) = 2\mu p - \mu q$ est égal ou supérieur à μp, lui-même égal ou supérieur à 2 d'après (10); donc u'' est encore une quantité positive. Par suite, u' est une fonction croissante.

Si $p = q = 1$, pour $x = 0$, $u' = 0$; u', qui croît sans cesse, passe donc du négatif au positif pour $x = 0$; u a son minimum en $x = 0$, et $t_{\mu p} = e^{-u}$ a sa valeur maxima, savoir 1, aussi pour $x = 0$.

Si p est supérieur à q, on a, pour $x = 0$,

$$u' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p} - \frac{1}{\mu q}\right) < 0.$$

Pour $x = p$, on trouve après quelques transformations,

$$u' = \log\left(1 + \frac{1}{\mu q - p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + p} - \frac{1}{\mu q - p}\right).$$

Donc, d'après (3),

$$u' > \frac{1}{2}\frac{1}{\mu q - p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + p} - \frac{1}{\mu q - p}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu p + p} > 0.$$

Ainsi u' passe du négatif au positif, quand x varie de 0 à p; u a donc un minimum et $t_{\mu p + x} = e^{-u}$, un maximum pour une valeur X de x comprise entre 0 et p.

Remarque (*). *La valeur maxima de $t_{\mu p + x}$ est inférieure à $\sqrt{e}$, supérieure à* 1, *quand p est $> q$*. En effet, la valeur minima de u, correspondant à $x = \mathrm{X}$, s'obtiendrait en éliminant X entre les relations

$$u_{minima} = \left(\mu p + \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{\mathrm{X}}{\mu p}\right) + \left(\mu q - \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\mu q}\right),$$

c'est-à-dire

$$u_{\mathrm{x}}' = 0 = \log\left(1 + \frac{\mathrm{X}}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + \mathrm{X}} - \frac{1}{\mu q - \mathrm{X}}\right).$$

L'élimination complète est impraticable, mais en éliminant $\log\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\mu q}\right)$ entre les équations, il vient

$$u_{minima} = (\mu p + 1)\log\left(1 + \frac{\mathrm{X}}{\mu p}\right) - \frac{1}{2}\left(\mu q - \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - \mathrm{X}} - \frac{1}{\mu p + \mathrm{X}}\right) > -\frac{1}{2}\left(\mu q - \mathrm{X} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - \mathrm{X}} - \frac{1}{\mu p + \mathrm{X}}\right).$$

(*) La démonstration du théorème de Bernoulli ne repose nullement sur cette remarque curieuse, mais, comme on le voit, assez difficile à démontrer.

Je dis que l'on a

$$\left(\mu q - X + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\mu q - X} - \frac{1}{\mu p + X}\right) < 1.$$

En effet, cette inégalité, après quelques transformations, devient

$$\mu p + 4\mu q X + 2X(1 - X) < 2\mu^2 q^2 + \mu q.$$

On a $\mu q^2 \geqq 1$, ou $\mu q^2 = 1 + \alpha$, α étant positif ou nul; $X < p$ a pour conséquence $4\mu q X < 4\mu pq < 4\mu . \frac{1}{4}$ ou μ, et, par suite, $4\mu q X = \mu - \beta$, β étant positif; $X(1 - X)$ est inférieure à $\frac{1}{4}$ ou de la forme $\frac{1}{4} - \gamma$, γ étant positif. L'inégalité à vérifier peut s'écrire

$$\mu p + \mu - \beta + \frac{1}{2} - 2\gamma < 2\mu(1 + \alpha) + \mu q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} < 2\mu q + 2\mu\alpha + \beta + 2\gamma.$$

Mais on a, d'après la formule (10), $\mu q \geqq 2$. Donc l'inégalité devient

$$\frac{1}{2} < 4 + 2\mu\alpha + \beta + 2\gamma,$$

laquelle est évidente.

Il en résulte que la valeur minima de u surpasse $-\frac{1}{2}$, la valeur maxima de $-u$ est inférieure à $\frac{1}{2}$, et, par suite, celle de $t_{\mu p + x}$ est inférieure à $\sqrt{e}$.

Dans le cas actuel où μ est $> q$, elle surpasse d'ailleurs $t_{\mu p}$ ou 1, puisque X n'est pas nul.

5. *Transformation de la somme des t_m et des T_m.* Si μp est entier, les valeurs de m à considérer dans $P = ST_m$ sont, $E(x)$ désignant le plus grand entier contenu dans x,

$$\mu p \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu p + 1, \quad \mu p + 2, \quad \ldots, \quad \mu p + E(\mu l) \\ \mu p - 1, \quad \mu p - 2, \quad \ldots, \quad \mu p - E(\mu l) \end{array} \right\}.$$

Dans ce cas,

$$St_m = t_{\mu p} + \mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}] > \mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}].$$

Si μp n'est pas entier, il y aura entre μp et $\mu p + 1$ un seul entier r. On aura

$$t_r > t_{\mu p+1},$$

puisque la fonction $t_{\mu p+x}$ a sa valeur minima, pour $x = 1$, dans l'intervalle de $x = 0$, à $x = 1$, d'après les nos 3 et 4.

On devra donc donner à m les valeurs

$$r \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} r + 1, \quad r + 2, \quad r + 3, \quad \text{etc.} \\ r - 1, \quad r - 2, \quad r - 3, \quad \text{etc.} \end{array} \right\}$$

comprises entre $\mu p - \mu l$, $\mu p + \mu l$.

La fonction t_m décroît de part et d'autre à partir de sa valeur maxima comprise entre $t_{\mu p}$ et $t_{\mu p+p}$; donc

$$\begin{array}{ll} t_{r-1} > t_{\mu p-1}, & t_r > t_{\mu p+1}, \\ t_{r-2} > t_{\mu p-2}, & t_{r+1} > t_{\mu p+2}, \\ t_{r-3} > t_{\mu p-3}, \text{ etc.} & t_{r+2} > t_{\mu p+3}, \text{ etc.} \end{array}$$

Par suite, la somme de tous les t_m à considérer sera supérieure à

$$\mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}].$$

On a donc aussi

$$\begin{aligned} P &> \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\, St_m \\ &> \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \mathop{S}_{x=1}^{x=E(\mu l)} [t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x}]. \end{aligned}$$

6. *Transformation de la dernière somme.* Posons

$$y_x^2 = t_{\mu p+x} \times t_{\mu p-x}.$$

La moyenne arithmétique de deux quantités est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique (*). On a donc

$$t_{\mu p+x} + t_{\mu p-x} \geqq 2y_x,$$

$$P > \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right) \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mathrm{E}(\mu l)} y_x.$$

Soit

$$y_x^2 = e^{-v},$$

de sorte que

$$v = \left(\mu p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) + \left(\mu p - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)$$
$$+ \left(\mu q + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) + \left(\mu q - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right).$$

On trouve, en dérivant deux fois par rapport à x,

$$v' = \log\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu p + x} - \frac{1}{\mu p - x}\right)$$
$$+ \log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu q + x} - \frac{1}{\mu q - x}\right);$$

$$v'' = \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu p - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu p + x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu p - x)^2}$$
$$+ \frac{1}{\mu q + x} + \frac{1}{\mu q - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu q + x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu q - x)^2}.$$

(*) Nous avons déjà fait connaître cette transformation dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1892, t. XVI, 1re partie, pp. 85-87, ou dans nos *Mélanges mathématiques* (1883-1898), pp. 79-80.

La dérivée v'' est inférieure au second membre où l'on ne laisse que les termes positifs. On a donc

$$v'' < \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu p - x} + \frac{1}{\mu q + x} + \frac{1}{\mu q - x}$$

$$= \frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} + \frac{2\mu q}{\mu^2 q^2 - x^2}.$$

Or

$$\frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} = \frac{2}{\mu p} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{\mu^2 p^2}} = \frac{2}{\mu p}\left[1 + \frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{x^4}{\mu^4 p^4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{\mu p} + \frac{2x^2}{\mu^3 p^3}\left[1 + \frac{x^2}{\mu^2 p^2} + \frac{x^4}{\mu^4 p^4} + \cdots\right].$$

Puisque x a tout au plus la valeur μl égale ou inférieure à $\frac{1}{2}\mu p$, de sorte que $\frac{x^2}{\mu^2 p^2}$ est égale ou inférieure à $\frac{1}{4}$, on a

$$\frac{2\mu p}{\mu^2 p^2 - x^2} \leqq \frac{2}{\mu p} + \frac{2x^2}{\mu^3 p^3}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right] = \frac{2}{\mu p} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3}.$$

De même,

$$\frac{2\mu q}{\mu^2 q^2 - x^2} \leqq \frac{2}{\mu q} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 q^3}.$$

Par suite,

$$v'' > \frac{2}{\mu p} + \frac{2}{\mu q} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 q^3} = \frac{2}{\mu p q} + \frac{8}{3}\frac{x^2(p^3 + q^3)}{\mu^3 p^3 q^3},$$

et, puisque $p^3 + q^3$ est inférieur à $(p+q)^3 = 1$,

$$v' < \frac{2}{\mu p q} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}.$$

On déduit de là, en intégrant deux fois de 0 à x,

$$v' < \frac{2x}{\mu pq} + \frac{8}{9}\,\frac{x^3}{\mu^3 p^3 q^3}, \qquad v < \frac{x^2}{\mu pq} + \frac{2}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3},$$

puis,

$$-\frac{v}{2} > -\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3},$$

$$y_x = e^{-\frac{v}{2}} > e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}},$$

et, d'après (5),

$$y_x > z_x,$$

si l'on pose

$$z_x = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}\right).$$

Si l'on introduit z_x à la place de y_x dans l'inégalité relative à P donnée au début de ce numéro, elle devient

$$\mathrm{P} > \left(1 - \frac{1}{6\mu pq}\right)\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}} \mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mu l} z_x.$$

Pour $x = 0$, $z_0 = 1$; pour x croissant, z_x décroît. On a donc, d'après la formule (9), en observant d'ailleurs que $\mathrm{E}(\mu l) + 1$ surpasse μl,

$$z_0 + \mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mathrm{E}(\mu l)} z_x > \int_0^{\mathrm{E}(\mu l)+1} z_x\,dx > \int_0^{\mu l} z_x\,dx,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=1}^{x=\mathrm{E}(\mu l)} z_x > \int_0^{\mu l} z_x\,dx - 1.$$

Donc enfin

$$\mathrm{P} > \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right]\frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\left\{\int_0^{\mu l} z_x\,dx - 1\right\}.$$

7. *Première estimation de la limite inférieure de* P. On a

$$\int_0^{\mu l} z_x\,dx = \int_0^{\mu l} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}\right) dx$$

$$> \int_0^{\mu l} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx - \frac{1}{9}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,\frac{x^4}{\mu^3 p^3 q^3}\,dx.$$

Posons

$$\frac{x^2}{2\mu pq} = t^2, \qquad \frac{\mu^2 l^2}{2\mu pq} = \mathrm{T} \quad \text{ou} \quad \mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

La première intégrale du second membre de la dernière égalité deviendra

$$\sqrt{2\mu pq}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt.$$

La seconde prendra la forme

$$\frac{4}{9\mu pq}\sqrt{2\mu pq}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,t^4\,dt,$$

et est égale, d'après la formule (8), à

$$\frac{4}{9\mu pq}\sqrt{2\mu pq}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\pi} = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}{\mu pq}.$$

Donc enfin

$$\int_0^{\mu l} z_x dx > \sqrt{2\mu pq}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}{\mu pq}.$$

Il en résulte, pour P, d'après la dernière formule du n° 6, la relation

$$\mathrm{P} > \left[1 - \frac{1}{6\mu pq}\right]\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi\,\mu pq}}\right\}$$

et, *à fortiori*,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi \mu pq}}.$$

Or, on a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Donc enfin,

$$P > \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{1}{3\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi \mu pq}},$$

ou

$$P > \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2\mu pq} - \frac{2}{\sqrt{2\pi \mu pq}}.$$

8. *Seconde estimation de la limite inférieure de* P. Si μ est au moins égal à 10, on a

$$\frac{1}{2\mu pq} < \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu pq}}.$$

En effet, cette inégalité équivaut à la suivante :

$$\pi < 2\mu pq.$$

Or, d'après (10), $\mu q = 2 + \delta$, δ étant positif ou nul, $p = 1 - q$ $= 1 - \frac{2+\delta}{\mu}$. Par suite, l'inégalité à vérifier devient

$$\pi < 2\,(2+\delta)\left(1 - \frac{2+\delta}{\mu}\right) = 2\mu.\ \frac{2+\delta}{\mu}\left(1 - \frac{2+\delta}{\mu}\right).$$

Le produit du second membre est minimum quand les deux derniers facteurs diffèrent le plus possible. La différence entre ces deux facteurs est $1 - 2\frac{2+\delta}{\mu}$ dont la valeur maxima correspond à $\delta = 0$. Alors $q = \frac{2}{\mu}$, $p = 1 - \frac{2}{\mu}$, et l'on a

$$2\mu pq = 4\left(1 - \frac{2}{\mu}\right).$$

Cette dernière expression, pour $\mu \geqq 10$ (hypothèse dont nous ne nous servons qu'ici) a une valeur égale ou supérieure à $4\left(1 - \frac{2}{10}\right)$ ou $3\frac{1}{5}$, donc supérieure à π. On a donc

$$\frac{1}{2\mu pq} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

et, par suite, la dernière inégalité du n° précédent donne

$$\mathrm{P} > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\, dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}}.$$

9. *Théorème de Jacques Bernoulli.* On a évidemment

$$\mathrm{P} < (p+q)^{\mu} = 1.$$

Pour μ croissant indéfiniment, T croît aussi indéfiniment; on déduit des inégalités

$$1 > \mathrm{P} > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\, dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}}$$

pour $\mu = \infty$,

$$\lim \mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = 1,$$

c'est-à-dire le théorème de Jacques Bernoulli.

Note sur la valeur approchée de $t_{\mu p \pm x}$

Dans les traités de Calcul des probabilités, on admet que l'on a très approximativement, pour de grandes valeurs de μ,

$$t_{\mu p + x} = t_{\mu p - x} = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

Nous allons chercher une limite supérieure et une limite inférieure de ces expressions afin de voir jusqu'à quel point est justifiée l'approximation dont il vient d'être question.

I. *Limites de* $\left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Les valeurs extrêmes de $\frac{x}{\mu p}$, $\frac{x}{\mu q}$ sont 0 et $\frac{1}{2}$, cette dernière valeur correspondant au cas où $2x = p = q = 2l$. Cherchons quelle valeur on peut donner à j et k dans la double égalité

$$1 - j\epsilon \lesseqgtr (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \lesseqgtr 1 - k\epsilon$$

ϵ, quantité inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$, représentant $\frac{x}{\mu p}$ ou $\frac{x}{\mu q}$.

La première inégalité devient successivement

$$1 \gtreqless (1 + \epsilon)(1 - 2j\epsilon + j^2\epsilon^2) = 1 + \epsilon(1 - 2j) + \epsilon^2(-2j + j^2) + j^2\epsilon^3$$

$$0 \gtreqless 1 - 2j + j\epsilon(-2 + j) + j^2\epsilon^2 = 1 - 2j - j\epsilon(2 - j - j\epsilon).$$

On voit d'abord que j ne peut surpasser $\frac{1}{2}$. La valeur minima du second membre, pour une valeur donnée de j, correspond à la valeur maxima de $j\epsilon(2 - j - j\epsilon)$, laquelle s'obtient en donnant à ϵ sa valeur maxima $\frac{1}{2}$. L'inégalité devient alors

$$0 \gtreqless 1 - 2j - \frac{1}{2}j\left(2 - j - \frac{1}{2}j\right) = 1 - 3j + \frac{3}{4}j^2.$$

On peut supposer $j = \frac{1}{3}$, ou même un peu plus grand.

La seconde inégalité devient de même

$$1 \geqq (1+\epsilon)(1-k\epsilon)^2 = 1 + \epsilon(1-2k) + \epsilon^2(-2k+k^2) + k^2\epsilon^3,$$

$$0 \geqq 1 - 2k - k\epsilon(2-k-k\epsilon).$$

Si l'on fait $k=\frac{1}{2}$, l'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de ϵ de 0 à $\frac{1}{2}$; pour $k<\frac{1}{2}$, l'inégalité n'est plus vérifiée quand ϵ est très petit. La valeur $k=\frac{1}{2}$ est donc la plus petite que l'on puisse donner à k.

Nous écrirons donc

$$1-\frac{1}{3}\epsilon \geqq (1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1-\frac{1}{2}\epsilon,$$

$$1-\frac{1}{3}\frac{x}{\mu p} \geqq \left(1+\frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1-\frac{1}{2}\frac{x}{\mu p},$$

$$1-\frac{1}{3}\frac{x}{\mu q} \geqq \left(1+\frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1-\frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}.$$

II. *Limites de* $\left(1-\frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(1-\frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}}$. On trouve, de même, par les calculs élémentaires que nous supprimons. pour abréger,

$$1+\frac{5}{6}\epsilon \geqq (1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1+\frac{1}{2}\epsilon,$$

$$1+\frac{5}{6}\frac{x}{\mu p} \geqq \left(1-\frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1+\frac{1}{2}\frac{x}{\mu p},$$

$$1+\frac{5}{6}\frac{x}{\mu q} \geqq \left(1-\frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} \geqq 1+\frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}.$$

III. *Limites de* $w_1 = (\mu p + x)\log\left(1+\frac{x}{\mu q}\right) + (\mu p - x)$.

$\log\left(1-\frac{x}{\mu q}\right)$, *x étant nul ou positif*. On trouve, pour les dérivées première et seconde de w_1,

$$w_1' = \log\left(1+\frac{x}{\mu p}\right) - \log\left(1-\frac{x}{\mu q}\right),$$

$$w_1'' = \frac{1}{\mu p + x} + \frac{1}{\mu q - x}.$$

Or

$$\frac{1}{\mu p + x} = \frac{1}{\mu p}\,\frac{1}{1+\frac{x}{\mu p}} = \frac{1}{\mu p}\left[1 - \frac{x}{\mu p} + \frac{x^2}{\mu p\,(\mu p + x)}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^2 p^2\,(\mu p + x)}.$$

Mais $\mu p + x$ est compris entre μp et $\mu p + \frac{1}{2}\mu p$; donc

$$\frac{1}{\mu p + x} < \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^3 p^3},$$

$$\frac{1}{\mu p + x} > \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{\mu^3 p^3}.$$

De même,

$$\frac{1}{\mu q - x} = \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^2 q^2\,(\mu q - x)}.$$

L'expression $\mu q - x$ est comprise entre $\mu q - \frac{1}{2}\mu q$ et μq; donc

$$\frac{1}{\mu q - x} < \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + 2\,\frac{x^2}{\mu^3 q^3},$$

$$\frac{1}{\mu q - x} > \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3}.$$

De ces diverses inégalités, on tire

$$w_1'' < \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3} + \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + 2\,\frac{x^2}{\mu^3 q^3}$$

$$= \frac{1}{\mu p q} + \frac{x^2}{\mu^2 p^2 q^2}\,(p - q) + \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}\,(2p^3 + q^3);$$

$$w_1'' > \frac{1}{\mu p} - \frac{x}{\mu^2 p^2} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{\mu^3 p^3} + \frac{1}{\mu q} + \frac{x}{\mu^2 q^2} + \frac{x^2}{\mu^3 q^3}$$
$$= \frac{1}{\mu p q} + \frac{x}{\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^2}{\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right).$$

On déduit de là, en intégrant deux fois de 0 à x, w_1' et w_1 étant nuls pour $x = 0$,

$$w_1 < \frac{x^2}{2\mu p q} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3);$$
$$w_1 > \frac{x^2}{2\mu p q} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right).$$

IV. *Limites* de $w_2 = (\mu p - x)\log\left(1 - \frac{x}{\mu p}\right) + (\mu q + x).\log\left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)$, *$x$ étant positif*. On trouve de même, en changeant p en q et q en p, dans les calculs précédents,

$$w_2 < \frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(p^3 + 2q^3);$$
$$w_2 > \frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) + \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(\frac{2}{3}p^3 + q^3\right).$$

V. *Limites de* $t_{\mu p + x}$, $t_{\mu p - x}$. On a d'abord

$$t_{\mu p + x} = \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\mu p + q - \frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\mu p - q - \frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-w_1}.$$

Par suite, d'après I, II, III,

$$t_{\mu p - x} < \left(1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 + \frac{5}{6}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(p^3 + \frac{2}{3}q^3\right)}$$
$$> \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{\mu q}\right)$$
$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu p q} - \frac{x^2}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(2p^3 + q^3)}.$$

De même,

$$t_{\mu p - x} = \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\mu p + q - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\mu p - q - \frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\mu p}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-w_2}.$$

Par conséquent, d'après I, II, IV,

$$t_{\mu p - x} < \left(1 + \frac{5}{6}\,\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{x}{\mu q}\right)$$

$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu pq} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}\left(\frac{2}{3}p^3 + q^3\right)}$$

$$> \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{x}{\mu p}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{x}{\mu q}\right)$$

$$\times\ e^{-\frac{x^2}{2\mu px} + \frac{x^3}{6\mu^2 p^2 q^2}(p-q) - \frac{x^4}{12\mu^3 p^3 q^3}(p^3 + 2q^3)}.$$

VI. *Conclusion.* On voit d'après ces calculs combien il est difficile de justifier la formule classique

$$t_{\mu p \pm x} = e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}.$$

Pour qu'elle soit admissible, il faut supposer : 1° $\frac{x}{\mu p}$, $\frac{x}{\mu q}$ très petits comparés à l'unité, c'est-à-dire que $\frac{l}{p}$, $\frac{l}{q}$ soient des fractions très petites puisque x peut prendre la valeur extrême μl ; 2° $\frac{x^2}{\mu^2 p^2 q^2}$ doit être très petit comparé à $\frac{x^2}{\mu pq}$, ou $\frac{x}{\mu pq}$ comparé à 1, c'est-à-dire que $\frac{l}{pq}$ doit aussi être une fraction très petite.

En résumé, comme la seconde condition implique la première, on doit supposer l très petit par rapport à pq.

Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités

On peut trouver une valeur approchée de l'expression

$$P = \int_{\frac{m}{\mu}-l}^{\frac{m}{\mu}+l} z^m (1-z)^n \, dz : \int_0^1 z^m (1-z)^n \, dz,$$

de la manière suivante. Posons pour abréger,

$$p = \frac{m}{\mu}, \qquad q = 1 - p = \frac{n}{\mu},$$

puis, faisons dans la première intégrale,

$$z = p + x, \qquad 1 - z = q - x.$$

Cette intégrale deviendra

$$\int_{-l}^{+l} (p+x)^m (q-x)^n \, dx = p^m q^n \int_{-l}^{+l} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx.$$

Pour fixer les idées, nous supposons l tout au plus égal à la moitié de q et p égal ou supérieur à q.

On a, comme on sait,

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n + \left(1 - \frac{x}{p}\right)^m \left(1 + \frac{x}{q}\right)^n$$

$$\geqq 2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right)^m \left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)^n}$$

$$= 2e^{\frac{1}{2}\mu p \log\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right) + \frac{1}{2}\mu q \log\left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right)}.$$

Or, si α est inférieur à l'unité,

$$l(1-\alpha) > -\alpha - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\mu p \log\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)+\frac{1}{2}\mu q \log\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)$$

surpasse

$$\frac{1}{2}\mu p\left[-\frac{x^2}{p^2}-\frac{x^4}{2p^4\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)}\right]+\frac{1}{2}\mu q\left[-\frac{x^2}{q^2}-\frac{x^4}{2q^4\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{\mu x^2}{2p}-\frac{\mu x^4}{4p\,(p^2-x^2)}-\frac{\mu x^2}{2q}-\frac{\mu x^4}{4q\,(q^2-x^2)}$$

$$=-\frac{\mu x^2}{2pq}-\frac{\mu x^4}{4}\left\{\frac{1}{p\,(p^2-x^2)}+\frac{1}{q\,(q^2-x^2)}\right\}.$$

On a

$$\frac{1}{p\,(p^2-x^2)}+\frac{1}{q\,(q^2-x^2)}$$

$$=\frac{p^3+q^3-x^2}{pq\,(p^2-x^2)\,(q^2-x^2)}<\frac{1}{pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}.$$

Par conséquent, on a

$$\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^m\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)^n}>e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\,e^{-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}}$$

et, puisque $e^{-\alpha}$ est $>1-\alpha$,

$$\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^m\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right)^n}>e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right).$$

Il en résulte que l'on a

$$\mathrm{P}>\frac{p^m q^n\displaystyle\int_{-l}^{+l}e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1-\frac{\mu x^4}{4pq\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right)dx}{\displaystyle\int_0^1 z^m\,(1-z)^n\,dz}.$$

L'intégrale eulérienne du dénominateur est égale à

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu+2)}=\frac{1.2.3.\ldots m.\ 1.2.\ldots n}{1.2.3.\ldots\mu}\cdot\frac{1}{\mu+1}.$$

Posons dans l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = t^2, \quad \mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

elle deviendra

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} e^{-t^4}\,dt\left(1 - t^2\,\frac{pq}{\mu\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right)$$

supérieure à

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt - \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}\,\frac{pq}{\mu\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,t^4\,dt.$$

Or, en faisant $t = \sqrt{u}$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,t^4\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}\,u^{\frac{3}{2}}du = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}\sqrt{\pi}.$$

On a donc enfin

$$\mathrm{P} > \frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\,\mu}{1.\,2.\,3.\ldots m.\,1.\,2.\ldots n}\,p^m q^n\,\frac{\mu+1}{\mu}\sqrt{2\mu pq}$$

$$\times\left\{2\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\,dt - \frac{15}{4}\,\frac{\sqrt{\pi}\,pq}{\mu\,(p^2-l^2)\,(q^2-l^2)}\right\}.$$

Au moyen de la formule de Stirling, on prouve assez facilement l'inégalité suivante :

$$\frac{1.\,2.\,3.\ldots\,\mu}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,m.\,1.\,2.\ldots n.}\,p^m q^n > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\left(1 - \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q-l)}\right).$$

Le facteur qui précède la parenthèse dans l'inégalité relative à P, est donc supérieur à

$$\frac{\mu+1}{\mu}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q-l)}\right]$$

$$> \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{12\mu\,(p+l)\,(q+l)}\right].$$

On a donc

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt . \frac{1}{12\mu (p+l)(q-l)} - \frac{15pq}{4\mu (p^2-l^2)(q^2-l^2)} .$$

Or

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

$$12 (p+l)(q-l) > 12\left(p + \frac{1}{2} q\right)\left(q - \frac{1}{2} q\right) = 3(1+p) q > 6pq,$$

$$(p^2 - l^2)(q^2 - l^2) > \left(p^2 - \frac{1}{4} p^2\right)\left(q^2 - \frac{1}{4} q^2\right) = \frac{9}{16} p^2 q^2.$$

Par suite,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{15pq.\,16}{4\mu.\,9.\,p^2q^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{1}{6\mu pq} - \frac{20}{3\mu pq} .$$

Comme

$$\frac{1}{6} + \frac{20}{3} = \frac{41}{6}$$

est inférieur à 7, on a enfin

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt - \frac{7}{\mu pq} .$$