## XXI.

# Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen komplexen Größen.

[Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1887, S. 1—7.]

Seit dem Erscheinen der auf diese Theorie bezüglichen Abhandlung des Herrn Weierstrass (im Jahrgang 1884 dieser Nachrichten, S. 395) und der meinigen (1885, S. 141) habe ich bei mündlichen und brieflichen Unterhaltungen öfter die Erfahrung gemacht, daß die in beiden Schriften niedergelegten Auffassungen nicht mit hinreichender Deutlichkeit voneinander unterschieden werden. Da vielleicht meine Darstellung hieran die Schuld trägt, so erlaube ich mir noch einmal auf denselben Gegenstand zurückzukommen. Es handelt sich um die Auslegung des bekannten Ausspruches von Gauß:

„Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können. ihre Beantwortung finden wird.“ (Gauß' Werke, Bd. II, S. 178.)

Herr Weierstrass faßt (S. 410—411 l. c.) seine Ansicht in folgende Worte:

„Wenn ich nun mit dem Ergebnis der vorstehenden Untersuchung die im Anfange angeführte Gaußische Bemerkung, daß komplexe Größen mit mehr als zwei Haupteinheiten in der allgemeinen Arithmetik unzulässig seien, zusammenhalte, so scheint es mir, daß Gauß diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, daß das Produkt zweier Größen, sobald $n > 2$, verschwinden kann, ohne daß einer seiner Faktoren den Wert Null hat. Denn hätte er diesen Umstand nicht als ein unübersteigliches Hindernis für die Einführung der allgemeinen komplexen Größen in die Arithmetik betrachtet, so würde es ihm schwerlich entgangen sein, daß sich eine Arithmetik dieser Größen begründen läßt, in welcher alle Sätze entweder mit denen der Arithmetik der gewöhnlichen komplexen Größen identisch sind oder doch in der letzteren ihr Analogon finden. Er würde dann auch ohne Zweifel seinen Ausspruch dahin modifiziert haben, daß die Einführung der allgemeinen komplexen Größen in die Arithmetik zwar nicht unstatthaft, wohl aber überflüssig sei. In der Tat geht aus dem oben (S. 407) ausgesprochenen Satze hervor, daß die Arithmetik der allgemeinen komplexen Größen zu keinem Resultat führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der komplexen Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne weiteres ableitbar wäre."

Von dieser Auffassung weicht die meinige (vgl. S. 142, 147, 156 l. c.) erheblich, nämlich in dem Hauptpunkte ab, daß ich den Größen, welche im vorstehenden allgemeine komplexe Größen genannt werden, den Charakter der Neuheit gänzlich versage; es handelt sich in unserem Jahrhundert nicht mehr um ihre Zulassung, sie sind vielmehr schon lange und mit großem Erfolge in die allgemeine Arithmetik zugelassen; sie bilden, wie gesagt, keine neue oder — um buchstäblich genau mit Gauß zu reden — keine andere Art von Größen, sondern sie sind geradezu identisch mit den überall in der Algebra eingebürgerten mehrwertigen gewöhnlichen Zahlen; es ist unmöglich, jene von diesen zu unterscheiden, und die letzteren bieten bei folgerichtiger Ausbildung ihres Begriffes auch schon die erwähnte Erscheinung dar, daß ein Produkt aus nicht verschwindenden Faktoren sehr wohl verschwinden kann. In allem Diesen glaube ich die Bedeutung und die volle Bestätigung des Ausspruches von Gauß zu erkennen.

Da ich den in meiner Schrift gegebenen allgemeinen Beweisen, auf welche ich diese meine Auffassung gründe, und welche, wie ich gern hinzufüge, dem Wesen nach auch in den analytischen Entwicklungen des Herrn Weierstrass enthalten sind, nichts hinzuzufügen habe, so begnüge ich mich, die beiden verschiedenen Auffassungen durch einige Beispiele zu erläutern, weil diese oft eine weit größere überzeugende Kraft besitzen, als eine allgemeine Theorie.

Jedes Beispiel für unsere Untersuchung ist dann ein vollkommen bestimmtes, sobald die Produkte von je zwei der Haupteinheiten linear durch die letzteren dargestellt sind. Ich wähle zunächst ein System von drei Haupteinheiten $e_1$, $e_2$, $e_3$ mit folgenden Grundformeln:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ e_2^2 &= -2e_2 - 2e_2 - e_3 \\ e_3^2 &= -e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ e_2 e_3 &= e_1 + e_2 \\ e_3 e_1 &= e_2 + e_3 \\ e_1 e_2 &= e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Dieselben erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, alle die Bedingungen, welche sich aus dem sogenannten assoziativen Gesetz der Multiplikation ergeben. Behält man ferner die von mir (l. c. S. 147) gewählten Bezeichnungen bei, so findet man

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = -1 \\ \tau_{11} &= \tau_{22} = \tau_{33} = 5 \\ \tau_{23} &= \tau_{31} = \tau_{12} = -2 \\ \Delta &= 49, \end{aligned}$$

und weil die Determinante $\Delta$ nicht verschwindet, so sind auch die von Herrn Weierstrass aufgestellten Zulässigkeits-Bedingungen erfüllt; mithin würden die Größen $e_1$, $e_2$, $e_3$ wirklich die Haupteinheiten eines zulässigen Systems komplexer Größen von der Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

bilden, wo die Koordinaten $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ alle reellen Werte durchlaufen. Allein ich kann nicht glauben, daß Gauß hierin eine neue (andere) Art von Größen erblickt haben würde. In der Tat, es ist unmöglich, irgendeine Eigenschaft, eine Tatsache anzugeben, durch welche diese Größen $e_1$, $e_2$, $e_3$ sich von den dreiwertigen Kreisteilungs-Perioden

$$e_1 = r + r^{-1},\ e_2 = r^2 + r^{-2},\ e_3 = r^3 + r^{-3}$$

unterscheiden, wo $r$ unbestimmt jede Wurzel der Gleichung

$$r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$$

bedeutet.

Genau so verhält es sich, wie ich gezeigt habe, in jedem anderen Beispiele. Ich führe noch die beiden folgenden an:

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = e_3,$$
$$e_2 e_3 = e_2,\ e_3 e_1 = e_2 + e_3,\ e_1 e_2 = e_2 + e_3$$

und

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = -e_3,$$
$$e_2 e_3 = -e_2,\ e_3 e_1 = -e_2 + e_3,\ e_1 e_2 = e_2 + e_3.$$

Alle Bedingungen der Weierstrassschen Theorie sind erfüllt, aber ich kann die Haupteinheiten $e_1$, $e_2$, $e_3$ nicht für eine neue Art von Größen ansehen, weil sie schlechterdings nicht zu unterscheiden sind von den gewöhnlichen mehrwertigen Größen

$$e_1 = 1 + r,\ e_2 = r,\ e_3 = r^2,$$

wo $r$ jede Wurzel der kubischen Gleichung

$$r^3 - r = 0$$

im ersten Falle, im zweiten der Gleichung

$$r^3 + r = 0$$

bedeutet.

Um die Erscheinung des Verschwindens von Produkten aus nicht verschwindenden Faktoren im Reiche der gewöhnlichen, aber mehrwertigen Zahlen zu erläutern, schicke ich folgende Bemerkung voraus. Ist $r$ eine $n$-wertige*) Zahl, d. h. bedeutet $r$ unterschiedslos jeden der $n$ voneinander verschiedenen bestimmten Zahlwerte

$$r',\ r'' \ldots r^{(n)},$$

so wird folgerichtig, wenn $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ganze Funktionen einer Veränderlichen $t$ mit bestimmten (d. h. einwertigen) Koeffizienten sind, die Behauptung

$$\varphi(r) = \psi(r)$$

stets und nur dann für wahr gelten, wenn die $n$-Bedingungen

$$\varphi(r') = \psi(r'),\ \varphi(r'') = \psi(r'') \ldots \varphi(r^{(n)}) = \psi(r^{(n)})$$

sämtlich erfüllt sind, d. h. wenn die ganze Funktion $\varphi(t) - \psi(t)$ durch die ganze Funktion

$$f(t) = (t - r')(t - r'') \ldots (t - r^{(n)})$$

teilbar ist.

---

*) Wenn man lieber will, so mag man $r$ eine veränderliche Größe nennen, deren Gebiet auf $n$ bestimmte, voneinander verschiedene Werte $r'$, $r'' \ldots r^{(n)}$ beschränkt ist.

Ist daher z. B. $r$ eine zweiwertige Größe, welche unterschiedslos jeden der beiden Werte $\pm 1$ bedeutet, so verschwindet weder die Größe $r + 1$ noch $r - 1$, aber ihr Produkt $r^2 - 1$ verschwindet.

Man sage nicht, dies sei nur künstlich herbeigezogen, um den bisher in die allgemeine Arithmetik eingeführten Größen eine Eigenschaft zuzusprechen, die eigentlich nur einer ganz neuen Art von Größen beigelegt werden dürfte. Dem ist keineswegs so. Daß diese Eigenschaft der gewöhnlichen mehrwertigen Größen selten oder vielleicht niemals ausdrücklich erwähnt ist, findet seinen Grund darin, daß sie bei den meisten Beispielen wegen der besonderen Beschaffenheit derselben gar nicht zum Vorschein kommt, während sie bei allgemein gehaltenen Untersuchungen selbstverständlich ist und gerade deshalb kaum Erwähnung verdient. In der Tat, eins der bekanntesten Beispiele mehrwertiger Zahlen wird von der Theorie derjenigen Zahlengebiete geliefert, die ich endliche Körper genannt habe; hier liegt die Sache so, daß $r$ jede Wurzel einer sogenannten irreduzibelen Gleichung $f(r) = 0$ bedeutet, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind, und außerdem werden auch nur rationale Koeffizienten in den aus $r$ gebildeten Größen $\varphi(r)$ geduldet; es ist lediglich eine Folge dieser besonderen Beschränkungen, daß ein Produkt aus zwei nicht verschwindenden Faktoren $\varphi(r)$ ebenfalls niemals verschwinden kann. Der bekannteste spezielle Fall ist wohl der der Kreisteilung, welchen Gauß in der siebenten Sektion der Disquisitiones Arithmeticae behandelt hat; im Artikel 339 wird, wenn $n$ eine Primzahl bedeutet, unter $r$ jede Wurzel der Gleichung $R = 0$ verstanden, wo

$$R = r^{n-1} + r^{n-2} + \text{etc.} + r + 1,$$

und im Artikel 341 wird bewiesen, daß diese Gleichung irreduzibel ist; solange $r$ diese Bedeutung einer $(n - 1)$-wertigen Größe behält, gilt der Satz, daß ein Produkt aus zwei nicht verschwindenden, rational gebildeten Faktoren $\varphi(r)$ ebenfalls nicht verschwindet, und bei Umformungen von Zahlen $\varphi(r)$ in $\psi(r)$ dürfen alle und nur solche Glieder weggelassen werden, die den Faktor $R$ enthalten. Aber aus naheliegenden Gründen führt Gauß, was bemerkt zu werden verdient, die meisten (doch nicht alle) solchen Umformungen so aus, daß sie auch noch für $r = 1$ gültig bleiben, wodurch der Grad der Mehrwertigkeit erhöht wird; in allen diesen Fällen ist daher weder der Faktor $R$ noch der Faktor $r - 1$ als verschwindend anzusehen, wohl aber ihr Produkt $r^n - 1$. Dies wird freilich nirgends ausdrücklich erwähnt, aber tatsächlich verhält es sich so.

Auch die Geometrie kann leicht Veranlassung zur Betrachtung mehrwertiger Größen geben, bei welchen dieselbe Erscheinung auftritt. Sind z. B. drei Punkte $M'$, $M''$, $M'''$ durch ihre Cartesischen Koordinaten gegeben,

$$\begin{array}{lrr} M' \text{ durch} & 1, & 0,\ 0 \\ M'' \quad " & 2, & 1,\ 1 \\ M''' \quad " & 0, & -1,\ 1 \end{array}$$

und es handelt sich darum, alle algebraischen Flächen zu bestimmen, welche durch alle drei Punkte gehen, so läuft dies darauf hinaus, alle die rationalen Gleichungen zwischen drei Größen $e_1$, $e_2$, $e_3$ aufzustellen, welche durch jedes der drei obigen Systeme von je drei Koordinaten befriedigt werden. Diese Größen $e_1$, $e_2$, $e_3$ bilden daher ein solches mehrwertiges System, wie ich es im ersten Teile meiner Abhandlung (S. 143—147) betrachtet habe, und zwar sind die Grundformeln für die Multiplikation diejenigen, welche sich oben im zweiten meiner drei Beispiele finden. Die einzige für $e_1$, $e_2$, $e_3$ geltende lineare Gleichung

$$e_1 - e_2 = 1$$

entspricht der durch die drei Punkte $M'$, $M''$, $M'''$ gelegten Ebene; von den drei linearen Größen

$$e_1 - e_2 - e_3,\ e_2 + e_3,\ e_2 - e_3,$$

welche den durch den Nullpunkt und je zwei der Punkte $M'$, $M''$, $M''$ gelegten Ebenen entsprechen und nach Herrn Weierstrass zweckmäßig Teiler der Null genannt werden können, verschwindet keine, wohl aber verschwinden die Produkte aus je zwei verschiedenen von ihnen, was sich geometrisch von selbst versteht.

Nachdem ich versucht habe, meine Deutung des Ausspruches von Gauß durch die vorstehenden Beispiele zu erläutern, glaube ich zugunsten derselben noch folgendes anführen zu dürfen. Die Grundlage für die Untersuchungen des Herrn Weierstrass (und ebenso der meinigen) über die Zulässigkeit allgemeiner komplexer Zahlen, welche linear aus $n$ Haupteinheiten gebildet sind, besteht in der Forderung, daß die (von der Ordnung der Faktoren unabhängigen) Produkte aus je zwei Haupteinheiten sich wieder linear durch die Haupteinheiten darstellen lassen, und es darf wohl als sicher angenommen werden, daß Gauß von derselben Grundlage ausgegangen ist. Vergleicht man nun hiermit den Artikel 345 der Disquisitiones Arithmeticae, in welchem Gauß den für die Kreisteilung äußerst wichtigen Satz aufstellt, daß die Produkte aus je zwei sogenannten Perioden sich linear durch die Perioden darstellen lassen, so springt die Ähnlichkeit jener arithmetischen Untersuchung über allgemeine komplexe Größen mit dieser, freilich sehr speziellen algebraischen Untersuchung über mehrwertige Größen der Kreisteilung so in die Augen, daß ich glauben möchte, Gauß müßte dieselbe sofort bemerkt haben und dadurch auf den Gedanken gekommen sein, daß jene hypothetischen komplexen Größen auch nichts anderes sind als gewöhnliche, aber mehrwertige Größen. Doch sind dies natürlich nur Wahrscheinlichkeitsgründe, welche die Streitfrage nicht entscheiden können, und darüber wird man vermutlich auch nicht mehr hinauskommen, weil jeder weitere Anhalt zu fehlen scheint.