XXXIII.

Über binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen.

[Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 129, S. 1—34 (1905).]

Bei der Besprechung der in lineare Faktoren zerlegbaren Formen, welche zu einem endlichen algebraischen Zahlkörper gehören, habe ich bemerkt, daß die drei Formen, deren eine durch eine bilineare Substitution in das Produkt der beiden anderen übergeht, im wesentlichen, d. h. abgesehen von konstanten Faktoren, umgekehrt durch diese Substitution bestimmt sind*). In dem einfachsten Falle der binären quadratischen Formen ist diese Tatsache zwar nicht ausdrücklich von Gauß ausgesprochen, aber sie ist vollständig in der Schlußbemerkung des Art. 235 der Disquisitiones Arithmeticae enthalten, in welchem die Transformation einer Form in ein Produkt aus zwei Formen durch eine bilineare Substitution in der allgemeinsten Weise behandelt wird. Bei meinem ersten Studium dieser Untersuchung erregte die genannte Tatsache meine besondere Aufmerksamkeit, und ich erkannte bald, daß mit einer solchen gegebenen Substitution immer zwei andere Substitutionen und drei quadratische Formen von der Art verbunden sind, daß jede der drei Formen durch eine ihr entsprechende Substitution in das Produkt der beiden anderen Formen übergeht. Hat man sich hiervon überzeugt, was bei zweckmäßiger Wahl der Bezeichnung keine Schwierigkeit darbietet, so wird die Lösung des allgemeinen von Gauß behandelten Problems in hohem Grade vereinfacht. Da dies noch nicht bekannt zu sein scheint, so wage ich es, meine Untersuchung zu veröffentlichen und dem Andenken an meinen großen Lehrer Dirichlet zu widmen, der selbst eine Ehre darein gesetzt hat, durch eine Reihe von Abhandlungen das Verständnis des von ihm am höchsten bewunderten Werkes von Gauß zu erleichtern.

---

*) Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, vierte Auflage, § 182, S. 586.

§ 1.

Wir betrachten im folgenden drei Paare von unabhängigen Variabeln

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

und zwei Reihen von je vier willkürlichen Konstanten

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$
$$\beta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3.$$

Bedeutet r, s, t, wie immer im folgenden, irgend eine Permutation der drei Indizes 1, 2, 3 (während der Index 0 ungeändert bleibt), so dürfen wir jeden aus den Variabeln und Konstanten gebildeten Ausdruck, der in bezug auf die beiden Indizes s, t symmetrisch ist, als eine durch den Index r bestimmte Größe ansehen und demgemäß bezeichnen. In diesem Sinne bilden wir drei binäre quadratische Formen F_1, F_2, F_3 durch die gemeinsame Definition

$$(1) \quad \begin{cases} F_r = F_r(x_r, y_r) = A_r x_r^2 + B_r x_r y_r + C_r y_r^2 \\ = (\beta_s x_r + \alpha_t y_r)(\beta_t x_r + \alpha_s y_r) - (\alpha_r x_r + \beta_0 y_r)(\alpha_0 x_r + \beta_r y_r), \end{cases}$$

wo also

$$(2) \quad \begin{cases} A_r = \beta_s \beta_t - \alpha_0 \alpha_r, \quad C_r = \alpha_s \alpha_t - \beta_0 \beta_r, \\ B_r = \alpha_s \beta_s + \alpha_t \beta_t - \alpha_r \beta_r - \alpha_0 \beta_0. \end{cases}$$

Wir wollen beweisen, daß diese drei Formen ein und dieselbe Diskriminante

$$(3) \quad D = B_1^2 - 4 A_1 C_1 = B_2^2 - 4 A_2 C_2 = B_3^2 - 4 A_3 C_3$$

haben, und daß jede von ihnen durch eine entsprechende bilineare Substitution in das Produkt der beiden anderen Formen übergeht.

Das erstere folgt leicht aus einem bekannten Satz über partiale Determinanten. Bildet man aus zwei Reihen von je vier Größen

$$p, p', p'', p''',$$
$$q, q', q'', q'''$$

die sechs Determinanten

$$(4) \quad \begin{cases} P = pq' - qp', \quad Q = pq'' - qp'', \quad R = pq''' - qp''', \\ U = p''q''' - q''p''', \quad T = p'q''' - q'p''', \quad S = p'q'' - q'p'', \end{cases}$$

so genügen die drei letzteren den beiden Gleichungen

$$Up' - Tp'' + Sp''' = 0, \quad Uq' - Tq'' + Sq''' = 0;$$

multipliziert man die erste mit $-q$, die zweite mit p und addiert, so erhält man den in Rede stehenden Satz

$$PU - QT + RS = 0. \tag{5}$$

Wenden wir ihn auf das Beispiel

$$\begin{cases} p = \beta_r, & p' = \alpha_s, & p'' = \alpha_t, & p''' = \beta_0, \\ q = -\alpha_0, & q' = -\beta_t, & q'' = -\beta_s, & q''' = -\alpha_r \end{cases} \tag{6}$$

an, so wird zufolge (2):

$$\begin{cases} P = -A_s, & Q = -A_t, & R = -\frac{1}{2}(B_t + B_s), \\ U = -C_s, & T = -C_t, & S = -\frac{1}{2}(B_t - B_s), \end{cases} \tag{7}$$

also

$$A_s C_s - A_t C_t + \tfrac{1}{4}(B_t + B_s)(B_t - B_s) = 0$$

oder

$$B_s^2 - 4 A_s C_s = B_t^2 - 4 A_t C_t,$$

womit unsere Behauptung über die Diskriminanten der drei Formen bewiesen ist. Wir bemerken zugleich, daß diese gemeinsame Diskriminante D, die eine homogene Funktion vierten Grades von den acht Konstanten α, β ist, nicht identisch verschwindet; denn wenn man z. B. $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, alle anderen sechs Konstanten α, $\beta = 1$ setzt, so werden alle neun Koeffizienten A_r, B_r, C_r gleich 1, also $D = -3$.

Um auch die zweite Behauptung zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_r} = 2 A_r x_r + B_r y_r = 2 u_r, \quad \frac{\partial F_r}{\partial y_r} = B_r x_r + 2 C_r y_r = 2 v_r, \tag{8}$$

woraus

$$u_r x_r + v_r y_r = F_r \tag{9}$$

folgt, und nehmen die Konstanten (6) zu Koeffizienten der beiden bilinearen, in bezug auf s, t symmetrischen Funktionen

$$\begin{cases} X_r = \beta_r x_s x_t + \alpha_s x_s y_t + \alpha_t y_s x_t + \beta_0 y_s y_t, \\ Y_r = -\alpha_0 x_s x_t - \beta_t x_s y_t - \beta_s y_s x_t - \alpha_r y_s y_t. \end{cases} \tag{10}$$

Eliminiert man der Reihe nach jedes der vier Produkte $x_s x_t$, $x_s y_t$, $y_s x_t$, $y_s y_t$, so erhält man mit Rücksicht auf (4), (7), (8) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 X_r + \beta_r Y_r \\
&= - A_s x_s y_t - A_t y_s x_t - \frac{1}{2}(B_t + B_s) y_s y_t = - y_s u_t - u_s y_t, \\
&\beta_t X_r + \alpha_s Y_r \\
&= \quad A_s x_s x_t - \frac{1}{2}(B_t - B_s) y_s x_t - C_t y_s y_t = - y_s v_t + u_s x_t, \\
&\beta_s X_r + \alpha_t Y_r \\
&= \quad A_t x_s x_t + \frac{1}{2}(B_t - B_s) x_s y_t - C_s y_s y_t = \quad x_s u_t - v_s y_t, \\
&\alpha_r X_r + \beta_0 Y_r \\
&= \frac{1}{2}(B_t + B_s) x_s x_t + C_t x_s y_t + \quad C_s y_s x_t = \quad x_s v_t + v_s x_t,
\end{aligned}$$

die man mit Benutzung der bekannten Bezeichnung für die Multiplikation von zwei binären Substitutionen auch in der Form

$$\begin{pmatrix} \beta_s X_r + \alpha_t Y_r, & \alpha_r X_r + \beta_0 Y_r \\ \alpha_0 X_r + \beta_r Y_r, & \beta_t X_r + \alpha_s Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s, & v_s \\ - y_s, & u_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t, & v_t \\ - y_t, & x_t \end{pmatrix}$$

darstellen kann, und da bekanntlich die Determinante des Produkts von zwei Substitutionen das Produkt aus deren Determinanten ist, so ergibt sich aus der Definition (1) der Formen $F_r = F_r(x_r, y_r)$ und aus (9) das Resultat

(11) $$F_r(X_r, Y_r) = F_s F_t,$$

womit auch unsere zweite Behauptung bewiesen ist.

Man erkennt übrigens leicht, daß dieser zweite Satz (11) den ersten (3) über die Diskriminanten in sich schließt. Sieht man nämlich x_s, y_s als Konstanten an, so nimmt die obige bilineare Substitution (10) die Form einer einfachen binären Substitution

$$\begin{aligned}
X_r &= \quad (\beta_r x_s + \alpha_t y_s) x_t + (\alpha_s x_s + \beta_0 y_s) y_t, \\
Y_r &= - (\alpha_0 x_s + \beta_s y_s) x_t - (\beta_t x_s + \alpha_r y_s) y_t
\end{aligned}$$

an, deren Determinante zufolge (1) gleich $- F_s$ ist, und durch diese Substitution geht die Form

$$F_r(X_r, Y_r) = A_r X_r^2 + B_r X_r Y_r + C_r Y_r^2$$

nach dem Satz (11) in die Form

$$F_s F_t(x_t, y_t) = F_s A_t x_t^2 + F_s B_t x_t y_t + F_s C_t y_t^2$$

über. Nach dem bekannten Fundamentalsatz über die Transformation einer binären quadratischen Form durch eine einfache lineare Substitution ist aber die Diskriminante der neuen Form gleich der der alten, multipliziert mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante. Bezeichnet man nun mit D_1, D_2, D_3 die Diskriminanten der Formen F_1, F_2, F_3, so ist in unserem Falle die Diskriminante der neuen Form

$$(F_s B_t)^2 - 4(F_s A_t)(F_s C_t) = D_t F_s^2,$$

und da D_r die Diskriminante der alten Form, und $-F_s$ die Substitutionsdeterminante ist, so folgt $D_t F_s^2 = D_r(-F_s)^2$, also $D_t = D_r$, was zu beweisen war.

Die acht Konstanten α, β bilden daher immer die Koeffizienten von drei verwandten binären bilinearen Substitutionen, deren Zusammenhang wesentlich in der Identität

$$(12)\qquad y_1 X_1 - x_1 Y_1 = y_2 X_2 - x_2 Y_2 = y_3 X_3 - x_3 Y_3$$

besteht, und erzeugen zugleich drei quadratische Formen, deren jede durch eine dieser Substitutionen in das Produkt der beiden anderen übergeht.

Indem wir uns vorbehalten, auf diese Identität später (in § 4) zurückzukommen, beschließen wir diese Betrachtungen mit einer Bemerkung, die sich auf den Fall bezieht, wo die bisher willkürlichen acht Konstanten α, β ganze rationale Zahlen sind. Dann sind auch die Koeffizienten der drei Formen F_1, F_2, F_3 und deren Diskriminante D ganze Zahlen; wir wollen annehmen, daß keine dieser Formen identisch verschwindet, und wollen mit M_r den Teiler der Form F_r, d. h. den positiven größten gemeinsamen Teiler ihrer Koeffizienten A_r, B_r, C_r bezeichnen. Bedeutet ferner K_r den größten gemeinsamen Teiler von M_s, M_t, also auch den der sechs Koeffizienten A_s, B_s, C_s, A_t, B_t, C_t, so folgt aus (3) auch $B_s \equiv B_t \pmod{2K_r}$, mithin ist K_r auch gemeinsamer Teiler der sechs partialen Determinanten (7), und zwar der größte, weil umgekehrt jeder gemeinsame Teiler dieser Determinanten offenbar auch in B_s, B_t, also in M_s, M_t, K_r aufgeht.

Entwickelt man nun beide Seiten der in bezug auf die vier Variabeln x_s, y_s, x_t, y_t identischen Gleichung (11) durch Auflösung aller die Variabeln einschließenden Klammern, so leuchtet ein, daß alle Koeffizienten der linken Seite durch M_r teilbar sind, während offenbar das Produkt $M_s M_t$ der größte gemeinsame Teiler der neun

Koeffizienten der rechten Seite ist; mithin ist $M_s M_t$ teilbar durch M_r, also

(13) $$M_2 M_3 = M_1 N_1, \quad M_3 M_1 = M_2 N_2, \quad M_1 M_2 = M_3 N_3,$$

wo N_1, N_2, N_3 ebenfalls natürliche Zahlen bedeuten; dann ist zugleich

(14) $$M_1^2 = N_2 N_3, \quad M_2^2 = N_3 N_1, \quad M_3^2 = N_1 N_2,$$

und wenn z. B. M_2, M_3 relative Primzahlen sind, also $K_1 = 1$, so folgt

(15) $$M_1 = M_2 M_3, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = M_3^2, \quad N_3 = M_2^2.$$

§ 2.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns zu der Aufgabe, welche Gauß im Art. 235 der Disquisitiones Arithmeticae behandelt hat. Ich will aber vorher bemerken, daß ich hier wie schon früher*) statt der von Gauß zugrunde gelegten Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$, deren zweiter Koeffizient den Faktor 2 enthält, immer Formen $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ betrachte, wo a, b, c beliebige Konstanten bedeuten, die nur der Beschränkung unterliegen sollen, daß die aus ihnen gebildete Diskriminante $\partial = b^2 - 4ac$ der Form $f = f(x, y)$ von Null verschieden ist.

Sind nun $f_1 = f_1(x_1, y_1)$, $f_2 = f_2(x_2, y_2)$, $f_3 = f_3(x_3, y_3)$ drei solche Formen mit den Diskriminanten ∂_1, ∂_2, ∂_3, so besteht die Untersuchung darin, alle Folgerungen aus der Annahme zu ziehen, daß die erste Form f_1 durch eine bilineare Substitution in das Produkt $f_2 f_3$ der beiden anderen Formen übergeht; bezeichnet man daher mit X_1, Y_1 zwei bilineare Funktionen der beiden Paare (x_2, y_2), (x_3, y_3), so wird diese Annahme durch die Identität

$$f_1(X_1, Y_1) = f_2 f_3$$

ausgedrückt; um aber die Symmetrie so viel wie möglich zu bewahren, fügen wir dem Produkt noch einen von Null verschiedenen konstanten Faktor k_1 hinzu und setzen also

(16) $$f_1(X_1, Y_1) = k_1 f_2 f_3.$$

Aus den acht Koeffizienten α, β der bilinearen Funktionen, die wir (gemäß (10) in § 1) in die Form

(17) $$\begin{cases} X_1 = \quad \beta_1 x_2 x_3 + \alpha_2 x_2 y_3 + \alpha_3 y_2 x_3 + \beta_0 y_2 y_3, \\ Y_1 = -\alpha_0 x_2 x_3 - \beta_3 x_2 y_3 - \beta_2 y_2 x_3 - \alpha_1 y_2 y_3 \end{cases}$$

*) Zuerst in §§ 169, 170 der zweiten Auflage (1871) von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie.

setzen, bilden wir nach § 1 die drei Formen F_1, F_2, F_3; dann besteht das Endresultat der Untersuchung wesentlich darin, daß diese Formen sich beziehungsweise von den Formen f_1, f_2, f_3 nur um konstante, von Null verschiedene Faktoren n_1, n_2, n_3 unterscheiden, daß also identisch

(18) $$F_1 = n_1 f_1, \quad F_2 = n_2 f_2, \quad F_3 = n_3 f_3$$

ist.

Um dies in aller Kürze zu beweisen, verfahre man ebenso wie bei dem zweiten Beweise des Diskriminantensatzes (3) in § 1. Sieht man in den Gleichungen (17) erst x_2, y_2, dann x_3, y_3 als Konstanten an, so nehmen sie die Gestalt von einfachen linearen Substitutionen an, deren Determinanten bzw. $-F_2, -F_3$ sind, und der Fundamentalsatz über solche Transformationen einer Form f_1 ergibt zufolge der Annahme (16) die beiden Gleichungen

$$\partial_1(-F_2)^2 = \partial_3(k_1 f_2)^2, \quad \partial_1(-F_3)^2 = \partial_2(k_1 f_3)^2,$$

und da $k_1, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ nach unserer Annahme von Null verschieden sind, so folgen hieraus die beiden letzten Gleichungen (18), wo n_2, n_3 von Null verschiedene Konstanten bedeuten. Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so geht die Annahme (16) mit Rücksicht auf den Satz (11) in § 1 in die Gleichung

$$k_1 F_1(X_1, Y_1) = n_2 n_3 f_1(X_1, Y_1)$$

über, welche identisch in bezug auf die vier Variabeln x_2, y_2, x_3, y_3 bestehen muß. Da nun ∂_2 nicht Null ist, also auch die Form f_2 nicht identisch verschwindet, so gilt dasselbe auch von der Form $F_2 = n_2 f_2$; man kann daher den Variabeln x_2, y_2 in (17) solche Werte beilegen, daß F_2 einen von Null verschiedenen Wert erhält, und folglich kann man hierauf x_3, y_3 immer so wählen, daß X_1, Y_1 beliebig vorgeschriebene Werte x_1, y_1 annehmen; man darf daher in der vorstehenden Gleichung X_1, Y_1 durch die unabhängigen Variabeln x_1, y_1 ersetzen, und folglich gilt auch die erste der Identitäten (18), was zu beweisen war.

Umgekehrt, wenn zwischen drei Formen f_1, f_2, f_3 und den in § 1 definierten Formen F_1, F_2, F_3 die drei Identitäten (18) bestehen, wo n_1, n_2, n_3 von Null verschiedene Konstanten bedeuten, so folgen aus dem Satze (11) in § 1 die drei Identitäten

(19) $$f_r(X_r, Y_r) = k_r f_s f_t,$$

wo

(20) $$k_r = \frac{n_s n_t}{n_r},$$

d. h. jede der drei Formen f_1, f_2, f_3 geht durch eine bilineare Substitution in das mit einer Konstanten multiplizierte Produkt der beiden anderen Formen über.

Die drei Gleichungen (18), aus denen unmittelbar die Relationen

(21) $$D = \partial_1 n_1^2 = \partial_2 n_2^2 = \partial_3 n_3^2$$

zwischen den Diskriminanten der sechs Formen F_r, f_r folgen, schließen diejenigen neun Gleichungen in sich, welche Gauß in der Schlußbemerkung des Art. 235 mit Ω bezeichnet, und die als Grundlage für die in den Artikeln 236—241 folgenden Untersuchungen dienen. Die Gleichungen (18), bei deren Ableitung wir gar keine Voraussetzung über die besondere Natur der Koeffizienten der Formen f_1, f_2, f_3 und der bilinearen Funktionen X_1, Y_1 gemacht haben, enthalten den algebraischen Teil der Untersuchung; wir wollen jetzt annehmen, alle diese Koeffizienten seien ganze rationale Zahlen, und wollen die zahlentheoretischen Folgerungen aus der Annahme (16) ziehen, die bei Gauß schon im Laufe seiner Untersuchung auftreten.

Aus (18) folgt zunächst, daß n_1, n_2, n_3 ganze oder gebrochene rationale Zahlen sind, mithin haben zufolge (21) die Diskriminanten D, ∂_1, ∂_2, ∂_3 dasselbe Vorzeichen, und sie verhalten sich wie Quadrate von ganzen Zahlen (Conclusio prima bei Gauß). Bezeichnen wir ferner mit m_r den Teiler der Form f_r und (wie in § 1) mit M_r den der Form F_r, so ist zufolge (18)

(22) $$M_1 = \varepsilon_1 m_1 n_1, \quad M_2 = \varepsilon_2 m_2 n_2, \quad M_3 = \varepsilon_3 m_3 n_3,$$

wo

(23) $$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1,$$

also $\varepsilon_1 n_1$, $\varepsilon_2 n_2$, $\varepsilon_3 n_3$ positiv sind.

Jetzt kehren wir, indem wir die Symmetrie aufgeben, zu der eigentlichen Annahme von Gauß zurück, daß nämlich f_1 durch die bilineare Substitution (17) in das Produkt $f_2 f_3$ selbst übergeht, daß also

(24) $$f_1(X_1, Y_1) = f_2 f_3,$$

mithin

(25) $$k_1 = 1, \quad n_1 = n_2 n_3, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

ist, woraus nach (21), (22) auch

(26) $$\partial_2 = \partial_1 n_3^2, \quad \partial_3 = \partial_1 n_2^2,$$

(27) $$\partial_2 m_3^2 = \partial_1 M_3^2, \quad \partial_3 m_2^2 = \partial_1 M_2^2$$

folgt. Bedeutet daher K_1 wieder den größten gemeinsamen Teiler von M_2, M_3 (wie in § 1), so ist $\partial_1 K_1^2$ der größte gemeinsame Teiler der beiden Produkte $\partial_2 m_3^2$, $\partial_3 m_2^2$ (Conclusio secunda et quarta bei Gauß).

Nach der Definition von Gauß heißt nun die Form f_1 zusammengesetzt (composita) aus den beiden Formen f_2, f_3, wenn $K_1 = 1$ ist, also M_2, M_3 relative Primzahlen sind. Beschränken wir uns jetzt auf diesen Fall, so folgt aus (27), daß die Diskriminante ∂_1 der aus f_2, f_3 zusammengesetzten Form f_1 der größte gemeinsame Teiler von $\partial_2 m_3^2$, $\partial_3 m_2^2$ ist. Da ferner nach (15) in § 1 aus der jetzigen Annahme auch $M_1 = M_2 M_3$ folgt, so ergibt sich aus (22), (25) auch $m_1 = m_2 m_3$, d. h. der Teiler m_1 der zusammengesetzten Form f_1 ist das Produkt aus den Teilern m_2, m_3 der Formen f_2, f_3 (Conclusio quinta bei Gauß).

Hiermit ist der wesentliche Inhalt des Art. 235 der Disquisitiones Arithmeticae erschöpft. Die daselbst zum Ziele führenden Rechnungen, die zum großen Teil nur angedeutet sind, und deren wirkliche Ausführung dem Leser überlassen ist, glaube ich in der hier vorliegenden Darstellung erheblich vereinfacht zu haben. Da diese Vereinfachung hauptsächlich auf der in § 1 vorausgeschickten Einführung der mit einer jeden bilinearen Substitution verbundenen drei Formen F_1, F_2, F_3 und auf deren symmetrischer Behandlung beruht, welche mit geringer Rechnung zu dem Hauptsatz (11) führt, so war es eben wegen dieser Symmetrie nicht möglich, die Bezeichnungen von Gauß beizubehalten. Zur Erleichterung einer Vergleichung bemerke ich folgendes. Gauß untersucht die Transformation einer Form F in das Produkt von zwei Formen f, f', deren Variable entsprechend bezeichnet sind, durch die bilineare Substitution

$$X = pxx' + p'xy' + p''yx' + p'''yy',$$
$$Y = qxx' + q'xy' + q''yx' + q'''yy'$$

und gebraucht die Zeichen P, Q, R, S, T, U in derselben Bedeutung wie in Gleichung (4). Um daher von dieser Bezeichnung zu der meinigen in (24) überzugehen, hat man F, f, f' bzw. durch f_1, f_2, f_3

zu ersetzen, und die vorstehende bilineare Substitution geht in (17) über, wenn die Koeffizienten $p, p' \cdots q'''$ wie in (6) ausgedrückt werden, wobei die Indizes r, s, t bzw. durch 1, 2, 3 zu ersetzen sind. Beachtet man nun die Vorzeichen der hieraus entspringenden Ausdrücke (7), so erkennt man, daß man die in den neun Schlußgleichungen Ω bei Gauß auftretenden beiden Zahlen n, n' bzw. durch $-n_3$, $-n_2$ zu ersetzen hat, um diese Gleichungen Ω in Übereinstimmung mit unseren Gleichungen (18) zu bringen, in denen zufolge (25) $n_1 = n_2 n_3$ ist. Dies ist deshalb erwähnenswert, weil Gauß auf die Vorzeichen der Zahlen n, n' eine wichtige Unterscheidung hinsichtlich der Art gründet, wie die Formen f, f' in die Transformation oder Komposition $F = ff'$ eintreten, worauf wir hier aber nicht näher eingehen können.

§ 3.

Der Satz (11) in § 1, auf welchem alles andere beruht, ist dort wohl auf dem kürzesten Wege hergeleitet, nämlich durch unmittelbare Rechnung mit den acht Konstanten α, β, aus denen die Koeffizienten der sechs bilinearen Funktionen (10) und die der drei quadratischen Formen (1) gebildet sind. Man kann aber zu demselben Resultat und zu einem tieferen Einblick in den Gegenstand der Untersuchung auf einem ganz anderen Wege gelangen, wobei diese Konstanten α, β gar nicht explizite in die Rechnung eintreten, sondern die in (12) angeführte binäre trilineare Form als alleiniger Ausgangspunkt der Untersuchung dient. Der Weg, den ich hierbei einschlage, beruht auf der freiesten Ausnutzung der totalen Differentiation in der Auffassung, wie ich sie mir seit vielen Jahren gebildet und gelegentlich auch befreundeten Mathematikern mitgeteilt habe*). Da dieselbe nicht nur in der reinen Analysis, sondern auch in der Geometrie, Mechanik, in der mathematischen Physik nützlich verwendet werden kann und noch nicht so allgemein bekannt zu sein scheint, wie sie es wohl verdient, so will ich wenigstens das, was für unseren Zweck erforderlich ist, zunächst besprechen.

---

*) Vgl. § 159 der zweiten Auflage (1871) von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie und meinen Aufsatz: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen (Göttinger Nachrichten 1885), wo von dieser Auffassung Gebrauch gemacht ist.

Ich betrachte einen analytischen Raum, in welchem jeder Punkt durch die Werte von n unabhängigen Variabeln (Koordinaten) x_1, $x_2, \cdots, x_n$ bestimmt ist, und bezeichne mit Φ den Inbegriff aller derjenigen Funktionen φ dieser Variabeln, welche partielle Derivierte von beliebig hoher Ordnung besitzen und zugleich der Bedingung

$$(28) \qquad \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)$$

genügen. Dann soll das Zeichen d eine Operation bedeuten, welche aus jeder solchen Funktion φ eine entsprechende, ebenfalls in Φ enthaltene Funktion $d\varphi$ in der Weise erzeugt, daß das bekannte Grundgesetz der totalen Differentiation erfüllt wird, d. h. jede zwischen m solchen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ bestehende Identität

$$(29) \qquad F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m) = 0$$

soll die Identität

$$(30) \qquad \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} d\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_m} d\varphi_m = 0$$

zur Folge haben.

Daß solche Operationen d überhaupt möglich sind, geht aus der gewöhnlichen Auffassung der Differentiale als unendlich kleiner Änderungen der Variablen hervor; wir müssen aber jetzt feststellen, in welchem Umfange solche Operationen d in der obigen allgemeinsten Auffassung existieren, und wodurch sie vollständig bestimmt werden. Die letztere Frage läßt sich sofort beantworten; denn wenn φ irgend eine in dem System Φ enthaltene Funktion ist, so besteht zwischen ihr und den n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ eine Identität, die wir in der Form

$$(31) \qquad \varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

darstellen dürfen, und hieraus soll nach der obigen Definition der Operation d die Identität

$$(32) \qquad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = \sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} dx_r$$

folgen; mithin ist die Operation d vollständig bestimmt, sobald in jedem Punkte unseres Raumes die Werte der n Funktionen

$$(33) \qquad dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$$

gegeben sind. Umgekehrt, hat man diese n Funktionen willkürlich aus Φ gewählt, und bildet man daraus nach (32) für jede Funktion φ eine zugehörige Funktion $d\varphi$ (welche für $\varphi = x_r$ offenbar mit der gewählten Funktion dx_r übereinstimmt), so ist leicht zu zeigen, daß die hierdurch bestimmte Operation d wirklich der obigen Grundforderung genügt. Denn durch partielle Derivation in bezug auf die Variable x_r ergibt sich aus der oben angenommenen Identität (29) bekanntlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_r} = 0;$$

multipliziert man mit dx_r und summiert, indem man r die Indizes $1, 2, \cdots, n$ durchlaufen läßt, so ergibt sich mit Rücksicht auf (32) die zu beweisende Gleichung (30).

Aus dem in (29), (30) ausgedrückten Grundgesetz einer solchen Operation d leuchtet auch unmittelbar ihre Invarianz ein, d. h. sie bleibt dieselbe, wenn statt der Koordinaten x ein anderes System von n voneinander unabhängigen Funktionen y zur Ortsbestimmung gewählt wird, wobei die ihnen entsprechenden Funktionen dy gemäß (32) aus den Funktionen dx zu bestimmen sind. Auch versteht sich von selbst, daß zufolge desselben Gesetzes alle Regeln der gewöhnlichen Differentiation, wie

$$d(\varphi_1 \pm \varphi_2) = d\varphi_1 \pm d\varphi_2, \quad d(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_2 d\varphi_1 + \varphi_1 d\varphi_2$$

ihre volle Geltung behalten.

Unter den vielen verschiedenen Namen, welche man je nach der Beschaffenheit des Anwendungsgebietes einer solchen Operation d beilegen möchte*), will ich hier den in einem solchen Gebiet eingebürgerten, freilich in viel speziellerer Bedeutung gebrauchten Namen Vektor wählen, während die durch d erzeugten Funktionen $d\varphi$ unbedenklich Differentiale genannt werden können. Die partielle Derivation $\dfrac{\partial}{\partial x_r}$ in bezug auf die Variable x_r ist offenbar der spezielle Vektor d, für welchen die Differentiale (33) mit Ausnahme von dx_r, welches $= 1$ ist, identisch verschwinden. Es ist auch zweckmäßig, den Vektor Null einzuführen, und durch $d = 0$ anzudeuten, daß alle n Funktionen (33), also auch alle $d\varphi$ identisch verschwinden;

*) Immer von einer Differentiation erster Ordnung oder Variation erster Ordnung zu sprechen, ist zu unbequem. Sophus Lie gebraucht für seine Symbole $X(f)$, die mit den Vektoren identisch sind, den Namen infinitesimale Transformation (Theorie der Transformationsgruppen; Abschnitt 1, Kapitel 3, § 13, S. 54).

eine Verwirrung ist hierbei nicht zu befürchten, weil aus dem Zusammenhang sich immer ergeben wird, ob von der Zahl oder dem Vektor Null die Rede ist.

Da ein Vektor d aus jedem Element φ des Systems Φ ein ebenfalls in Φ enthaltenes Element $d\varphi$ erzeugt, so fällt diese Operation unter den viel allgemeineren Begriff einer Abbildung des Systems Φ in sich selbst. Solche Abbildungen, die im folgenden ausschließlich durch Buchstaben e (mit Akzenten oder Indizes) bezeichnet werden sollen, gestatten sehr mannigfaltige Verbindungen und symbolische Rechnungen, die ich jetzt erkläre, um sie später auf unsere Vektoren anzuwenden. Eine Abbildung e von Φ in sich selbst erzeugt aus jedem Element φ des Systems Φ ein mit $e\varphi$ zu bezeichnendes Bild, welches wieder eine in Φ enthaltene Funktion ist, und die Abbildungen e, e' gelten stets und nur dann für eine und dieselbe — was durch $e = e'$ ausgedrückt wird —, wenn für jede Funktion φ die Identität $e\varphi = e'\varphi$ besteht. Aus je zwei Abbildungen e_1, e_2 entspringt eine als Produkt $e_1 e_2$ zu bezeichnende Abbildung, welche durch die für jede Funktion φ geltende Identität $(e_1 e_2)\varphi = e_1(e_2\varphi) = e_1 e_2 \varphi$ erklärt wird und von dem Produkt $e_2 e_1$ wohl zu unterscheiden ist; ersetzt man aber in dieser Definition die willkürliche Funktion φ durch $e_3\varphi$, wo e_3 eine beliebige Abbildung bedeutet, so ergibt sich unmittelbar die Geltung des Assoziationsgesetzes

$$(e_1 e_2)e_3 = e_1(e_2 e_3) = e_1 e_2 e_3,$$

und hieraus folgt in bekannter Weise die bestimmte Bedeutung eines aus m Abbildungen in vorgeschriebener Folge gebildeten Produkts $e_1 e_2 \cdots e_m$. Zwei Abbildungen e_1, e_2 heißen permutabel, wenn $e_1 e_2 = e_2 e_1$ ist.

Ebenso sollen Summe und Differenz $(e_1 \pm e_2)$ und, wenn λ eine Funktion in Φ ist, das Produkt λe durch

$$(e_1 \pm e_2)\varphi = e_1\varphi \pm e_2\varphi \quad \text{und} \quad (\lambda e)\varphi = \lambda(e\varphi) = \lambda e\varphi$$

erklärt werden, und eine symbolische Gleichung von der Form

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_m e_m = \sum^{\iota} \lambda_\iota e_\iota, \tag{34}$$

wo die λ_ι Funktionen in Φ sind, soll bedeuten, daß für jede Funktion φ die Identität

$$e\varphi = \sum^{\iota} \lambda_\iota e_\iota \varphi \tag{35}$$

besteht. Ersetzt man φ durch $e'\varphi$, wo e' eine beliebige Abbildung bedeutet, so ergibt sich, daß die symbolische Gleichung

$$(36) \qquad \lambda e e' = \sum^{\iota} \lambda \lambda_\iota e_\iota e',$$

wo λ eine Funktion bedeutet, eine notwendige Folge der Gleichung (34) ist, d. h. man darf eine solche Gleichung gliedweise von links mit einer Funktion λ, von rechts mit einer Funktion φ oder einer Abbildung e' multiplizieren; ebenso darf man solche Gleichungen addieren und subtrahieren, wie wenn die Abbildungen e Größen wären. Da ferner ein Vektor d alle Regeln der gewöhnlichen Differentiation befolgt, so ergibt sich aus (35) ebenso, daß auch die symbolische Gleichung

$$(37) \qquad de = \sum^{\iota} \lambda_\iota d e_\iota + \sum^{\iota} d\lambda_\iota e_\iota$$

eine Folge von (34) ist.

Wir betrachten im folgenden nur solche Abbildungen e, welche entweder selbst Vektoren oder Produkte von mehreren Vektoren sind. Hat man ein System von m Vektoren $d_1, d_2, \cdots, d_m$ und ebenso vielen Funktionen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, so ergibt sich aus der Gleichung (32), wenn man sie für jeden Vektor d_ι in Anspruch nimmt und von links mit λ_ι multipliziert, daß jede Abbildung von der Form

$$(38) \qquad d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \cdots + \lambda_m d_m = \sum^{\iota} \lambda_\iota d_\iota$$

wieder ein Vektor ist; einen solchen Vektor d nennen wir abhängig von den m Vektoren d_ι, und ebenso sagen wir, daß diese m Vektoren d_ι voneinander abhängig seien oder ein reduzibles System bilden, falls es m Funktionen λ_ι gibt, die nicht alle identisch verschwinden, und für welche der vorstehende Vektor $d = 0$ wird. Offenbar tritt dieser Fall immer ein, wenn $m > n$ ist; ist aber $m \leqq n$, so wird er dadurch charakterisiert, daß alle Determinanten m-ten Grades, die man aus den m Zeilen und aus m Spalten des Systems

$$\begin{array}{cccc} d_1 x_1, & d_1 x_2, & \cdots, & d_1 x_n \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, & \cdots, & d_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_m x_1, & d_m x_2, & \cdots, & d_m x_n \end{array}$$

bilden kann, identisch verschwinden. Wir sagen ferner, die m Vektoren d_ι in (38) seien voneinander unabhängig oder sie bilden ein irreduzibles System, wenn die Forderung $d = 0$ nur durch das identische Verschwinden aller m Funktionen λ_ι erfüllt wird. Bilden n Vektoren $d_1, d_2, \cdots, d_n$ ein solches irreduzibles System, so läßt sich jeder Vektor d in der Form

$$(39) \qquad d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \cdots + \lambda_n d_n = \sum^r \lambda_r d_r$$

darstellen, wo die n Funktionen λ_r durch d vollständig bestimmt sind. Ein solches System bilden offenbar die n partiellen Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_r}$, und die vorstehende Gleichung geht dann in

$$d = \sum^r d x_r \frac{\partial}{\partial x_r}$$

über, die mit (32) übereinstimmt.

Wir wollen jetzt zwei beliebige Vektoren d_1, d_2 betrachten und die daraus entspringenden Produkte $d_1 d_2$ und $d_2 d_1$ miteinander vergleichen. Zufolge (32) ist

$$d_2 \varphi = \sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d_2 x_r, \qquad d_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \sum^s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) d_1 x_s,$$

wo r, s die Indizes $1, 2, \cdots, n$ durchlaufen, und da jeder Vektor die Regeln der totalen Differentiation befolgt, so wird

$$d_1 d_2 \varphi = \sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d_1 d_2 x_r + \sum^{r,s} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) d_1 x_s d_2 x_r$$

und ebenso durch Vertauschung von d_1, d_2

$$d_2 d_1 \varphi = \sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d_2 d_1 x_r + \sum^{r,s} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) d_2 x_s d_1 x_r;$$

vertauscht man in der letzten Doppelsumme die beiden voneinander unabhängigen Summationsbuchstaben r, s miteinander, so ergibt sich aus der Annahme (28) ihre Identität mit der Doppelsumme, welche in der Darstellung von $d_1 d_2 \varphi$ auftritt; durch Subtraktion erhält man daher die Gleichung

$$(d_1 d_2 - d_2 d_1)\varphi = \sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} (d_1 d_2 - d_2 d_1) x_r,$$

in welcher nur die Derivierten erster Ordnung der willkürlichen Funktion φ auftreten. Definiert man daher eine neue Operation oder Abbildung (d_1, d_2) durch

$$(40) \qquad (d_1, d_2) = d_1 d_2 - d_2 d_1 = -(d_2, d_1),$$

so wird

$$(41) \qquad (d_1, d_2)\varphi = \sum^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}(d_1, d_2) x_r,$$

und durch Vergleichung mit (32) ergibt sich der wichtige Satz, daß diese Abbildung (d_1, d_2) wieder ein Vektor ist. Dieser Satz ist meines Wissens zuerst von Jacobi gefunden (in § 23 der nachgelassenen Abhandlung Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi, dieses Journal Bd. 60) und bildet eine wesentliche Grundlage seiner Untersuchungen über die partiellen Differentialgleichungen. Ich bemerke ausdrücklich, daß die von ihm mit A, B bezeichneten Operationen vollständig identisch mit unseren Vektoren sind; daß aber diese Operationen nicht nur die Gesetze der totalen Differentiation befolgen, sondern daß gerade in dieser, alles andere einschließenden Eigenschaft ihr ganzes Wesen besteht, scheint nirgends deutlich erkannt und in aller Schärfe ausgesprochen zu sein.

Daß zwei Vektoren d_1, d_2 permutabel sind, daß also $d_1 d_2 = d_2 d_1$ ist, wird jetzt durch $(d_1, d_2) = 0$ ausgedrückt. Wir betrachten nun drei beliebige Vektoren d_1, d_2, d_3 und bilden daraus die Abbildung

$$(42) \qquad (d_1; d_2, d_3) = d_1(d_2, d_3) - (d_2, d_3) d_1 = -(d_1; d_3, d_2),$$

welche zufolge des eben erhaltenen Fundamentalsatzes ebenfalls ein Vektor ist; verfährt man nach den bei (34), (36), (37) angegebenen Regeln, so erhält man

$$(d_1; d_2, d_3) = (d_1 d_2 d_3 + d_3 d_2 d_1) - (d_2 d_3 d_1 + d_1 d_3 d_2),$$

und hieraus ergibt sich durch zyklische Vertauschung und Addition der Satz*)

$$(43) \qquad (d_1; d_2, d_3) + (d_2; d_3, d_1) + (d_3; d_1, d_2) = 0.$$

Wenden wir dieselben Regeln auf die Gleichung (38) an, die wir wieder in der Form

$$(44) \qquad d = \sum^{\iota} \lambda_\iota d_\iota$$

---

*) Derselbe Satz findet sich in dem angeführten Werke von Lie (Abschnitt 1, Kapitel 5, § 26).

darstellen, und bezeichnen wir mit d' einen beliebigen Vektor, so erhalten wir

$$dd' = \sum^{\iota} \lambda_\iota d_\iota d', \quad d'd = \sum \lambda_\iota d' d_\iota + \sum d' \lambda_\iota d_\iota;$$

subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten und wendet die Symbolik (40) an, so ergibt sich die Vektorgleichung

$$(45) \qquad (d', d) = \sum^{\iota} \lambda_\iota (d', d_\iota) + \sum^{\iota} d' \lambda_\iota d_\iota$$

als eine notwendige Folge von (44).

Bezeichnet man die aus einem Vektor d durch Wiederholung entspringenden Abbildungen dd, $ddd \cdots$ bzw. mit d^2, $d^3 \cdots$, so gelten auch für diese Operationen die gewöhnlichen Regeln der Differentiation, z. B.

$$d^2 \varphi = \sum^{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} d^2 x_r + \sum^{r,s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} d x_r d x_s .$$

Genügen die n Differentiale dx_r den partiellen Differentialgleichungen $d^2 x_r = 0$ (was z. B. immer dann eintritt, wenn sie **konstant** sind), so folgt

$$d^2 \varphi = \sum^{r,s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} d x_r d x_s ,$$

und wenn man für φ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades $F = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ wählt, so wird

$$(46) \qquad d^2 F = 2 F(dx_1, dx_2, \cdots, dx_n).$$

Im Falle $n = 2$ wollen wir mit x, y die unabhängigen Variabeln und mit d einen Vektor bezeichnen, der den Bedingungen $d^2 x = d^2 y = 0$ genügt. Betrachten wir nun eine binäre quadratische Form

$$(47) \qquad F = F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

und setzen deren Diskriminante

$$(48) \qquad B^2 - 4AC = D,$$

so wird

$$(49) \qquad \begin{cases} dF = (2Ax + By)dx + (Bx + 2Cy)dy \\ \qquad = x(2Adx + Bdy) + y(Bdx + 2Cdy) \end{cases}$$

und

$$(50) \qquad \tfrac{1}{2} d^2 F = Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = F(dx, dy).$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn man die Multiplikation der binären Substitutionen benutzt, auch in der Form

$$(51)\qquad \begin{pmatrix} 2F, & dF \\ dF, & d^2F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, & y \\ dx, & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2A, & B \\ B, & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x, & dx \\ y, & dy \end{pmatrix}$$

darstellen, und aus dem Satze über die Determinante eines Produkts von Substitutionen ergibt sich

$$(52)\qquad dF^2 - 2Fd^2F = D(xdy - ydx)^2.$$

Es braucht aber kaum gesagt zu werden, daß dies nichts anderes ist als der bekannte, auch in § 1 benutzte Fundamentalsatz für die Transformation einer binären quadratischen Form F von der Diskriminante D durch eine binäre Substitution $\begin{pmatrix} x, & dx \\ y, & dy \end{pmatrix}$, und daß der vorstehende Beweis ganz unabhängig von der hier vorgetragenen Theorie der Vektoren ist; der Satz sollte nur im Anschluß an diese Theorie in einer solchen Form dargestellt werden, wie wir ihn demnächst gebrauchen werden.

§ 4.

Wir kehren jetzt zu der in § 1 geführten Untersuchung zurück, um sie in anderer Form zu wiederholen und fortzusetzen. Wir betrachten, wie dort, drei Paare von unabhängigen Variabeln (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), die wir kurz die Paare z_1, z_2, z_3 nennen, und wollen in diesem sechsfach ausgedehnten analytischen Raume die Eigenschaften einer binären trilinearen Form H untersuchen, d. h. einer ganzen Funktion, welche in bezug auf jedes der drei Paare homogen vom ersten Grade ist. Hieraus folgt zunächst

$$(53)\qquad H = x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial H}{\partial y_1} = x_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial H}{\partial y_2} = x_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial H}{\partial y_3}.$$

Bezeichnen wir (wie in § 1) mit r, s, t irgendeine Permutation der drei Indizes 1, 2, 3, so können wir drei Vektoren d_1, d_2, d_3 durch die gemeinsame Definition

$$(54)\qquad d_r\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_r}\frac{\partial H}{\partial x_r}$$

einführen, wo φ, wie immer im folgenden, jede willkürliche Funktion der sechs Variabeln bedeuten soll. Zufolge (32) ist daher

$$(55)\qquad d_r x_r = \frac{\partial H}{\partial y_r}, \quad d_r y_r = -\frac{\partial H}{\partial x_r}$$

und

(56) $$d_r x_s = d_r y_s = d_r x_t = d_r y_t = 0;$$

für den Vektor d_r verhalten sich daher die Paare z_s, z_t wie Konstanten, während $d_r x_r$, $d_r y_r$ bilineare Funktionen dieser beiden Paare, also konstant in bezug auf das Paar z_r sind. Ist daher φ homogen in bezug auf jedes einzelne Paar, und zwar vom Grade m_r in bezug auf z_r, so ist $d_r \varphi$ homogen von den Graden $m_r - 1$, $m_s + 1$, $m_t + 1$ in bezug auf die Paare z_r, z_s, z_t. Aus (54) folgt zunächst

(57) $$d_r H = 0,$$

und zufolge (55) nehmen die Gleichungen (53) die Form

(58) $$H = y_s d_s x_s - x_s d_s y_s$$

an.

Um nun den in (40) erklärten Vektor $(d_r, d_s) = -(d_s, d_r)$ zu bilden, entwickeln wir die Gleichung (57), indem wir die Operation d_r an dem Ausdruck (58) mit Rücksicht auf (56) vollziehen, woraus $y_s d_r d_s x_s = x_s d_r d_s y_s$ folgt; setzt man diese durch x_s und y_s, also auch durch $x_s y_s$ teilbare ganze Funktion $= x_s y_s F_{r,s}$, so wird

(59) $$d_r d_s x_s = x_s F_{r,s}, \quad d_r d_s y_s = y_s F_{r,s}.$$

Da nun $d_s x_s$, $d_s y_s$ bilineare Funktionen von z_r, z_t, also $d_r d_s x_s$ und $d_r d_s y_s$ homogen vom ersten Grade in bezug auf z_s, vom zweiten Grade in bezug auf z_t und frei von z_r sind, so ist $F_{r,s}$ eine binäre quadratische Form des Paares z_t mit konstanten Koeffizienten. Zufolge (56) ist nun

$$d_s d_r x_s = d_s d_r y_s = 0,$$

mithin können wir die Gleichungen (59) durch

$$(d_r, d_s) x_s = x_s F_{r,s}, \quad (d_r, d_s) y_s = y_s F_{r,s}$$

ersetzen; vertauscht man r mit s, wodurch (d_r, d_s) in $(d_s, d_r) = -(d_r, d_s)$ übergeht, so folgt hieraus

$$(d_r, d_s) x_r = -x_r F_{s,r}, \quad (d_r, d_s) y_r = -y_r F_{s,r},$$

wo $F_{s,r}$ ebenfalls eine quadratische Form des Paares z_t bedeutet. Da ferner die Variabeln x_t, y_t sich für beide Vektoren d_r, d_s wie Konstanten verhalten, so ist $(d_r, d_s) x_t = 0$, $(d_r, d_s) y_t = 0$.

Hiermit ist der Vektor (d_r, d_s) vollständig bestimmt, und zufolge (32) wird

(60) $$(d_r, d_s)\varphi = F_{r,s}\left(x_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + y_s \frac{\partial \varphi}{\partial y_s}\right) - F_{s,r}\left(x_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + y_r \frac{\partial \varphi}{\partial y_r}\right).$$

Dies Resultat gibt Veranlassung, drei neue, von der Form H ganz unabhängige Vektoren e_1, e_2, e_3 durch die gemeinsame Erklärung

(61) $$e_r\varphi = x_r\frac{\partial\varphi}{\partial x_r} + y_r\frac{\partial\varphi}{\partial y_r}$$

einzuführen, woraus

(62) $$e_r x_r = x_r, \quad e_r y_r = y_r$$

und

(63) $$e_r x_s = e_r y_s = e_r x_t = e_r y_t = 0$$

folgt. Daß eine Funktion φ homogen in bezug auf das Paar z_r, und zwar vom Grade m_r ist, wird jetzt durch $e_r\varphi = m_r\varphi$ ausgedrückt; die Gleichungen (53) lauten daher

(64) $$e_r H = H,$$

und die Gleichung (60) geht über in

$$(d_r, d_s)\varphi = F_{r,s}e_s\varphi - F_{s,r}e_r\varphi.$$

Setzt man nun $\varphi = H$ und bedenkt, daß zufolge (57) auch $(d_r, d_s)H = 0$ ist, so erhält man $(F_{r,s} - F_{s,r})H = 0$, und da wir annehmen, daß die Form H nicht identisch verschwindet, so ergibt sich $F_{r,s} = F_{s,r}$ (was übrigens auch in dem ausgeschlossenen Falle $H = 0$ gelten würde, weil zufolge (55), (59) dann beide Formen $F_{r,s}, F_{s,r}$ identisch verschwinden); wir dürfen daher diese quadratische Form des Paares z_t einfacher durch $F_t = F_t(x_t, y_t)$ bezeichnen, und zugleich nimmt die vorhergehende Gleichung die Form

(65) $$(d_r, d_s)\varphi = F_t(e_s\varphi - e_r\varphi)$$

an, welche nach (34) symbolisch auch durch

(66) $$(d_r, d_s) = F_t(e_s - e_r)$$

ausgedrückt werden kann, und die Gleichungen (59) lauten jetzt

(67) $$d_r d_s x_s = x_s F_t, \quad d_r d_s y_s = y_s F_t.$$

Daß übrigens die durch die erste Gleichung (59) vollständig definierte Größe $F_{r,s}$ symmetrisch in bezug auf r, s ist, hätte man schon dort leicht zeigen können; denn setzt man in (54) die willkürliche Funktion

$$\varphi = d_s x_s = \frac{\partial H}{\partial y_s},$$

so erhält man

$$x_s F_{r,s} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial y_s}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial y_s}\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

und da die hier auftretenden Derivierten zweiter Ordnung ebenso wie $F_{r,s}$ nur noch die beiden Variabeln x_t, y_t enthalten, so ergibt sich die genannte Symmetrie durch partielle Derivation nach x_s, und wir erhalten für die Form $F_{r,s} = F_{s,r} = F_t$ den Ausdruck

$$F_t = \frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial y_s} \frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial y_s} \frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}. \tag{68}$$

Um jetzt den Zusammenhang der gegenwärtigen Untersuchung mit der in § 1 deutlich zu machen, bemerke ich folgendes. Identifiziert man die Form H mit der dort in (12) dargestellten Funktion, so sind die Konstanten α_0, β_0, α_r, β_r bzw. die Koeffizienten von $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$, $x_r y_s y_t$, $y_r x_s x_t$; die in (55) erklärten Größen $d_r x_r$, $d_r y_r$ sind identisch mit den Funktionen X_r, Y_r in (10), und der vorstehende Ausdruck für F_t stimmt vollständig mit der dortigen Definition (1) der drei Formen F_1, F_2, F_3 überein.

Den Satz (65) wenden wir jetzt auf zwei Beispiele an. Setzt man zuerst $\varphi = F_s$, so folgt

$$d_r d_s F_s = 2 F_s F_t, \tag{69}$$

weil $d_r F_s = 0$, $e_s F_s = 2 F_s$, $e_r F_s = 0$ ist. Setzt man zweitens $\varphi = d_t x_t$ und bedenkt, daß diese Funktion bilinear in bezug auf die beiden Paare z_r, z_s, daß also

$$e_s d_t x_t = e_r d_t x_t = d_t x_t \tag{70}$$

ist, so erhält man $d_r d_s d_t x_t = d_s d_r d_t x_t$; zufolge (67) ist aber $d_s d_t x_t = x_t F_r$, und $d_r d_t x_t = x_t F_s$, mithin wird $d_r(x_t F_r) = d_s(x_t F_s)$, und da x_t für beide Vektoren d_r, d_s konstant ist, so folgt der wichtige Satz

$$d_r F_r = d_s F_s. \tag{71}$$

Diese Funktion ist also symmetrisch in bezug auf alle drei Indizes 1, 2, 3 und offenbar eine neue trilineare Form, die wir mit H' bezeichnen und die zu H adjungierte Form nennen wollen; es ist also

$$H' = d_1 F_1 = d_2 F_2 = d_3 F_3, \tag{72}$$

und der Satz (69) geht in

$$d_r H' = d_r^2 F_r = 2 F_s F_t \tag{73}$$

über. Da zufolge (55) der Vektor d_r den Bedingungen $d_r^2 x_r = d_r^2 y_r = 0$ genügt, so können wir hier die am Schlusse von § 3 bewiesenen Sätze

(50), (52) anwenden. Zufolge (50) läßt sich die Gleichung (73) auch in der Form

(74) $$F_r(d_r x_r, d_r y_r) = F_s F_t$$

darstellen, und dies Resultat ist offenbar vollständig identisch mit dem Hauptsatz (11) in § 1, welcher dort auf ganz anderem Wege bewiesen ist. Bezeichnet man ferner mit D_r die Diskriminante der Form F_r, so folgt aus (52) die Gleichung

$$d_r F_r^2 - 2 F_r d_r^2 F_r = D_r (x_r d_r y_r - y_r d_r x_r)^2,$$

welche zufolge (72), (73), (58) die Form

$$H'^2 - 4 F_r F_s F_t = D_r H^2$$

annimmt; da $F_r F_s F_t = F_1 F_2 F_3$ und H, H' symmetrisch in bezug auf die Indizes 1, 2, 3 sind, so folgt hieraus, daß die Formen F_1, F_2, F_3 dieselbe Diskriminante

(75) $$D = D_1 = D_2 = D_3$$

besitzen, was mit dem Satze (3) in § 1 übereinstimmt, und zugleich ergibt sich, daß zwischen den beiden trilinearen Formen H, H' und den drei quadratischen Formen F_1, F_2, F_3 die Identität

(76) $$H'^2 - DH^2 = 4 F_1 F_2 F_3$$

besteht.

Der Satz (71), auf welchem die Einführung der zu H adjungierten Form H' beruht, läßt sich auf einem zwar nicht kürzeren, aber mehr symmetrischen Wege beweisen, den ich hier noch andeuten will. Aus den Definitionen (55), (56), (62), (63) ergibt sich leicht die Vektoridentität

(77) $$(d_t, e_r) = - d_t;$$

vertauscht man r mit s und subtrahiert, so folgt $(d_t, e_s - e_r) = 0$, d. h. die beiden Vektoren d_t und $(e_s - e_r)$ sind permutabel. Unterwirft man daher die Gleichung (66) nach der in (45) angegebenen Regel dem Vektor d_t und benutzt das in (42) erklärte Symbol, so erhält man

(78) $$(d_t; d_r, d_s) = d_t F_t (e_s - e_r),$$

und aus dem Satze (43) folgt

$$(d_2 F_2 - d_3 F_3) e_1 + (d_3 F_3 - d_1 F_1) e_2 + (d_1 F_1 - d_2 F_2) e_3 = 0;$$

da aber die drei Vektoren e_1, e_2, e_3 zufolge ihrer Definition (62), (63) offenbar ein irreduzibles System bilden, so müssen die drei Differenzen $(d_r F_r - d_s F_s)$ identisch verschwinden, wie zu beweisen war.

Ich bemerke endlich noch folgendes. Wenn für eine partikuläre Form H die Form F_1 identisch verschwindet, so muß zufolge (72), (74) auch H' und mindestens eine der beiden Formen F_2, F_3 identisch verschwinden. Man findet leicht, daß das Verschwinden der beiden Formen F_1, F_2 stets und nur dann eintritt, wenn $H = h_{1,2} h_3$ ist, wo $h_{1,2}$ eine bilineare Funktion der Paare z_1, z_2, und h_3 eine lineare Funktion des Paares z_3 bedeutet. Verschwinden alle drei Formen F_1, F_2, F_3, so ist $H = h_1 h_2 h_3$ ein Produkt von drei linearen Faktoren, und umgekehrt.

§ 5.

Es liegt nahe, die eben geführte Untersuchung von der Form H auf die zu ihr adjungierte Form H' zu übertragen. Bezeichnet man mit d'_r, F'_r die Vektoren und quadratischen Formen, die hierbei aus den auf H bezüglichen Vektoren und Formen d_r, F_r hervorgehen, während die in (61) erklärten Vektoren e_r ihre von H gänzlich unabhängige Bedeutung behalten, so ist

(79) $$d'_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial H'}{\partial y_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_r} \frac{\partial H'}{\partial x_r};$$

hieraus folgt zunächst die mit (57) analoge Gleichung

(80) $$d'_r H' = 0,$$

und durch den Vergleich mit (54), (73) ergibt sich

(81) $$d'_r H = -d_r H' = -2 F_s F_t;$$

ebenso entspricht der Gleichung (64) die Gleichung

(82) $$e_r H' = H'.$$

Sodann bemerken wir, daß die drei Vektoren d_r, e_r, d'_r gewiß ein reduzibles System bilden, weil die beiden Paare z_s, z_t sich gegen sie wie Konstanten verhalten; es muß also eine Identität von der Form

$$\lambda d_r + \lambda' d'_r + \mu e_r = 0$$

bestehen, wo λ, λ', μ Funktionen bedeuten, die nicht alle verschwinden; unterwirft man dieser Identität die beiden Formen H, H' und berücksichtigt (57), (64), (80), (81), (82), so folgt

$$\lambda'(-2F_s F_t) + \mu H = 0, \quad \lambda(2 F_s F_t) + \mu H' = 0,$$

mithin wird

(83) $$-H' d_r + H d'_r + 2 F_s F_t e_r = 0.$$

Wendet man dieses Resultat auf die Funktion F_r an und bedenkt, daß $d_r F_r = H'$, $e_r F_r = 2 F_r$ ist, so folgt

$$-H'^2 + H d'_r F_r + 4 F_r F_s F_t = 0,$$

und zufolge (76) ergibt sich

$$(84) \qquad d'_r F_r = DH.$$

Überträgt man jetzt den Satz (66) auf die Form H', so erhält man

$$(d'_r, d'_s) = F'_t(e_s - e_r),$$

was als Definition der quadratischen Form F'_t angesehen werden kann. Läßt man diesen Vektor auf die Form F_s wirken, so wird die rechte Seite $= 2 F_s F'_t$; da ferner $d'_r F_s = 0$, $d'_s F_s = DH$, also $(d'_r, d'_s) F_s = d'_r d'_s F_s = D d'_r H = D(-2 F_s F_t)$ ist, so folgt

$$(85) \qquad F'_t = -D F_t;$$

die gemeinsame Diskriminante D' der drei Formen F'_1, F'_2, F'_3 ist daher

$$(86) \qquad D' = D^3,$$

und die vorhergehende Vektoridentität wird

$$(87) \qquad (d'_r, d'_s) = -D F_t(e_s - e_r) = -D(d_r, d_s).$$

Endlich folgt aus der Definition (72) der zu H adjungierten Form H', daß die zu H' adjungierte Form $= d'_t F'_t = -D d'_t F_t = -D^2 H$, also die mit $(-D^2)$ multiplizierte erste Form H ist, und hiermit leuchtet ein, daß die Identität (76) bei dem Übergang von H zu H' sich nur mit $(-D^3)$ multipliziert. —

Die Form H und ihre Adjungierte H' bilden die Basis einer Schar von unendlich vielen trilinearen Formen

$$(88) \qquad H'' = Hp + H'q,$$

wo p, q zwei willkürliche Konstanten bedeuten. Behandelt man eine solche Form H'' ebenso wie H in § 4 und definiert drei ihr entsprechende Vektoren d''_r durch

$$(89) \qquad d''_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial H''}{\partial y_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_r} \frac{\partial H''}{\partial x_r},$$

so wird offenbar

$$(90) \qquad d''_r H''_r = 0, \quad d''_r = p d_r + q d'_r,$$

und aus den für die Vektoren d_r, d'_r gefundenen Resultaten ergibt sich

$$(91) \qquad d''_r H = -2 F_s F_t q, \quad d''_r H' = +2 F_s F_t p,$$

$$(92) \qquad d''_r F_r = H' p + DHq,$$

also

(93) $$(d''_r, d''_s) F_s = d''_r d''_s F_s = 2 F_s F_t m,$$

wo

(94) $$m = p^2 - Dq^2.$$

Die aus der Form H'' entspringenden quadratischen Formen F''_1, F''_2, F''_3 sind nach (66) durch die Vektoridentität

$$(d''_r, d''_s) = F''_t (e_s - e_r)$$

zu erklären, und aus (93) folgt

(95) $$F''_t = m F_t,$$

(96) $$(d''_r, d''_s) = m F_t (e_s - e_r) = m (d_r, d_s).$$

Die Trias der zu den trilinearen Formen H'' der Schar (88) gehörenden quadratischen Formen ist daher invariant, wenn man von gemeinsamen konstanten Faktoren m absieht. Drei solche Formen (95) besitzen die gemeinsame Diskriminante

$$D'' = Dm^2,$$

und für die zu H'' adjungierte Form $H''' = d''_r F''_r$ findet man nach (95), (92) den Ausdruck

(97) $$H''' = m(H'p + DHq);$$

diese Form ist daher ebenfalls in der Schar (88) enthalten.

Um endlich die aus (76) hervorgehende Identität

(98) $$H'''^2 - D'' H''^2 = 4 F''_1 F''_2 F''_3$$

zu bestätigen, wollen wir die Quadratwurzeln aus den Diskriminanten D und $D'' = Dm^2$ einführen und ihren Zusammenhang immer so bestimmen, daß

(99) $$\sqrt{D''} = m\sqrt{D}$$

wird; dann folgt aus (88), (97) die Gleichung

(100) $$H''' + H''\sqrt{D''} = m(p + q\sqrt{D})(H' + H\sqrt{D});$$

ersetzt man hierin $\sqrt{D}$ durch $-\sqrt{D}$, also auch $\sqrt{D''}$ durch $-\sqrt{D''}$, und multipliziert beide Gleichungen miteinander, so folgt

$$H'''^2 - D'' H''^2 = m^3 (H'^2 - DH^2),$$

was zufolge (76), (95) mit der zu beweisenden Gleichung (98) übereinstimmt. —

Der in (96) erhaltene Satz gibt noch zu folgenden Bemerkungen Veranlassung. Entwickelt man den Vektor (d''_r, d''_s) nach den in § 3 angegebenen Regeln aus der Definition (90), so wird

$$(d''_r, d''_s) = p^2(d_r, d_s) + pq\{(d_r, d'_s) + (d'_r, d_s)\} + q^2(d'_r, d'_s);$$

die Vergleichung mit (96), wo $m = p^2 - Dq^2$, ergibt daher wieder den Satz (87), und da der mit pq multiplizierte Vektor verschwinden muß, so erhält man den neuen Satz, daß der Vektor

$$(101)\qquad (d_r, d'_s) = (d_s, d'_r),$$

also symmetrisch in bezug auf die beiden Indizes r, s ist. Dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man nach der in § 3 angegebenen Regel (45) die Identität (83) dem Vektor d_s unterwirft und hierbei die Sätze (66), (77) benutzt; auf diese Weise erhält man den symmetrischen Ausdruck

$$(102)\qquad H(d_s, d'_r) = F_t\{2F_r d_r - H'e_r + 2F_s d_s - H'e_s\},$$

der sich aber noch einfacher darstellen läßt.

Führt man nämlich noch drei Vektoren δ_1, δ_2, δ_3 durch die gemeinsame Erklärung

$$(103)\qquad \delta_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\frac{\partial F_r}{\partial y_r} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\frac{\partial F_r}{\partial x_r}$$

ein*), so folgt unmittelbar

$$(104)\qquad \delta_r F_r = 0;$$

vergleicht man ferner (103) mit den Definitionen (54), (79) und berücksichtigt (72), (84), so erhält man

$$(105)\qquad \delta_r H = -d_r F_r = -H',\quad \delta_r H' = -d'_r F_r = -DH.$$

Die drei Vektoren δ_r, d_r, e_r bilden offenbar wieder ein reduzibles System, und wenn man ähnlich verfährt, wie bei der Herleitung des Satzes (83), indem man die beiden vorstehenden Ausdrücke für $\delta_r F_r$, $\delta_r H$ benutzt, so ergibt sich

$$(106)\qquad H\delta_r = 2F_r d_r - H'e_r,$$

wodurch die Gleichung (102) in

$$(107)\qquad (d_s, d'_r) = F_t(\delta_r + \delta_s) = (d_r, d'_s)$$

übergeht. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen (83), (106) einmal d_r, dann e_r, mit Rücksicht auf (76), so erhält man noch zwei ähnliche Relationen, die sich aber auch aus (104), (105) ableiten

*) Ich bemerke beiläufig, daß hieraus $\delta_r^2 x_r = Dx_r$, $\delta_r^2 y_r = Dy_r$ folgt.

ließen; das System dieser vier Gleichungen, durch welche die Abhängigkeit von je drei der vier Vektoren e_r, d_r, d'_r, δ_r ausgedrückt wird, ist das folgende:

$$(108)\quad \left\{\begin{array}{rrrrl} * & DHd_r - & H'd'_r + & 2F_sF_t\delta_r & = 0, \\ -DHe_r & * & +2F_rd'_r - & H'\delta_r & = 0, \\ H'e_r & -2F_rd_r & * + & H\delta_r & = 0, \\ -2F_sF_te_r + & H'd_r - & Hd'_r & * & = 0. \end{array}\right.$$

§ 6.

Da jede binäre quadratische Form ein Produkt von zwei linearen Faktoren ist, so folgt aus (76), daß jede der beiden konjugierten trilinearen Formen

$$(109)\qquad U = \tfrac{1}{2}(H' + H\sqrt{D}), \quad V = \tfrac{1}{2}(H' - H\sqrt{D}),$$

deren Produkt

$$(110)\qquad UV = F_1F_2F_3$$

ist, und welche als spezielle Fälle in der Schar der Formen (88) enthalten sind, ein Produkt von drei linearen Faktoren ist. Wir nehmen im folgenden an, daß H eine allgemeine Form ist, d. h. daß ihre acht Koeffizienten α, β willkürliche Konstanten sind, und bezeichnen mit

$$(111)\qquad \lambda_r = x_r + \omega_r y_r, \quad \mu_r = x_r + \omega'_r y_r$$

lineare Funktionen des Paares z_r, in denen die Variable x_r den Koeffizient 1 hat. Bezeichnet man ferner die Koeffizienten der Formen F_r wie in (1), so kann man zufolge (110) gleichzeitig

$$(112)\qquad U = L\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad V = M\mu_1\mu_2\mu_3$$

und

$$(113)\qquad F_r = A_r\lambda_r\mu_r$$

setzen, wo L, M Konstanten sind, die der Bedingung

$$(114)\qquad LM = A_1A_2A_3$$

genügen*), und die Konstanten ω_r, ω'_r sind als Wurzeln einer quadratischen Gleichung in ihrem Komplex durch

$$(115)\qquad A_r(\omega_r + \omega'_r) = B_r, \quad A_r\omega_r\omega'_r = C_r$$

bestimmt; es kommt darauf an, sie genau voneinander zu unterscheiden.

---

*) Bezeichnet man die den Koeffizienten α, β der Form H entsprechenden Koeffizienten von H' mit α', β', so ist offenbar

$$2L = \alpha'_0 + \alpha_0\sqrt{D}, \quad 2M = \alpha'_0 - \alpha_0\sqrt{D}.$$

Läßt man die Form H'' in (88) mit der Form U in (109) zusammenfallen, indem man $2p = \sqrt{D}$, $2q = 1$ setzt, und behält für diese spezielle Form $H'' = U$ die Vektorbezeichnung d_r'' bei, so verschwindet die Konstante m in (94), mithin verschwinden zufolge (95) auch die drei quadratischen Formen F_r'' identisch, was mit den am Schluß von § 4 gemachten Bemerkungen vollständig übereinstimmt. Aus der Definition von d_r'' und aus (112) ergibt sich sodann

$$d_r'' x_r = \frac{\partial U}{\partial y_r} = L \lambda_s \lambda_t \omega_r, \quad d_r'' y_r = -\frac{\partial U}{\partial x_r} = -L \lambda_s \lambda_t,$$

und hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$d_r'' \lambda_r = 0, \quad d_r'' \mu_r = L \lambda_s \lambda_t (\omega_r - \omega_r'),$$

deren erste auch eine unmittelbare Folge der Gleichung $d_r'' H'' = d_r'' U = 0$ ist. Zufolge (113) wird daher

$$d_r'' F_r = A_r \lambda_r d_r'' \mu_r = A_r U (\omega_r - \omega_r'),$$

und da andererseits die Gleichung (92) in

$$d_r'' F_r = \tfrac{1}{2}(H' \sqrt{D} + DH) = U \sqrt{D}$$

übergeht, so ergibt die Vergleichung beider Ausdrücke das unterscheidende Resultat

$$(116) \qquad A_r (\omega_r - \omega_r') = \sqrt{D}.$$

Verbindet man dasselbe mit (115), so folgt

$$(117) \qquad \omega_r = \frac{B_r + \sqrt{D}}{2 A_r}, \quad \omega_r' = \frac{B_r - \sqrt{D}}{2 A_r},$$

und hierdurch sind die sechs linearen Funktionen λ_r, μ_r vollständig bestimmt.

Wir kehren nun noch einmal zu den durch die Form H gegebenen Vektoren d_r zurück, um ihnen die Funktionen U, V, λ_r, μ_r zu unterwerfen. Da $d_r H = 0$ und $d_r H' = 2 F_s F_t$ ist, so folgt aus den Definitionen (109)

$$d_r U = d_r V = F_s F_t;$$

andererseits ergibt sich aus den Darstellungen (112)

$$d_r U = L \lambda_s \lambda_t d_r \lambda_r, \quad d_r V = M \mu_s \mu_t d_r \mu_r;$$

vergleicht man diese Ausdrücke mit einander und berücksichtigt (113), (114), so folgt

$$(118) \qquad A_r d_r \lambda_r = M \mu_s \mu_t, \quad A_r d_r \mu_r = L \lambda_s \lambda_t,$$

und die vorhergehenden Ausdrücke vereinigen sich in

$$d_r U = d_r V = F_s F_t = A_r d_r \lambda_r d_r \mu_r. \tag{119}$$

Bedenkt man nun, daß die homogenen linearen Funktionen λ_r, μ_r, wenn x_r, y_r durch $d_r x_r$, $d_r y_r$ ersetzt werden, in $d_r \lambda_r$, $d_r \mu_r$ übergehen, so läßt sich diese letzte Gleichung zufolge (113) auch in der Form

$$F_r(d_r x_r, d_r y_r) = F_s F_t$$

darstellen, die wir früher in (74) erhalten haben, und die, wie schon bemerkt, mit dem Hauptsatze (11) in § 1 übereinstimmt. Die Gleichungen (118) dagegen enthalten eine wichtige Ergänzung zu diesem Transformationssatz, weil sie lehren, in welcher Weise hierbei die beiden Linearfaktoren von F_r sich transformieren, und dies ist von Bedeutung für die Art, in welcher nach Gauß die Formen F_s, F_t in die Transformation eintreten (vgl. den Schluß von § 2).

In ähnlicher Weise folgt aus (105), wenn man den Vektor δ_r auf die Darstellungen (109), (112) wirken läßt,

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_r U = -U\sqrt{D}, & \delta_r V = V\sqrt{D}, \\ \delta_r \lambda_r = -\lambda_r \sqrt{D}, & \delta_r \mu_r = \mu_r \sqrt{D}, \end{array}\right. \tag{120}$$

und hieraus nach (113) wieder die Gleichung (104).

§ 7.

Es ist schon in § 1 bemerkt, daß die Diskriminante D der drei Formen F_1, F_2, F_3 eine homogene Funktion vierten Grades von den acht Konstanten α, β ist, welche nach § 4 zugleich die Koeffizienten der Form H sind. Ich will jetzt zum Schluß noch auf die beherrschende Stellung aufmerksam machen, welche diese Funktion D einnimmt, indem ich nachweise, daß aus ihren partiellen Derivierten auch die Koeffizienten der zu H adjungierten Form H' und die der drei Formen F_1, F_2, F_3 sich bilden lassen.

Nach § 4 sind α_0, β_0, α_r, β_r bzw. die Koeffizienten der Produkte $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$, $x_r y_s y_t$, $y_r x_s x_t$ in H, d. h. es ist

$$\alpha_0 = \frac{\partial^3 H}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \quad \beta_0 = \frac{\partial^3 H}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3},$$

$$\alpha_r = \frac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial y_s \partial y_t}, \quad \beta_r = \frac{\partial^3 H}{\partial y_r \partial x_s \partial x_t},$$

und wir wollen mit α_0', β_0', α_r', β_r' die entsprechenden Koeffizienten in der adjungierten Form H' bezeichnen. Für die letztere ergibt sich aus ihrer Definition (72) der Ausdruck

$$H' = d_r F_r = \frac{\partial F_r}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial F_r}{\partial y_r}\frac{\partial H}{\partial x_r}$$
$$= (2A_r x_r + B_r y_r)\frac{\partial H}{\partial y_r} - (B_r x_r + 2C_r y_r)\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

mithin wird

$$\frac{\partial H'}{\partial x_r} = 2A_r\frac{\partial H}{\partial y_r} - B_r\frac{\partial H}{\partial x_r},\quad \frac{\partial H'}{\partial y_r} = B_r\frac{\partial H}{\partial y_r} - 2C_r\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

und durch fortgesetzte Derivationen erhält man daher

$$(121)\qquad \begin{cases} \alpha_0' = 2A_r\beta_r - B_r\alpha_0, & \beta_0' = B_r\beta_0 - 2C_r\alpha_r, \\ \alpha_r' = 2A_r\beta_0 - B_r\alpha_r, & \beta_r' = B_r\beta_r - 2C_r\alpha_0. \end{cases}$$

Aus den in (2) angegebenen Ausdrücken für die Koeffizienten A_r, B_r, C_r der Form F_r folgt nun

$$\frac{\partial C_r}{\partial\alpha_0} = \frac{\partial A_r}{\partial\beta_0} = \frac{\partial C_r}{\partial\alpha_r} = \frac{\partial A_r}{\partial\beta_r} = 0,$$
$$\frac{\partial B_r}{\partial\beta_0} = \frac{\partial A_r}{\partial\alpha_r} = -\alpha_0,\quad \frac{\partial B_r}{\partial\alpha_0} = \frac{\partial C_r}{\partial\beta_r} = -\beta_0,$$
$$\frac{\partial A_r}{\partial\alpha_0} = \frac{\partial B_r}{\partial\beta_r} = -\alpha_r,\quad \frac{\partial C_r}{\partial\beta_0} = \frac{\partial B_r}{\partial\alpha_r} = -\beta_r,$$

mithin erhält man mit Rücksicht auf $D = B_r^2 - 4A_rC_r$ für die Koeffizienten von H' die Formeln

$$\alpha_0' = -2A_r\frac{\partial C_r}{\partial\beta_0} + B_r\frac{\partial B_r}{\partial\beta_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial\beta_0},$$
$$\beta_0' = -B_r\frac{\partial B_r}{\partial\alpha_0} + 2C_r\frac{\partial A_r}{\partial\alpha_0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial\alpha_0},$$
$$\alpha_r' = -2A_r\frac{\partial C_r}{\partial\beta_r} + B_r\frac{\partial B_r}{\partial\beta_r} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial\beta_r},$$
$$\beta_r' = -B_r\frac{\partial B_r}{\partial\alpha_r} + 2C_r\frac{\partial A_r}{\partial\alpha_r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial\alpha_r}.$$

Bezeichnet man daher mit (α, β) jedes der vier Paare (α_0, β_0), (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) und mit (α', β') das entsprechende Paar für die Form H', so wird

$$(122)\qquad \alpha' = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial\beta},\quad \beta' = -\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial\alpha}.$$

Hieraus erhält man für die beiden Paare (α'_s, β'_s), (α'_t, β'_t), indem man den Ausdruck $D = B_r^2 - 4A_rC_r$ beibehält und die Derivierten von A_r, B_r, C_r gemäß (2) bildet, die Ausdrücke

$$(123)\qquad \begin{cases} \alpha'_s = B_r\alpha_s - 2C_r\beta_t, & \beta'_s = 2A_r\alpha_t - B_r\beta_s, \\ \alpha'_t = B_r\alpha_t - 2C_r\beta_s, & \beta'_t = 2A_r\alpha_s - B_r\beta_t. \end{cases}$$

Bedient man sich der Bezeichnung für die allgemeine Komposition von rechteckigen, nach Zeilen und Spalten geordneten Größensystemen (Matrizen), so kann man die acht Gleichungen (121), (123) in

$$(124)\qquad \begin{pmatrix} B_r, & -2C_r \\ 2A_r, & -B_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_r, & \alpha_s, & \alpha_t, & \beta_0 \\ \alpha_0, & \beta_t, & \beta_s, & \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_r, & \alpha'_s, & \alpha'_t, & \beta'_0 \\ \alpha'_0, & \beta'_t, & \beta'_s, & \alpha'_r \end{pmatrix}$$

zusammenfassen; permutiert man die Indizes r, s, t, so erhält man für jeden der acht Koeffizienten α', β' drei äußerlich verschiedene Ausdrücke, die alle aus (122) entspringen, wenn man D wie in (3) durch die Koeffizienten der Formen F_1 oder F_2 oder F_3 darstellt.

Hiermit ist gezeigt, daß die Koeffizienten der zu H adjungierten Form H' durch Derivierte erster Ordnung von D dargestellt werden; durch fortgesetzte Derivation erhält man für die Koeffizienten der quadratischen Formen F_1, F_2, F_3 die folgenden Ausdrücke

$$(125)\qquad \begin{cases} 6A_r = \dfrac{\partial^2 D}{\partial\beta_0\,\partial\beta_r} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_s\,\partial\alpha_t}, \quad 6C_r = \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_0\,\partial\alpha_r} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\beta_s\,\partial\beta_t}, \\ 6B_r = \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_s\,\partial\beta_s} + \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_t\,\partial\beta_t} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_r\,\partial\beta_r} - \dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0}, \end{cases}$$

deren Analogie mit den Darstellungen (2) von $-C_r$, $-A_r$, $+B_r$ ersichtlich ist; die Ausführung der Rechnung mag aber dem Leser überlassen bleiben.

Das in (122) erhaltene Resultat reizt dazu, in dem von den sieben Paaren (α, β), (x_r, y_r) gebildeten, vierzehnfach ausgedehnten Raume einen Vektor δ einzuführen, welcher durch

$$(126)\qquad \delta\alpha = \alpha', \quad \delta\beta = \beta', \quad \delta x_r = \delta y_r = 0,$$

also durch

$$(127)\qquad \delta\varphi = \frac{1}{2}\sum^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial D}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\partial D}{\partial\alpha}\right)$$

definiert wird, wo φ eine willkürliche Funktion bedeutet, und die Summe über alle vier Paare (α, β) auszudehnen ist. Da H eine homogene lineare Funktion der Größen α, β ist, so folgt aus (126) unmittelbar

$$(128)\qquad \delta H = H'.$$

Ersetzt man φ in (127) durch $\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_r}$, so folgt

(129) $$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_r}, \quad \delta \frac{\partial \varphi}{\partial y_r} = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y_r},$$

d. h. der Vektor δ ist permutabel mit den Vektoren $\frac{\partial}{\partial x_r}$, $\frac{\partial}{\partial y_r}$; bedeutet daher ψ_r eine beliebige Funktion, welche frei von den beiden Variabeln x_r, y_r des Paares z_r ist, so hat $\delta \psi_r$ dieselbe Eigenschaft, und wenn ε_r irgend einen der vier in (54), (61), (79), (103) erklärten Vektoren d_r, e_r, d'_r, δ_r bedeutet, die alle nur auf das Paar z_r wirken, so folgt hieraus

$$(\delta, \varepsilon_r)\psi_r = \delta \varepsilon_r \psi_r - \varepsilon_r \delta \psi_r = 0,$$

weil $\varepsilon_r \psi_r = \varepsilon_r \delta \psi_r = 0$ ist. Um also einen solchen Vektor (δ, ε_r) vollständig zu bestimmen, braucht man nur noch die beiden Funktionen $(\delta, \varepsilon_r) x_r$ und $(\delta, \varepsilon_r) y_r$ zu ermitteln.

Beginnt man mit dem Vektor $\varepsilon_r = d_r$ und berücksichtigt (126), (128), (129), so erhält man

$$(\delta, d_r) x_r = \delta d_r x_r = \delta \frac{\partial H}{\partial y_r} = \frac{\partial \delta H}{\partial y_r} = \frac{\partial H'}{\partial y_r} = d'_r x_r,$$

$$(\delta, d_r) y_r = \delta d_r y_r = \delta\left(-\frac{\partial H}{\partial x_r}\right) = -\frac{\partial \delta H}{\partial x_r} = -\frac{\partial H'}{\partial x_r} = d'_r y_r,$$

und da zugleich $(\delta, d_r)\psi_r = 0 = d'_r \psi_r$ ist, so folgt

(130) $$(\delta, d_r) = d'_r.$$

Verfährt man ähnlich mit dem Vektor $\varepsilon_r = e_r$, so ergibt sich, daß δ permutabel mit e_r, also auch mit $(e_s - e_r)$ ist, d. h. es ist

(131) $$(\delta, e_r) = 0, \quad (\delta, e_s - e_r) = 0.$$

Wendet man nun den Satz (43) auf die drei Vektoren δ, d_r, d_s an und bedenkt, daß

$$(d_r, d_s) = F_t(e_s - e_r), \quad (d_s, \delta) = -d'_s, \quad (\delta, d_r) = d'_r$$

ist, so folgt zunächst

$$(\delta, F_t(e_s - e_r)) - (d_r, d'_s) + (d_s, d'_r) = 0;$$

zufolge (101) ist aber $(d_r, d'_s) = (d_s, d'_r)$, und da nach der in (45) angegebenen Regel

$$(\delta, F_t(e_s - e_r)) = F_t(\delta, e_s - e_r) + \delta F_t(e_s - e_r)$$

ist, wo das erste Glied rechts nach (131) verschwindet, so ist $\delta F_t(e_s - e_r) = 0$, und hieraus folgt

(132) $$\delta F_t = 0; \quad \delta A_t = \delta B_t = \delta C_t = 0,$$

also auch

(133) $$\delta D = 0,$$

was übrigens auch unmittelbar aus (127) folgt.

Läßt man jetzt den Vektor (130) auf F_r wirken, so wird $\delta d_r F_r - d_r \delta F_r = d'_r F_r$, und da $d_r F_r = H'$, $\delta F_r = 0$, $d'_r F_r = DH$ ist, so folgt

(134) $$\delta^2 H = \delta H' = DH,$$

mithin

(135) $$\delta^2 \alpha = \delta \alpha' = D\alpha, \quad \delta^2 \beta = \delta \beta' = D\beta,$$

was sich auch aus (121) mit Rücksicht auf $\delta A_r = \delta B_r = \delta C_r = 0$ leicht ergeben würde.

Verfährt man endlich auf dieselbe Weise mit den Vektoren d'_r, δ_r, so erhält man, wie der Leser sofort finden wird,

(136) $$(\delta, d'_r) = D d_r, \quad (\delta, \delta_r) = 0.$$

Erläuterungen zur vorstehenden Abhandlung.

Dedekind behandelt hier wieder die Komposition der quadratischen Formen, ein Problem, das er schon wiederholt in den Supplementen zu Dirichlets Zahlentheorie studiert hat. Die Bemerkung Dedekinds, daß jede bilineare Form die entsprechenden komponierbaren Formen bestimmt, hat schon Cayley (Journ. f. Math. **39** (1850), S. 14—15) gemacht. Arndt (Arch. f. Math. u. Phys. **15** (1850), S. 429—480) hat sich auch mit ähnlichen Fragen beschäftigt. L. E. Dickson (History of the theory of numbers, Bd. 3, S. 75) bemerkt: „Dedekind war offenbar nicht mit den Resultaten von Arndt und Cayley bekannt, indem er das Problem von neuem angriff und eine einfache und symmetrische Behandlungsweise entwickelte."

Eine übersichtliche Darstellung der Geschichte der Theorie der Komposition der quadratischen Formen findet man in dem eben erwähnten Buch von L. E. Dickson, Bd. 3, Kap. 3. Unter den wichtigsten neueren Arbeiten über die Komposition quadratischer Formen sollen die folgenden erwähnt werden: H. Weber, Gött. Nachr. 1907, S. 86—100. A. Speiser, Festschrift zu H. Weber, 1912, S. 375—395. H. Brandt, Journ. f. Math. **143** (1913), S. 106—127; **150** (1920), S. 1—46. Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 153—160; Math. Ann. **91** (1924), S. 300—315.

Ore.
