XXXVI.

Beweis und Anwendungen eines allgemeinen Satzes über mehrfach ausgedehnte stetige Gebiete.

In meiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (§ 5, IV), welche im Jahre 1872 erschienen und kürzlich unverändert wieder abgedruckt ist, habe ich den Beweis desjenigen Prinzips veröffentlicht, welches ich schon seit dem Herbst 1858 als eine sichere und zugleich einfache Grundlage für die Infinitesimal-Analysis und für die Untersuchung aller stetigen Gebiete erkannt und auf die wichtigsten dahingehörigen Fragen immer mit dem gewünschten Erfolg angewandt hatte. Das Prinzip ist auszusprechen: Zerfallen alle reellen Zahlen in zwei Klassen von der Art, daß jede Zahl der ersten Klasse algebraisch kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse, so gibt es entweder in der ersten Klasse eine größte, oder in der zweiten Klasse eine kleinste Zahl.

Daß außer mir noch andere Mathematiker, insbesondere Weierstraß und G. Cantor, sich mit solchen Fragen beschäftigten, habe ich zuerst durch die Veröffentlichung einer Abhandlung von Heine (Die Elemente der Funktionenlehre, Crelles Journal, Bd. 74) im Jahre 1872 erfahren. Seitdem ist bekanntlich dieser Gegenstand in mehreren verdienstlichen Werken ausführlich und auf sehr verschiedene Art behandelt, doch scheint es mir, als ob die in denselben vorgetragenen Beweise nicht immer den kürzesten Weg einschlagen; insbesondere halte ich die oft benutzte Halbierungsmethode der Intervalle, die meines Wissens von Bolzano herrührt*), für einen zu weit-

*) Sie findet sich wohl zuerst in einer kleinen Schrift aus dem Jahre 1817, deren Titel ich nicht mehr genau anzugeben weiß, in welcher Bolzano den Satz zu beweisen versucht, daß eine stetige reelle Funktion einer reellen Variabelen in einem Intervall, in welchem sie sowohl positive wie negative Werte besitzt, auch den Wert Null annehmen muß. Diese Schrift ist wegen der vortrefflich geschriebenen Einleitung sehr lesenswert, aber an einer entscheidenden Stelle (in § 7) verfällt

läufigen Umweg, auf welchem das erstrebte Ziel nicht früh genug zum Bewußtsein kommt. Nun ist es oft nur Sache der Gewöhnung und des Geschmackes, ob man dem einen oder dem anderen Beweis den Vorzug zuerkennen will, und deshalb erlaube ich mir, als Beispiel meiner Beweismethode im folgenden einen allgemeinen Satz zu behandeln, welcher zahlreiche Anwendungen auf bekannte Fälle gestattet.

§ 1.

Ich bespreche zunächst eine Erscheinung, die bei Systemen von beliebigen Elementen eintreten kann, und benutze hierbei einige Begriffe und Kunstausdrücke in demselben Sinne wie in meiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (Braunschweig, 1888); doch wird es zum Verständnis wohl genügen, wenn ich an folgendes erinnere. Ein System S ist bestimmt, wenn alle Elemente bestimmt sind, aus denen es besteht. Ein System T heißt Teil von S, wenn jedes Element von T auch Element von S ist, und zwar heißt T ein echter Teil von S, wenn T von S verschieden ist. Ein System T heißt Gemeinteil der Systeme $A, B, C \cdots$, wenn T Teil von jedem dieser Systeme ist, und unter ihrer Gemeinheit wird das System aller derjenigen Elemente verstanden, welche zugleich Elemente von jedem dieser Systeme sind; wenn es gar kein solches, allen Systemen A, $B, C \cdots$ gemeinsames Element gibt, so besitzen sie auch keinen Gemeinteil und keine Gemeinheit. Dagegen gibt es in allen Fällen ein, aus $A, B, C \cdots$ zusammengesetztes System M, welches dadurch vollständig bestimmt ist, daß jedes und nur jedes solche Ding als

---

der Verfasser in vollständige Verwirrung, und der Beweis mißlingt gänzlich, der ohne vorgängige Feststellung der Stetigkeit des reellen Zahlgebietes auch gar nicht gelingen kann.

Nach einer Mitteilung (1892, 12. 19.) von Herrn Prof. H. A. Schwarz (Villenkolonie Grunewald bei Berlin, Hubertusallee 13), der mir auch früher dies Werk von Bolzano eine zeitlang geliehen hatte, ist der Titel desselben folgender:

Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege; von Bernard Bolzano. — Für die Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften. — Prag 1817. —

Vgl. Brief von H. A. Schwarz (1888, 4. 21.) an mich, und meine Antwort (1888, 4. 25.) mit Kritik von Bolzano und einigen Beweisen. —

Ferner: Brief von H. Weber (1892, 11. 18.) mit Beweis der Existenz einer Wurzel jeder algebraischen Gleichung; zu vergleichen auch mit meinem Beweise in meinem Briefe (1878, 6. 23.) an R. Lipschitz. —

Element von M gilt, welches Element von mindestens einem der Systeme A, B, $C \cdots$ ist. Statt der etwas schwerfälligen Bezeichnung, welche ich aus gewissen Gründen in der oben erwähnten Schrift gebraucht habe, will ich hier nach Schröder dieses System M mit $A + B + C + \cdots$ bezeichnen und die Summe der Systeme A, B, $C \cdots$ nennen. Jedes der letzteren ist ein Teil dieser Summe.

Hierauf gehe ich zur Erörterung eines, wie ich glaube, neuen Begriffs über, der für unsere Untersuchung von besonderer Wichtigkeit ist. Unter einem Teilschnitt φ eines Systems S verstehe ich eine Einteilung aller seiner Teile in zwei Arten, nämlich in reine und unreine Teile, welche den folgenden drei Bedingungen genügt.

1. Jeder Teil von S ist entweder rein oder unrein, aber niemals beides zugleich.

2. Jeder Teil eines reinen Teils ist rein.

3. Die Summe von je zwei reinen Teilen ist rein.

Offenbar lassen sich die beiden letzten Bedingungen auch in die folgende zusammenziehen:

4. Die Summe von zwei Teilen ist dann und nur dann rein, wenn beide Teile rein sind. Oder mit anderen Worten: die Summe von zwei Teilen ist dann und nur dann unrein, wenn mindestens einer der beiden Teile unrein ist.

Diese letzte Fassung erinnert an den Satz über das Verschwinden eines arithmetischen Produktes und führt zu der folgenden Charakterisierung des Teilschnittes φ, von der ich bisweilen Gebrauch machen werde. Belegt man jeden Teil A des Systems S mit einer Zahl $\varphi(A)$, welche $= 1$ oder $= 0$ sein soll, je nachdem A rein oder unrein ist, so ist

5. $$\varphi(A + B) = \varphi(A)\,\varphi(B),$$

wo A, B beliebige Teile von S bedeuten. Und umgekehrt, wenn jedem Teile A eines Systems S eine Zahl $\varphi(A)$ in der Weise entspricht, daß das vorstehende Gesetz 5. erfüllt wird, so ist hierdurch ein Teilschnitt φ von S bestimmt; denn aus $A + A = A$ ergibt sich zunächst, daß $\varphi(A) = 1$ oder $= 0$ sein muß, und wenn man A rein oder unrein nennt, je nachdem das Erstere oder das Letztere der Fall ist, so sind die obigen drei Bedingungen eines Teilschnittes wirklich erfüllt.

Ich füge noch die folgenden Bemerkungen hinzu. Jeder bestimmte Teil T eines Systems S erzeugt einen Teilschnitt von S, welcher dadurch bestimmt ist, daß jeder beliebige Teil A von S als rein oder unrein gilt, je nachdem A Teil von T ist oder nicht: T selbst ist folglich ein reiner Teil. Auf den ersten Blick könnte es auch scheinen, als müßte jeder Teilschnitt φ von S auf solche Weise durch einen bestimmten Teil T von S erzeugt werden; da nämlich jedes Element von S auch ein Teil von S und folglich entweder rein oder unrein ist, so liegt es nahe, den Inbegriff T aller reinen Elemente zu betrachten und nach 3. zu glauben, der Teilschnitt φ werde durch T erzeugt. Allein dieser Schluß ist nur dann sicher, wenn T ein endliches System ist, d. h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen besteht; in der Tat kann aus der Eigenschaft 3. durch vollständige Induktion (durch den Schluß von n auf $n+1$) nur gefolgert werden, daß die Summe von lauter reinen Teilen $A, B, C \cdots$ gewiß rein ist, wenn ihre Anzahl endlich ist, während eine Summe von unendlich vielen reinen Teilen sehr wohl unrein sein kann. Um sich hiervon zu überzeugen, genügt es, das folgende Beispiel zu betrachten: ist S ein unendliches System, und nennt man jeden Teil A von S rein oder unrein, je nachdem A endlich oder unendlich ist, so sind die obigen drei Bedingungen eines Teilschnittes offenbar erfüllt; aber obgleich alle Elemente von S rein sind, so ist ihre Gesamtheit S doch unrein. Hieraus geht hervor, daß ein Teilschnitt durch die Einteilung aller Elemente in reine und unreine noch keineswegs bestimmt ist. Man könnte sich nun vielleicht veranlaßt fühlen, den Begriff eines Teilschnittes so abzuändern, daß die Bedingung 3. für jede Summe von lauter reinen Teilen gelten soll; allein hierdurch würde die Tragweite des Begriffs wesentlichen Schaden erleiden.

Eine zweite Bemerkung besteht in folgendem. Während die Fassung des in der Einleitung ausgesprochenen Prinzips der Stetigkeit schon die Voraussetzung enthält, daß jede der beiden dortigen Klassen mindestens eine Zahl enthält, also wirklich existiert — weil sonst von einer Vergleichung der Zahlen der einen Klasse mit denen der anderen gar keine Rede sein könnte —, so sollen hier bei dem Begriff des Teilschnittes auch die beiden Fälle zugelassen werden, daß alle Teile rein, oder daß alle Teile unrein sind. Man kann dann allgemein behaupten, daß, wenn T ein Teil von S ist, in jedem Teilschnitt φ des Systems S ein Teilschnitt ψ des Systems T enthalten ist, welcher dadurch vollständig bestimmt wird, daß jeder Teil A

von T für rein oder unrein gelten soll, je nachdem er durch den Teilschnitt φ für rein oder unrein erklärt ist; dies kann mit Benutzung der oben erwähnten Charakterisierung durch die Zahlen 1 und 0 auch so ausgesprochen werden, daß allgemein $\psi(A) = \varphi(A)$ sein soll. Für unsere Zwecke ist aber besonders wichtig, daß umgekehrt, wenn T ein echter Teil von S ist, jeder Teilschnitt ψ des Systems T zu einem Teilschnitt φ des Systems S in der Weise erweitert werden kann, daß ψ in φ enthalten ist; eine solche Erweiterung kann auf verschiedene, häufig auf unendlich viele Arten geschehen*), doch soll hier, wenn schlechthin von der Erweiterung φ des Teilschnittes ψ die Rede ist, immer nur die folgende Art gemeint sein: jeder Teil A von S soll dann und nur dann für unrein gelten, wenn es einen Gemeinteil von A und T gibt, welcher durch den Teilschnitt ψ für unrein erklärt ist. Daß diese auf ψ gegründete Einteilung φ aller Teile von S wirklich einen Teilschnitt von S bildet, ergibt sich leicht; denn von den drei obigen Bedingungen sind die beiden ersten offenbar erfüllt, und wenn weder in A noch in B ein unreiner Teil von T enthalten ist, so gilt dasselbe auch von der Summe $A + B$, weil jeder Teil der letzteren entweder Teil von A, oder Teil von B, oder von der Form $A_1 + B_1$ ist, wo A_1 Teil von A, und B_1 Teil von B ist; mithin ist auch die dritte Bedingung erfüllt, also φ ein Teilschnitt von S, und offenbar ist ψ in φ enthalten.

Eine dritte und letzte Bemerkung bezieht sich auf eine Verbindung des Teilschnittes φ eines Systems S mit irgendeiner Abbildung desselben Systems. Das Wesen einer solchen Abbildung besteht bekanntlich darin, daß jedem bestimmten Element a des Systems S ein Bild, d. h. ein bestimmtes Element entspricht, welches wir mit a' bezeichnen wollen; ist A irgend ein Teil von S, so soll der Kürze halber unter dem Bilde von A dasjenige System A' verstanden werden, dessen Elemente die Bilder aller Elemente von A sind. Vermöge einer solchen Abbildung entspringt nun aus einem Teilschnitt φ des Systems S eine bestimmte Einteilung φ' aller Teile P des Systems S' in reine und unreine Teile, wenn nämlich festgesetzt wird, daß P stets und nur dann für unrein gelten soll, wenn es einen unreinen Teil U von S gibt, dessen Bild U' Teil von P

*) Die allgemeinere Frage, wann und wie sich gegebene Teilschnitte von Systemen $A, B, C \cdots$ zu einem einzigen Teilschnitte ihrer Summe $A + B + C + \cdots$ zusammensetzen lassen, ist leicht zu beantworten.

ist; daß diese Einteilung φ' wieder einen Teilschnitt des Systems S' bildet, ergibt sich auf ähnliche Weise, wie in der vorhergehenden Bemerkung, und wir dürfen es daher dem Leser überlassen, diesen Nachweis zu führen.

§ 2.

Um diesen Begriff des Teilschnittes auf Systeme von Zahlen — und zwar immer nur von reellen Zahlen — anzuwenden, schicke ich folgende Erklärungen voraus. Ist c eine Zahl, so soll das Zeichen $[c]$ das System aller derjenigen Zahlen bedeuten, welche im algebraischen Sinne $\leqq c$ sind. Bedeutet ferner h eine positive Zahl (nicht Null), so bezeichne ich mit $(c)_h$ das System aller derjenigen Zahlen x, welche den Bedingungen $c - h \leqq x \leqq c + h$ genügen, und ich nenne jedes solche System eine Hülle von c, h ihren Halbmesser, c ihren Mittelpunkt. Zufolge der Erklärung einer Summe von Systemen (§ 1) ist dann

$$[c + h] = [c - h] + (c)_h,$$

wo selbstverständlich das Zeichen $c + h$ die arithmetische Summe der Zahlen c und h, nicht nur das aus den beiden Elementen c und h bestehende System bedeutet. Ist T irgendein System von Zahlen, so soll die Zahl c eine Beizahl von T heißen, wenn in jeder Hülle von c mindestens eine Zahl des Systems T enthalten ist; offenbar ist jede Zahl des Systems T auch eine Beizahl von T, und wenn zugleich das Umgekehrte gilt, so soll T ein selbständiges System heißen*). Man erkennt leicht, daß das System T_0 aller Beizahlen von T stets selbständig ist; denn wenn c_0 eine Beizahl von T_0 bedeutet, so ist in jeder Hülle $(c_0)_h$ mindestens eine Zahl des Systems T_0, also eine Beizahl c des Systems T enthalten, und da in der Hülle $(c)_h$, also auch in jeder Hülle $(c_0)_{2h}$ mindestens eine Zahl des Systems T enthalten ist, so ist c_0 selbst eine Beizahl von T, also in T_0 enthalten, w. z. b. w. Nennen wir ferner T ein begrenztes System, wenn es eine Zahl gibt, welche absolut größer ist, als jede Zahl in T, so besteht folgender Satz:

Werden alle Teile eines begrenzten Zahlensystems T durch einen Teilschnitt ψ in reine und unreine Teile ein-

*) Diese Begriffe einer Beizahl und eines selbständigen Systems sind wohl zu unterscheiden von dem, was G. Cantor einen Grenzpunkt eines Systems und eine perfekte Mannigfaltigkeit nennt.

geteilt, und ist T selbst unrein, so gibt es eine kleinste Zahl c von der Art, daß in jeder Hülle von c ein unreiner Teil von T enthalten ist.

Der Beweis gewinnt die einfachste Ausdrucksweise, wenn man nach der in § 1 gegebenen Vorschrift den Teilschnitt ψ zu einem Teilschnitt φ des Systems S aller Zahlen erweitert, wodurch die Behauptung des Satzes sich offenbar in die folgende verwandelt: es gibt eine kleinste Zahl c, deren Hüllen sämtlich unrein sind. Um dieselbe zu beweisen, teile man alle Zahlen x in zwei Klassen A, B ein, indem man x in A oder in B aufnimmt, je nachdem das System $[x]$ rein oder unrein ist. Da T begrenzt ist, so gibt es eine positive Zahl e, welche absolut größer ist als jede Zahl in T; dann gehört $-e$ der Klasse A an, weil das System $[-e]$ gar keine Zahl mit T gemein hat und folglich rein ist; aber $+e$ gehört zu B, weil das unreine System T ein Teil von $[e]$, also auch letzteres System unrein ist. Mithin existieren beide Klassen A, B. Jede Zahl a der Klasse A ist algebraisch kleiner als jede Zahl b in B, weil, wenn $a \geqq b$ wäre, das reine System $[a]$ einen unreinen Teil $[b]$ besäße, was dem Begriff des Teilschnittes widerspricht. Nach dem in der Einleitung ausgesprochenen Prinzip der Stetigkeit gibt es daher eine Zahl c, welche entweder die größte in A oder die kleinste in B ist, so daß, wenn h irgendeine positive Zahl bedeutet, $c-h$ in A, $c+h$ in B enthalten ist; da nun das unreine System $[c+h]$ die Summe des reinen Systems $[c-h]$ und der Hülle $(c)_h$ ist, so folgt aus dem Begriff des Teilschnittes, daß die letztere stets unrein ist. Wenn endlich $a < c$ ist, so kann man eine positive Zahl h so wählen, daß $a+h$ auch der Klasse A angehört, woraus folgt, daß die Hülle $(a)_h$ als Teil des reinen Systems $[a+h]$ ebenfalls rein ist. Mithin ist c die kleinste Zahl, deren sämtliche Hüllen unrein sind, w. z. b. w.

Die Zahl c ist offenbar eine Beizahl des Systems T; ist daher letzteres selbständig, so ist c selbst in T enthalten.

Der bewiesene Satz umfaßt sehr viele, vielleicht alle diejenigen Existenz-Sätze, welche in der Theorie der Funktionen von einer reellen Veränderlichen behandelt zu werden pflegen. Es wird aber nicht nötig sein, dies hier auszuführen, weil wir später (§ 4) dieselben Sätze für Funktionen von mehreren Veränderlichen beweisen werden.

§ 3.

Ein ganz ähnlicher Satz gilt nun auch für den n-fach ausgedehnten stetigen Zahlenraum S. Unter einem Elemente oder einem Punkte $\mathfrak{a}$ dieses Raumes verstehe ich, wie üblich, jede bestimmte Folge von n reellen Zahlen a_1, $a_2 \cdots a_{n-1}$, a_n, und diese sollen die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ heißen. Ist h irgendeine positive Zahl (nicht Null), so soll mit $(\mathfrak{a})_h$ das System aller der Punkte bezeichnet werden, deren Koordinaten x_1, $x_2 \cdots x_n$ den Bedingungen

$$a_1 - h \leqq x_1 \leqq a_1 + h, \; a_2 - h \leqq x_2 \leqq a_2 + h, \; \cdots, \; a_n - h \leqq x_n \leqq a_n + h$$

genügen, und ich nenne jedes solche System $(\mathfrak{a})_h$ eine Hülle von $\mathfrak{a}$, h ihren Halbmesser, $\mathfrak{a}$ ihren Mittelpunkt. Ist T irgendein System von Punkten, also ein Teil von S, so soll der Punkt $\mathfrak{c}$ ein Beipunkt von T heißen, wenn in jeder Hülle von $\mathfrak{c}$ mindestens ein Punkt von T enthalten ist; offenbar ist jeder Punkt des Systems T auch ein Beipunkt von T, und wenn zugleich das Umgekehrte gilt, so soll T ein selbständiges System heißen; man überzeugt sich leicht (wie in § 2), daß das System T_0 aller Beipunkte von T stets selbständig ist. Das System T heißt begrenzt, wenn es eine Zahl gibt, welche absolut größer ist als jede Koordinate jedes in T enthaltenen Punktes.

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei verschiedene Punkte, deren $r$te Koordinaten bzw. mit a_r, b_r bezeichnet werden, so will ich $\mathfrak{a}$ den tieferen, $\mathfrak{b}$ den höheren nennen, wenn in der Folge der Differenzen

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad \cdots, \quad b_n - a_n$$

die erste, welche nicht verschwindet, einen positiven Wert hat, und dies soll kurz durch die Symbole $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ bezeichnet werden*). Von je zwei verschiedenen Punkten ist immer einer der tiefere, der andere der höhere, und der Gebrauch des Komparativs rechtfertigt sich dadurch, daß aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ stets $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ folgt. Zugleich leuchtet ein, was es heißen soll, wenn ein Punkt der tiefste oder der höchste Punkt eines Systems genannt wird.

Alle diese Namen und Bezeichnungen entsprechen, wenn $n = 1$ ist, denjenigen, welche in § 2 gebraucht sind; ist aber $n > 1$, so tritt noch folgendes hinzu. Unterdrückt man die letzte Koordinate a_n des Punktes $\mathfrak{a}$, so bildet die Folge der übrigen a_1, $a_2 \cdots a_{n-1}$ einen

---

*) Bei dieser Unterscheidung ist von wesentlicher Bedeutung die Reihenfolge der Koordinaten, die natürlich durch jede andere ersetzt werden kann.

Punkt $\mathfrak{a}'$ des $(n-1)$fachen Zahlenraumes; dieser Punkt $\mathfrak{a}'$ soll das Bild oder die Projektion des Punktes $\mathfrak{a}$ heißen, und wenn T irgend ein Teil von S ist, so soll unter seiner Projektion T' dasjenige System verstanden werden, dessen Elemente die Projektionen aller in T enthaltenen Punkte sind, und welches folglich ein Teil des ganzen $(n-1)$fachen Zahlenraumes S' ist. Die Projektion der Hülle $(\mathfrak{a})_h$ ist die Hülle $(\mathfrak{a}')_h$ der Projektion $\mathfrak{a}'$. Jeder Punkt $\mathfrak{a}$ des Raumes S ist vollständig bestimmt durch Angabe seiner Projektion $\mathfrak{a}'$ und seiner letzten Koordinate a_n und kann daher durch das Symbol $(\mathfrak{a}', a_n)$ bezeichnet werden; allgemeiner, wenn P irgendein Teil von S', und Q irgendein Teil des einfachen Zahlenraumes ist, so soll mit (P, Q) das System aller derjenigen Punkte $\mathfrak{a}$ in S bezeichnet werden, deren Projektion $\mathfrak{a}'$ in P, und deren letzte Koordinate a_n in Q enthalten ist. Die Einführung der Projektionen soll dazu dienen, um mit Hilfe der vollständigen Induktion den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

I. Ist T ein begrenztes System von Punkten im n-fachen Zahlenraum S, und werden alle Teile von T durch einen Teilschnitt ψ in reine und unreine Teile eingeteilt, so gibt es, wenn T selbst unrein ist, einen tiefsten Punkt $\mathfrak{c}$ von der Art, daß in jeder Hülle von $\mathfrak{c}$ ein unreiner Teil von T enthalten ist.

Auch hier erleichtern wir uns den Beweis, indem wir den Teilschnitt ψ des Systems T nach der in § 1 gegebenen Vorschrift zu einem Teilschnitt φ des ganzen n-fachen Zahlenraumes S erweitern, wodurch unser Satz sich offenbar in den folgenden verwandelt:

Ist T ein begrenzter Teil von S, und werden alle Teile von S durch einen Teilschnitt φ in reine und unreine Teile so eingeteilt, daß T für unrein, und daß jeder Teil, welcher mit T keinen Punkt gemein hat, für rein gilt, so gibt es einen tiefsten Punkt $\mathfrak{c}$, dessen Hüllen sämtlich unrein sind.

Dies ist für den Fall $n = 1$ schon in § 2 bewiesen, und wir brauchen daher nur zu zeigen, daß aus der Wahrheit dieses Satzes für den $(n-1)$fachen Raum S' auch seine Wahrheit für den n-fachen Raum S folgt. Zu diesem Zwecke leiten wir nach der am Schlusse von § 1 gegebenen Vorschrift aus dem Teilschnitt φ einen Teilschnitt φ' des Raumes S' ab, indem wir irgendeinen Teil P des letzteren dann und nur dann für unrein erklären, wenn es einen unreinen Teil U von S gibt, dessen Projektion U' Teil von P ist. Die Projektion T' des begrenzten und unreinen Teiles T von S ist offenbar ein begrenzter und unreiner Teil von S', und jeder Teil P von S', der mit T' keinen Punkt gemein hat, ist gewiß rein; denn jeder unreine Teil U von S hat mindestens einen Punkt $\mathfrak{a}$ mit T gemein und seine Projektion U' kann daher, weil sie mindestens einen Punkt $\mathfrak{a}'$ mit T' gemein hat, nicht Teil von P sein. Nehmen wir daher an, der oben ausgesprochene Satz gelte für den $(n-1)$fachen Raum S', so gibt es in demselben einen tiefsten Punkt $\mathfrak{c}'$, dessen Hüllen sämtlich unrein sind, und folglich gibt es, wenn k irgend eine positive Zahl bedeutet, immer einen unreinen Teil U von S, dessen Projektion U' Teil der Hülle $(\mathfrak{c}')_k$ ist. Bedeutet nun Q den ganzen einfachen Zahlenraum, so ist U jedenfalls ein Teil des Systems $((\mathfrak{c}')_k, Q)$, und folglich ist auch letzteres ein unreiner Teil des Raumes S. Da ferner T begrenzt ist, so gibt es eine positive Zahl e, welche absolut größer ist, als jede Koordinate jedes Punktes in T; bezeichnet man daher mit E das System aller derjenigen Zahlen, welche algebraisch größer als e sind, so hat das System $((\mathfrak{c}')_k, E)$ keinen Punkt mit T gemein und ist folglich rein, und da das unreine System

$$((\mathfrak{c}')_k, Q) = ((\mathfrak{c}')_k, E) + ((\mathfrak{c}')_k, [e])$$

ist, so ist auch das zweite System rechter Hand unrein. Zugleich leuchtet ein, daß das System $((\mathfrak{c}')_k, [-e])$ rein ist, weil es keinen Punkt mit T gemein hat. Hierauf teilen wir alle reellen Zahlen x in zwei Klassen A, B ein; die Zahl x soll zur zweiten Klasse B gehören, wenn j e d e r positiven Zahl k ein unreines System $((\mathfrak{c}')_k, [x])$ entspricht; im entgegengesetzten Falle soll x zur ersten Klasse A gehören. Offenbar ist $-e$ in A, aber $+e$ in B enthalten, also existieren beide Klassen. Jede Zahl a der Klasse A ist algebraisch kleiner als jede Zahl b der Klasse B, weil, wenn $a \geqq b$ wäre, es ein reines System $((\mathfrak{c}')_k, [a])$ gäbe, welches einen unreinen Teil $((\mathfrak{c}')_k, [b])$ besäße, was dem Begriff eines Teilschnittes φ widerspricht. Nach dem in der Einleitung ausgesprochenen Stetigkeitsprinzip gibt es daher eine Zahl c, welche entweder die größte in A oder die kleinste in B ist, und wir wollen zeigen, daß der hierdurch bestimmte Punkt $\mathfrak{c} = (\mathfrak{c}', c)$ die in dem obigen Satze behauptete Eigenschaft besitzt. Bedeutet h irgendeine positive Zahl, so gehört $c - h$ zur Klasse A, und folglich gibt es eine positive Zahl k, welche ein reines System $((\mathfrak{c}')_k, [c-h])$ erzeugt, und wenn l die kleinste der beiden Zahlen h, k bedeutet, so ist das System $((\mathfrak{c}')_l, [c-h])$ als ein Teil des vorigen ebenfalls rein. Da andererseits $c+h$ zur Klasse B gehört, so ist das System $((\mathfrak{c}')_l, [c+h])$ unrein, und da es die Summe des vorigen und des Systems $((\mathfrak{c}')_l, (c)_h)$ ist, so ist letzteres ebenfalls unrein; dieses ist aber, weil $l \leqq h$ ist, ein Teil des Systems $((\mathfrak{c}')_h, (c)_h) = (\mathfrak{c})_h$, und folglich ist jede Hülle des Punktes $\mathfrak{c}$ unrein. Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{c}$ der tiefste solche Punkt ist, daß also jeder tiefere Punkt $\mathfrak{a}$ mindestens eine reine Hülle besitzt. Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ folgt gewiß $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{c}'$; ist nun zunächst $\mathfrak{a}' < \mathfrak{c}'$, so gibt es zufolge der Definition des Punktes $\mathfrak{c}'$ und des Teilschnittes φ' mindestens eine reine Hülle $(\mathfrak{a}')_h$, und da dieselbe die Projektion der Hülle $(\mathfrak{a})_h$ ist, so muß auch letztere rein sein. Ist aber $\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}'$, so ist die letzte Koordinate a des Punktes $\mathfrak{a}$ algebraisch kleiner als c; man kann daher eine positive Zahl l so wählen, daß auch $a+l$ zur Klasse A gehört; dann gibt es eine positive Zahl k, welche ein reines System $((\mathfrak{c}')_k, [a+l])$ erzeugt; bedeutet nun h die kleinste der beiden Zahlen k, l, so ist die Hülle $(\mathfrak{a})_h$ als Teil dieses reinen Systems ebenfalls rein, w. z. b. w.

Nachdem der Satz hiermit allgemein bewiesen ist, mag noch bemerkt werden, daß der Punkt $\mathfrak{c}$ ein Beipunkt des Systems T und folglich, falls letzteres selbständig ist, selbst in T enthalten ist.

§ 4*).

Bei den nun folgenden Anwendungen beschränke ich mich auf einige sehr bekannte Sätze; ihr Beweis kommt immer auf eine zweckmäßige, den Bedingungen 1 bis 4 genügende Definition der reinen und unreinen Systeme zurück.

II. Ist U ein bestimmter Teil von T, so gibt es einen tiefsten Punkt von der Beschaffenheit, daß jede seiner Hüllen mindestens einen Punkt von U enthält.

Dies geht unmittelbar aus dem obigen Satze I (§ 3) hervor, wenn man jeden Teil von T unrein oder rein nennt, je nachdem er mindestens einen oder keinen Punkt von U enthält; denn diese Definition genügt offenbar den Bedingungen 1 bis 4 (§ 1).

*) [In diesem der ersten Fassung entnommenen Paragraphen (vgl. die Erläuterungen) ist T als beschränkt und abgeschlossen vorausgesetzt, so daß der obige Punkt $\mathfrak{c}$ stets zu T gehört (§ 3, Schluß). E. N.]

Die folgenden Sätze beziehen sich auf irgendeine eindeutige reelle Funktion der beiden Variabelen x, y; jedem Punkte $\mathfrak{p} = (x, y)$ von T entspricht eine bestimmte reelle Zahl $\mathfrak{p}'$, die ich das Bild des Punktes $\mathfrak{p}$ nenne, und wenn U irgendein Teil von T ist, so soll U' das Bild von U, d. h. den Inbegriff der Bilder $\mathfrak{p}'$ aller in U enthaltenen Punkte $\mathfrak{p}$ bedeuten.

III. Es gibt einen tiefsten Punkt (a, b) von folgender Beschaffenheit: ist c irgendeine Zahl des Systems T', so gibt es in jeder Hülle von (a, b) mindestens einen Punkt $\mathfrak{p}$, dessen Bild $\mathfrak{p}' \leqq c$ ist.

Dies geht unmittelbar aus dem Satze I hervor, wenn man jeden Teil U von T rein oder unrein nennt, je nachdem es in T' mindestens eine oder keine Zahl gibt, die kleiner als jede Zahl in U' ist; denn diese Definition genügt den Bedingungen 1 bis 4.

IV. Ist c ein Beiwert (§ 2) des Systems T', so gibt es einen tiefsten Punkt (a, b) von folgender Beschaffenheit: ist H irgendeine Hülle von (a, b), so ist c auch Beiwert des Systems H'.

Dies geht unmittelbar aus dem Satze I hervor, wenn man jeden Teil U von T unrein oder rein nennt, je nachdem c Beiwert von U' ist oder nicht; denn diese Definition genügt den Bedingungen 1 bis 4.

Die Abbildung (Funktion) heißt stetig im Punkte $\mathfrak{p}$, wenn, wie klein auch die positive Größe k gegeben sein mag, man immer eine Hülle H von $\mathfrak{p}$ so wählen kann, daß alle Zahlen in H' um weniger als k von $\mathfrak{p}'$, also um weniger als $2k$ voneinander verschieden sind. Die Funktion heißt stetig in T, wenn sie in jedem Punkte von T stetig ist. Dann ergeben sich aus den Sätzen III und IV die folgenden Sätze:

V. Eine in T stetige Funktion besitzt einen kleinsten Wert, und es gibt einen tiefsten Punkt, in welchem die Funktion diesen Minimumwert annimmt.

Denn wenn es in T' eine Zahl c gäbe, welche kleiner als $(a, b)'$ ist, wo (a, b) den in III bestimmten Punkt bedeutet, so könnte man eine Hülle H von (a, b) so wählen, daß alle Zahlen in H' größer als c wären, was im Widerspruch mit der dort bewiesenen Eigenschaft des Punktes (a, b) steht; mithin ist $(a, b)'$ die kleinste Zahl in T'. Und es kann auch keinen tieferen Punkt (α, β) geben, in welchem derselbe Minimumwert $(\alpha, \beta)' = (a, b)'$ auftritt, weil ein solcher Punkt (α, β) gewiß dieselbe, in III angegebene Beschaffenheit besitzt, wie (a, b).

VI. Ist die Abbildung (Funktion) stetig in T, so ist jeder Beiwert c von T' auch eine Zahl in T', und es gibt einen tiefsten Punkt (a, b), in welchem die Funktion diesen Wert $c = (a, b)'$ annimmt.

Denn wenn (a, b) den in IV bestimmten Punkt bedeutet, so kann $(a, b)'$ nicht von c verschieden sein, weil man sonst eine Hülle H von (a, b) so wählen könnte, daß alle Zahlen in H' um mehr als eine bestimmte positive Größe von c verschieden wären, also c kein Beiwert von H' wäre, was in Widerspruch mit IV steht; mithin ist $(a, b)' = c$. Und es kann auch keinen tieferen Punkt (α, β) geben, dessen Bild $(\alpha, \beta)' = c$ ist.

VII*). Besitzt eine in T stetige Funktion sowohl positive als auch negative Werte, so gibt es auch einen tiefsten Punkt, in welchem sie verschwindet.

Dies versteht sich von selbst, wenn die Funktion im Nullpunkte (0,0) verschwindet. Ist aber $(0,0)'$ positiv (auf welchen Fall wir uns beschränken dürfen), so soll ein Teil U von T rein heißen, wenn U' aus lauter positiven Zahlen besteht; im entgegengesetzten Falle heiße U unrein. Da diese Definition den Bedingungen 1. bis 4. genügt, so gibt es (nach Satz I) einen tiefsten Punkt (a, b) von der Beschaffenheit, daß jede seiner Hüllen H unrein ist.

Ich behaupte, daß $(a, b)' = 0$ ist. Denn jedenfalls kann $(a, b)'$ nicht positiv sein, weil es sonst zufolge der Stetigkeit auch reine Hüllen H gäbe. Nehmen wir ferner an, $(a, b)'$ sei negativ, so kann man zufolge der Stetigkeit eine Hülle H so wählen, daß H' aus lauter negativen Zahlen besteht; da aber (a, b) nicht der Nullpunkt ist, so gibt es in H gewiß einen Punkt (α, β), der tiefer ist als (a, b), und da $(\alpha, \beta)'$ negativ ist, so wäre auch jede Hülle von (α, β) unrein, während doch (a, b) der tiefste Punkt ist, der diese Eigenschaft besitzt. Mithin ist $(a, b)' = 0$, und es kann auch keinen tieferen Punkt als (a, b) geben, in welchem die Funktion verschwindet, weil wieder jede Hülle eines solchen Punktes unrein ist, w. z. b. w.

---

*) [Der Beweis gilt in der hier gegebenen Fassung nur für das Quadrat $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. Dedekind hatte die allgemeinere Gültigkeit des Satzes bemerkt, ohne die nötigen Abänderungen hinzuschreiben. E. N.]

Ich schließe mit folgendem, für den Begriff des Doppelintegrals wichtigen Satze:

VIII. Ist z eine in T stetige Funktion, und k eine positive Größe, so kann man eine für alle Punkte $\mathfrak{p}$ gemeinsame positive Größe h so wählen, daß z in jeder Hülle $(\mathfrak{p}, h)$ sich um weniger als k ändert.

Um dies zu beweisen, bemerke ich zunächst folgendes. Ist $\mathfrak{p}$ ein bestimmter Punkt in T, so gibt es zufolge der Stetigkeit der Funktion z eine Hülle $(\mathfrak{p}, 2h)$, in welcher z sich um weniger als k ändert; betrachtet man nun alle Punkte $\mathfrak{q}$ der Hülle $(\mathfrak{p}, h)$, so ist jede Hülle $(\mathfrak{q}, h)$, deren Halbmesser $= h$, ein Teil von $(\mathfrak{p}, 2h)$, und folglich ändert sich z auch in jeder solchen Hülle $(\mathfrak{q}, h)$ um weniger als k; das Punktsystem $U = (\mathfrak{p}, h)$ hat daher die Eigenschaft, welche unser Satz dem ganzen T zuschreibt: man kann alle Punkte des Systems U in Hüllen vom gemeinsamen Halbmesser h so einschließen, daß z in jeder einzelnen solchen Hülle sich um weniger als k ändert. Nehmen wir nun an, unser Satz sei unrichtig, so nennen wir, wenn dies auch unpassend klingen mag, einen Teil von T rein oder unrein, je nachdem er die eben ausgesprochene Eigenschaft besitzt oder nicht besitzt. Diese Einteilung genügt offenbar den Bedingungen eines Teilschnittes, auch der letzten; denn wenn h_1, h_2 genügend kleine (geeignete) Halbmesser für die reinen Systeme U_1, U_2 sind, so ist die kleinste der beiden Zahlen h_1, h_2 ein genügend kleiner Halbmesser für das aus U_1 und U_2 zusammengesetzte System. Nach dem Satz I müßte es daher mindestens einen Punkt $\mathfrak{p}$ geben, dessen Hüllen sämtlich unrein sind, während doch oben gezeigt ist, daß jeder Punkt $\mathfrak{p}$ eine reine Hülle besitzt. Mithin muß auch T rein sein, w. z. b. w.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Das Manuskript lag in zwei Fassungen vor, von denen die zweite von Dedekind als „sorgfältigere Fassung desselben Gegenstandes“ bezeichnet war. In dieser zweiten Fassung fehlte aber die Einleitung und der Paragraph mit den Anwendungen, die daher aus der ersten Fassung übernommen sind (wobei x, y statt $x_1, \cdots, x_n$ stehen blieb).

Zur Terminologie ist zu bemerken, daß die Dedekindschen Bezeichnungen „Beipunkt“ und „selbständiges System“ dem „Berührpunkt“ (vgl. Hausdorff, Mengenlehre) und der „abgeschlossenen Menge“ entsprechen; der Übergang von T zum „selbständigen System T_0“ ist der Übergang zur „abgeschlossenen Hülle“

(Dedekind gebraucht den Ausdruck „Hülle" für n-dimensionale abgeschlossene Würfelumgebung eines Punktes).

Den Anwendungen kann vielleicht noch hinzugefügt werden der Heine-Borelsche Überdeckungssatz:

Es sei jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von T (wo T abgeschlossen und beschränkt) eine $\mathfrak{p}$ enthaltende offene Menge $\delta_{\mathfrak{p}}$ zugeordnet. Man nenne eine Untermenge U von T rein oder unrein, je nachdem U durch endlich viele $\delta_{\mathfrak{p}}$ überdeckt wird oder nicht. Ist T unrein — d. h. der Überdeckungssatz nicht erfüllt —, so gibt es einen Punkt $\mathfrak{c}$ von T derart, daß jede Würfelumgebung von $\mathfrak{c}$ unrein. Das ist aber ein Widerspruch; denn ist $\delta_{\mathfrak{c}}$ die $\mathfrak{c}$ zugeordnete offene Menge, $W_{\mathfrak{c}} \subseteqq \delta_{\mathfrak{c}}$ eine Würfelumgebung von $\mathfrak{c}$ (eine solche existiert, da die W eine Basis aller Umgebungen bilden), so ist $W_{\mathfrak{c}}$ rein; denn es wird von einem $\delta_{\mathfrak{c}}$ überdeckt.

Noether.