XXXVII.

Stetiges System aller Abbildungen der natürlichen Zahlenreihe N in sich selbst.

1. Abbildung α von N in sich selbst. Ist n eine natürliche Zahl, so sei $n\alpha$ das durch α erzeugte Bild von n; $n\alpha$ ist eine natürliche Zahl.

2. Sind α, β Abbildungen von N in sich selbst und verschieden voneinander, so gibt es mindestens eine natürliche Zahl n, für welche die Differenz $n\alpha - n\beta$ von Null verschieden ist, und unter diesen Zahlen n gibt es eine kleinste r. Dann ist

$$x\alpha = x\beta, \quad \text{falls} \quad x < r,$$

und $r\alpha - r\beta$ ist entweder positiv oder negativ. Im ersten Falle

$$r\alpha > r\beta$$

heiße α größer als β, β kleiner als α, in Zeichen

$$\alpha > \beta \quad \text{und} \quad \beta < \alpha.$$

Im zweiten Falle ist $r\beta > r\alpha$, mithin $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$. Also: von zwei verschiedenen Abbildungen α, β ist immer eine und nur eine größer als die andere.

3. Satz: Sind α, β, γ drei verschiedene Abbildungen von N in sich selbst, und ist $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, so ist auch $\alpha > \gamma$.

Beweis: Zufolge der beiden Annahmen $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ gibt es zwei natürliche Zahlen r, s von folgender Beschaffenheit:

$$r\alpha > r\beta, \quad x\alpha = x\beta \quad \text{für} \quad x < r,$$
$$s\beta > s\gamma, \quad y\beta = y\gamma \quad \text{für} \quad y < s.$$

Nun sind zwei Fälle denkbar: entweder ist $r \leqq s$, oder es ist $r > s$. Im ersten Falle ist $r\alpha > r\beta$ und, je nachdem $r < s$ oder $r = s$ ist, $r\beta = r\gamma$ oder $r\beta > r\gamma$, also gewiß $r\alpha > r\gamma$, und da jede Zahl x, welche $< r$, auch $< s$ ist, so ist $x\alpha = x\beta$ und $x\beta = x\gamma$, also auch $x\alpha = x\gamma$, mithin

$$r\alpha > r\gamma \quad \text{und} \quad x\alpha = x\gamma \quad \text{für} \quad x < r, \quad \text{also} \quad \alpha > \gamma,$$

w. z. b. w.

Im zweiten Falle $r > s$ ist $s\alpha = s\beta$ und $s\beta > s\gamma$, also auch $s\alpha > s\gamma$, und da jede Zahl y, welche $< s$, auch $< r$ ist, so folgt $y\alpha = y\beta$, und $y\beta = y\gamma$, also $y\alpha = y\gamma$, mithin

$$s\alpha > s\gamma \quad \text{und} \quad y\alpha = y\gamma \quad \text{für} \quad y < s, \quad \text{also} \quad \alpha > \gamma,$$

w. z. b. w.

[Diese kleine Bemerkung trägt das Datum 1891. 1. 2.]