Aus dem Nachlaß.

Die folgenden aus dem Nachlaß publizierten Stücke haben zum großen Teil neben dem historischen Interesse auch solches durch Auffassung und Methode, wenn auch die Resultate unterdes unabhängig wiedergefunden sind. Es handelt sich um fertige oder fast fertige Ausarbeitungen; auf die Publikation von Unausgearbeitetem konnte um so eher verzichtet werden, als Dedekind in den folgenden Briefen an Frobenius davon ein viel klareres Bild gegeben hat, als es der Nachlaß bot.

Der Nachlaß bestand aus etwa 50 Mappen, Dedekind hatte alles und jedes aufgehoben; es ist also nicht ausgeschlossen, daß sich gelegentlich noch etwas zur Publikation Geeignetes findet. Als historisch interessant ist vielleicht noch zu erwähnen eine wohl unmittelbar an die ersten Vorlesungen anschließende Darstellung der Galoisschen Theorie; oder auch eine sehr ausführliche, aus früher Zeit stammende Darstellung der Riemannschen Geometrie, aus der in die Riemann-Ausgabe (Lateinische Preisarbeit) nur kurze Auszüge durch Weber übernommen wurden.

Noether.

XXXV.

Allgemeine Sätze über Räume.

§ 1.

Ein System von Punkten $p, p' \cdots$ bildet einen Körper, wenn für jeden Punkt p desselben sich eine Länge δ von der Beschaffenheit angeben läßt, daß alle Punkte, deren Abstand von p kleiner als δ ist, ebenfalls dem System P angehören. Die Punkte $p, p' \cdots$ liegen innerhalb P.

§ 2.

Ist P' ein Körper, dessen sämtliche Punkte auch Punkte des Körpers P sind, so heißt P' ein Teil von P.

§ 3.

Satz. Alle Punkte, deren Abstand von einem festen Punkte p kleiner als eine gegebene Länge δ ist, bilden einen Körper (der Kugel heißt; p heißt der Mittelpunkt, δ der Durchmesser desselben).

Beweis. Ist $pp' < \delta$, so wähle man $\delta' < \delta - pp'$; so sind alle Punkte p'', für welche $p'p'' < \delta'$ ist, auch solche Punkte p'', für welche $pp'' < \delta$ ist (weil $pp'' \leqq pp' + p'p''$).

§ 4.

Ist P ein Körper und m ein Punkt, um welchen sich eine Kugel beschreiben läßt, deren sämtliche Punkte nicht innerhalb P liegen, so sagt man, der Punkt m liege außerhalb P.

§ 5.

Satz. Ist P ein Körper, und existiert wenigstens ein Punkt m außerhalb P, so gibt es auch unendlich viele solche Punkte außerhalb P, und dieselben bilden einen Körper.

Beweis. Da m außerhalb P liegt, so gibt es eine um m beschriebene Kugel K, deren sämtliche Punkte m' nicht innerhalb P liegen. Alle diese Punkte m' liegen außerhalb P; denn ist δ der Halbmesser von K, und also $mm' < \delta$, so beschreibe man um m' mit einem Halbmesser $\delta' < \delta - mm'$ eine Kugel K', so bildet K' einen Teil von K; also liegt m' (nach § 4) außerhalb P. Daß das System M aller außerhalb P liegenden Punkte m einen Körper bildet, folgt auf dieselbe Weise.

§ 6.

Ist P ein Körper und π ein Punkt, welcher weder innerhalb P noch außerhalb P liegt, so heißt π ein Grenzpunkt von P.

§ 7.

Ist P ein Körper und Π das System aller Grenzpunkte π von P (wenn überhaupt solche vorhanden), so heißt Π die Begrenzung von P.

§ 8.

Satz. Liegen sämtliche Punkte eines Körpers P' nicht innerhalb eines Körpers P, so liegen sie auch sämtlich außerhalb P.

Beweis. Es sei m' ein beliebiger Punkt von P'; so läßt sich um m' eine Kugel beschreiben, deren sämtliche Punkte innerhalb P', also nicht innerhalb P liegen. Nach § 4 liegt m' außerhalb P.

§ 9.

Satz. Ein System Π' von Punkten π, welche sämtlich Grenzpunkte eines Körpers P sind, kann keinen Körper bilden.

Beweis. Die Punkte π von Π' liegen (nach § 6) sämtlich nicht innerhalb von P. Wäre Π' ein Körper, so lägen alle Punkte π von Π' (nach § 8) außerhalb P. Weil aber die Punkte π von Π' sämtlich Grenzpunkte von P sind, ist dies (nach § 6) unmöglich.

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Diese ersten Begriffe der Punktmengenlehre — eine Weiterführung findet sich in dem nächsten Stück — werden des historischen Interesses halber wiedergegeben. Dedekind sagt darüber in einem Brief an Cantor (vom 19. Januar 1879, über Invarianz der Dimension):

„Bei einer Publikation würde ich es für wünschenswert halten, wenn die Namen oder Kunstausdrücke der Mannigfaltigkeitslehre (beiläufig gesagt, ich würde dem ebenfalls Riemannschen Wort „Gebiet“ seiner Kürze halber entschieden den Vorzug vor dem schwerfälligen Worte „Mannigfaltigkeit“ geben) recht genau definiert würden; es wäre sehr verdienstlich, wenn diese ganze „Gebietslehre“ ab ovo dargestellt würde, ohne die geometrische Anschauung zuzuziehen; und dabei müßte z. B. der Begriff einer von dem Punkte a nach dem Punkte b innerhalb des Gebietes G stetig führenden Linie recht bestimmt und deutlich definiert werden. Die Definitionen von Netto*) (dessen Abhandlung mir sehr wohl gefällt, und dessen Beweis, wie ich glaube, mit einigen Modifikationen ganz zutreffend wird) enthalten einen guten Keim, aber sie scheinen mir der Vereinfachung und zugleich einer Vervollständigung fähig. Ich würde mir ein solches Urteil nicht erlauben, wenn ich nicht vor vielen Jahren, als ich noch die Dirichletsche Potentialvorlesung herausgeben und dabei das sogenannte Dirichletsche Prinzip strenger begründen wollte, mich schon recht viel mit solchen Fragen beschäftigt hätte. Ich habe einige solche Definitionen, die mir eine recht gute Grundlage zu geben scheinen; aber ich habe später die ganze Sache liegen lassen, und könnte für den Augenblick nur Unvollständiges geben, da ich durch die Umarbeitung der Dirichletschen Zahlentheorie ganz in Anspruch genommen bin.“

Noether.

*) Crelle 1878.
