## XLIV.

# Ideale in Normalkörpern.

Ist $\chi$ irgend eine Permutation des Normalkörpers $\Omega$, $\omega$ irgend eine Zahl in $\Omega$, so setze man

$$\omega\chi = \omega + d\omega,\quad \omega\chi^s = \omega + \frac{s}{1} d\omega + \frac{s(s-1)}{1\cdot 2} d^2\omega + \cdots = (1+d)^s\omega,$$

$$d^s\omega = \omega(\chi - 1)^s \text{ symbolisch;}$$

aus $(\alpha \pm \beta)\chi = \alpha\chi \pm \beta\chi$ und $(\alpha\beta)\chi = (\alpha\chi)(\beta\chi)$ folgt

$$d(\alpha \pm \beta) = d\alpha \pm d\beta,\quad d(\alpha\beta) = \beta d\alpha + \alpha d\beta + d\alpha d\beta.$$

Alle Zahlen $\omega$, welche der Bedingung $d\omega = 0$ genügen, bilden den zu der Gruppe $1, \chi, \chi^2, \chi^3 \cdots$ gehörigen Körper, welcher $= \Omega$ ist, falls $\chi$ die identische Permutation von $\Omega$ ist.

Von jetzt ab bedeute $\omega$ jede ganze Zahl des Körpers $\Omega$, also jede Zahl in $\mathfrak{o}$, so ist $d\omega$ ebenfalls in $\mathfrak{o}$ enthalten, und zufolge $d(\alpha - \beta) = d\alpha - d\beta$ bilden alle diese Zahlen $d\omega$ einen durch $\mathfrak{o}$ teilbaren Modul, der mit $d\mathfrak{o}$ bezeichnet werden kann. Ist $\chi$ die identische Permutation, so ist $d\mathfrak{o} = 0$. Ist $h$ der kleinste positive Exponent, für welchen $\chi^h = 1$, so ist $n = hk$ der Grad von $\Omega$ (Bezeichnung wie im Schreiben an G. Frobenius von 1882. 6. 8.), $k$ der Grad des Körpers aller derjenigen Zahlen $\omega$, deren $d\omega = 0$. Ist

$$\mathfrak{e} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k]$$

das System aller ganzen Zahlen dieses Körpers, und

$$\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n],$$

so folgt, weil gleichzeitig

$$\omega = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + x_n\omega_n$$

und

$$d\omega = x_1 d\omega_1 + x_2 d\omega_2 + \cdots + x_n d\omega_n$$

ist,

$$d\mathfrak{o} = [d\omega_1, d\omega_2, \cdots, d\omega_n].$$

Da nun

$$\varepsilon_r = a_{1,r}\,\omega_1 + a_{2,r}\,\omega_2 + \cdots + a_{n,r}\,\omega_n,$$

also

$$0 = a_{1,r}\,d\omega_1 + a_{2,r}\,d\omega_2 + \cdots + a_{n,r}\,d\omega_n$$

und die aus den ganzen rationalen Zahlen $a_{s,r}$ gebildeten Determinanten $k^{\text{ten}}$ Grades nicht alle verschwinden, so sind von den $n$ Zahlen $d\omega_1$, $d\omega_2, \cdots, d\omega_n$ höchstens $n - k = (h-1)k$ voneinander unabhängig. Umgekehrt: findet zwischen diesen Zahlen $d\omega_\iota$ eine Relation $\sum x_\iota d\omega_\iota = 0$ statt, mit ganzen rationalen Koeffizienten $x_\iota$, so ist $d \sum x_\iota \omega_\iota = 0$, also $\sum x_\iota \omega_\iota$ in $\mathfrak{e}$ enthalten, also

$$\sum x_\iota \omega_\iota = \sum y_\iota \varepsilon_\iota, \quad x_r = \sum y_\iota a_{r,\iota}.$$

Als Basis des Körpers $\Omega$ kann man

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k, \quad \omega_{k+1}, \cdots, \omega_n$$

wählen, wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$ eine Basis des zu der Gruppe $\chi$ gehörigen Körpers $\Omega'$ bilden,

$$\omega = h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2 + \cdots + h_k \varepsilon_k + h_{k+1} \omega_{k+1} + \cdots + h_n \omega_n,$$

$$d\omega = h_{k+1}\, d\omega_{k+1} + \cdots + h_n\, d\omega_n,$$

$$d\omega_{k+1}, \cdots, d\omega_n \quad \text{Basis der Schar } d\Omega.$$

Denn wäre

$$h_{k+1}\, d\omega_{k+1} + \cdots + h_n\, d\omega_n = 0,$$

so ist

$$h_{k+1}\, \omega_{k+1} + \cdots + h_n\, \omega_n$$

in $\Omega'$ enthalten, also

$$= h_1 \varepsilon_1 + \cdots + h_k \varepsilon_k,$$

woraus folgt, daß alle $h = 0$ sind.

**[Diese formale Differentiation war offenbar zur Untersuchung der Differente gedacht, wie weitere angefangene Rechnungen zeigen, wo dieselben Betrachtungen modulo $p$ auftreten; darauf weist auch die Überschrift hin. E. N.]**